Приблизна конструкція правильного семикутника.

подав

Микола Чайковський.

(Angenäherte Konstruktion eines regulären Siebenecks).

---

1. Конструкція правильних многокутників, вписаних в коло, стоїть в тісній звязи з розвязкою рівнаня

$$x^n - 1 = 0, \qquad (1)$$

де n є яке небудь ціле число. Знаючи, що

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (2)$$

можемо по приписам альґебраїчної розвязки рівнаня (1) відтяти на оси XX величину $\cos\frac{2\pi}{n}$, а на оси YY величину $\sin\frac{2\pi}{n}$; вони визначать точку P на обводі кола о лучи $r = 1$, який відтинає n-ту часть цілого круга кола, числячи від поземої оси.

Gauss подав спосіб альґебраїчної розвязки рівнаня (1); коли n є число перве, яке зменшене о 1 дає таке розложене на перві числа

$$n - 1 = p_1 p_2 \ldots p_\nu, \qquad (3)$$

то розвязка рівнаня (1) зводить ся до розвязки рівнань степенів $p_1, p_2 \ldots p_\nu$.

Щоби таку розвязку можна начертати при помочи лінії і циркля, мусить складати ся ряд (3) з самих двійок, бо при помочи лінії і циркля можна сконструувати тільки корінї лінїйних і квадратних рівнань. Щоби n було крім того первим числом, мусить воно мати вигляд $2^{2^\mu} + 1$, де μ є яким небудь цілим числом. Для $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ маємо справді перві числа тої форми; але для $\mu = 5$ одержуємо вже *зложене число, подільне через 641, так* що не є певне, чи всї числа тої форми є перві, і котрі з них є зложені.

2. Випадок $n=7$ не належить до сеї катеґорії, бо $n-1=6$ $=2.3$, отже має чинник 3, а кубічне рівнане не має ґеометричної конструкції. Альґебраічна розвязка веде до таких корінїв: 1; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3, де y і z є корінями кубічних рівнань:

$$\left.\begin{aligned} y^3-\varphi_1 y^2+\varphi_2 y-1&=0,\\ z^3-\varphi_2 z^2+\varphi_1 z-1&=0, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

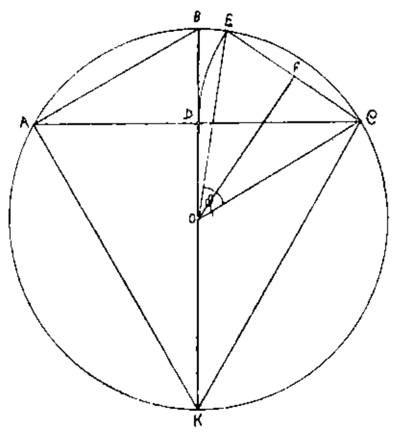
а:

$$\varphi_1=\tfrac{1}{2}(-1-i\sqrt{7}),$$
$$\varphi_2=\tfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{7}),$$

φ_1 і φ_2 можемо сконструувати ґеометрично, але не можемо сього зробити з корінями рівнань (4).

3. Все ж таки істнує спосіб приблизної конструкції правильного многокутника, вписаного в коло, який в практицї вистарчає навіть для дуже точних помірів.

В колї відтинаємо дві тятиви рівні лучеви, як при правильнім шестикутнику і лучимо з собою їх кінцеві точки. Половина тятиви AC, т. є половина бока рівнобічного трикутника, є дуже зближена до бока правильного семикутника.



Доказ. Назвім бік шуканого семикутника $EC=CD=x$; тодї маємо:

$$x=\tfrac{1}{2}AC=\frac{r}{2}\sqrt{3}=s_7$$

як висота в рівнобічнім трикутнику OAB.

З трикутника OCE виходить для кута φ:

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{x}{2r}=\frac{1}{4}\sqrt{3},$$

а се дає:

$$\varphi=51^{0}19'04{\cdot}16''.$$

Отсей кут ріжнить ся від осередочного кута правильного, т. є від $\frac{2\pi}{7}=51^{0}25'42{\cdot}85''$, тільки о $6'38{\cdot}69''$, так що 7φ ріжнить ся від 2π всього о $46'33{\cdot}83''$. Отся ріжниця відповідає тятиві (або дузї) довжини $0{\cdot}0013544\,r$, так що при $r=1m$ будемо мати всього $0{\cdot}13$ *cm* блуду, який можемо розділити на 7 частий по несповна $0{\cdot}02$ *cm*.

4. Знаючи бік семикутника і луч описаного кола, обчислимо легко луч вписаного кола $\varrho_7 = OF$ з $\triangle OEF$:

$$\varrho_7^{\,2} = r^2 - \left(\frac{s_7}{2}\right)^2 = \frac{13}{16} r^2,$$

$$\varrho_7 = \frac{r}{4}\sqrt{13},$$

а звідси поверхню елементарного $\triangle OEC$:

$$f_7 = \frac{\varrho_7 s_7}{2} = \frac{r^2}{16}\sqrt{39}.$$

Обвід семикутника буде:

$$u_7 = 7 s_7 = \frac{7}{2} r \sqrt{3}.$$

Львів 28. червня 1910.

RÉSUMÉ.

Die Konstruktion eines regelmässigen, dem Kreise eingeschriebenen Siebenecks ist. bekanntlich mittelst Zirkel und Lineal undurchführbar, weil die Lösung der Kreisteilungsgleichung $x^7 - 1 = 0$ die Lösung einer kubischen Resolvente erheischt.

Es existiert aber eine approximative Konstruktion des regulären Siebenecks, deren Annäherung so gross ist, dass sie in der Praxis sehr gut gebraucht werden kann.

Wenn wir dem Kreise ein gleichseitiges Dreieck ACK einschreiben, dann ist die Hälfte der Seite desselben beinahe gleich der gesuchten Seite des Siebenecks. Denn es ist $x = \frac{1}{2} AC = \frac{r}{2}\sqrt{3} = s_7$, und aus OCE folgt für φ:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{x}{2r} = \frac{1}{4}\sqrt{3},$$

woraus sich $\varphi = 51^{\circ}19'04.16''$ ergibt. Die Differenz $2\pi - 7\varphi$ ist $= 46'\,33{\cdot}83''$, was einer Länge der Sehne (oder des Bogens) von $0{\cdot}0013544\ r$ entspricht. Für $r = 1m$ wäre die Korrektur $0{\cdot}13\ cm : 7$ erforderlich; dies gäbe eine Verschiebung jeder Ecke des Siebenecks um beinahe $0{\cdot}2\ mm$.