Про закон бігунового дуалїзму ґеометричних творів.

написав

В. Калїцун.

(B. Kalicun. Über das Gesetz der polaren Dualität in der Geometrie.)

Часть I. (I. Teil.)

[Два рисунки.]

Короткий погляд на історию розвою теориї бігунового дуалїзму.

1. Одною з прегарних спадщин по великім умі Poncelet'а є теория бігунового дуалїзму ґеометричних творів.

Вже Monge, сотворитель ґеометриї начеркової, подає кілька поодиноких примінень переміни одних творів ґеометричних на иньші, де точкам і простим одного твору відповідають прості і точки другого твору; в роцї 1806 Brianchon перемінює в подібний спосіб твердженє Pascal'а о шестикутнику, вписанім на кривій II-го степеня — на твердженє о шестибічнику, описанім на кривій II-го степеня; загальну однак теорию бігунового дуалїзму розвиває по раз перший Poncelet в р. 1824 в своїй працї п. з. „Théorie générale des polaires réciproques".

В тій розвідцї Poncelet доказує, що бігуновий дуалїзм, в віднесеню до кривої II-го ст. або поверхнї II-го степ., є не тільки загальною методою трансформацийною всїх свійств начеркових ґеометричних творів, але дасть ся крім того примінити до певного рода получень метричних, обнятих одною назвою „получень метричних метових" (проекцийних). Через консеквентне примінене тої методи до ґеометричних правд доходить відтак Poncelet до заключеня, що кождому свійству, кождому твердженю, в котрих виступають получення метові (так начеркові як метричні) між елементами площі або простору, відповідає бігуново иньше свійство, иньше твердженє; що отже ґеометрия розпадає ся на два ряди правд, які лучать ся зі собою і собі відповідають.

На дорозї вказаній Poncelet'ом поступив о крок наперед Gergonne, вельми заслужений математик француский, виказуючи, що взаїмність і лучність, яка пануе між твердженями ґеометричними не е случайним вислїдом бігунових свійств з огляду на криві і поверхнї II-го степеня, але е основним свійством ґеометричних творів. Після сего закона, котрий Gergonne назвав „дуалїзмом", відповідає пляніметриї точки — пляніметрия простої, стереометриї точки — пляніметрия площі.

Завзята і довголїтна суперечка, яка вивязала ся між Poncelet'ом і Gergonne'ом о першеньство відкритя сего закона дуалїзму, закінчив Steiner в р. 1832 в своїм творі п. з. „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander"

„Закон дуалїзму" — говорить Steiner в передмові до свого дїла — „появляє ся вже в елементарних творах основних, коли теория бігунового дуалїзму е доперва вислїдом получення тих основних творів. Коли однак Gergonne міг тілько заобсервувати закон дуалїзму в первісних елементах ґеометриї, то в теориї бігунового дуалїзму виступае доказ сего закона. А що не брак рівнож і примірів, в котрих при помочи свійств бігунових доходить ся до нових, величавих вислїдів, проте не дасть ся заперечити, що Poncelet був перший, що підніс велике значіне закона дуалїзму, яко методи трансформацийноi".

2. З поміж многих розвідок Chasles'a, що відносять ся до сеї теориї, заслугують на увагу передовсїм дві з них:

„Premier Mémoire sur la transformation des relations métriques des figures" [Quet. Corr. Том 5, 1829].

„Sur la transformation parabolique des relations métriques des figures" [Quet. Corr. Том 6, 1830].

Суть они дїйсним доповненем теориї бігунового дуалїзму. Працї ті спонукали Poncelet'a до загальнїйшого розвиненя трансформациї параболїчної (ортоґональної) сполучень метричних в знаменитій розвідцї п. з. „Note sur quelques principes généraux de transformation des relations métriques des figur" [Quet. Corr., Том 7, 1832].

3. Способом загальним, не залежним від кривої II го ст., доходить до свійств бігунового дуалїзму на площі Möbius в своїй розвідцї п. з. „Der barycentrische Calcul" [Липск 1827, том 1] Гадку Möbiusa доповняе і переносить на простор тривимірний Steiner в своїм повисше згаданім дїлї, а відтак Seydewitz, Staudt, Reye і прочі.

Möbius'ови завдячуемо рівнож „систем бігуново-зерових". котрий відкрив в роцї 1833, розвязуючи задачу з механіки: „Вачеркнути дві сили, „котрі-би заступили даний систем сил, ділаючих на цілке тіло“.

[Crelle's Journal für d. r. u. a. Mathematik, том 10].

В кілька лїт пізнїйше відкрив той систем рівнож Chasles [Comptes Rendus, 1843].

Про закон бігунового дуалїзму на площі.

I.

1 а) Нехай буде дана довільна точка P на площі стіжкового перерізу c^2.

Дві довільні прямі, переходячі через точку P, перетинають криву c^2 в парах точок A, B; C, D, котрі визначують чотирокутник $ABCD$, вписаний в тую криву; стичні a, b, c, d начеркнені відповідно в тих точках до кривої c^2, творять чотиробічник, описаний на тійже кривій [рис. 1). Звісно однак, що точки перекутні P, Q, R чотирокутника $ABCD$ лежать на перекутних p, q, r чотиробока $abcd$ [Dr. Łazarski, Zasady geometryi wykreślnej, том I, ст. 29]. З сего слїдує, що точки U, V, в яких перекутня — p — перетинає прямі AB, CD є гармонїчно спряжені з точкою P, з огляду на пари точок A, B; C D, —, с. є $(PUAB) = -1$, $(PVCD) = -1$.

Коли точки A, B і їх стичні a, b позістануть сталі, а тятива CD, переходяча через точку P, обертати ся ме около тоїж точки, тодї пряма — p —, що на нїй порушати ся ме точка V, позістане рівнож сталою, бо пряма та є визначена точкою U і спільною точкою стичних a і b. — Отже:

„Єсли тятива (CD) стіжкового перерізу (c^2) обертає ся около сталої єї точки P, тодї точка V, гармонїчно спряжена з точкою P, з огляду на точки C, D, — описує сталу пряму — p —“.

А що точка V є одинокою точкою гармонїчно спряженою з точкою P в ґрупі $(PVCD) = -1$, проте пряма — p — є одиноким місцем ґеометричним, описаним точкою V. В той спосіб:

„З кождою дїйсною точкою (P), лежачою на площі стіжкового перерізу (c^2), є спряженя тільки одна дїйсна пряма (p), докладно визначена тоюж точкою (P) і перерізом стіжковим (c^2)“.

Пряму — p — названо „бігуновою“ точки P, з огляду на перерів стіжковий c^2.

1 б) Звісно, що єсли з двох пар точок, які творять ґрупу гармонїчну, одна пара сходить ся в однїй точцї, тодї і трета точка тої ґрупи сходить ся з тою самою точкою. З того свійства слїдує нове означене бігунової:

„Бігунова $-p-$ точки $-P-$, з огляду на криву II-го ст. c^2, є тятивою стичности стичних, поведених з тої точки до даної кривої“.

Не трудно рівнож зі свійства чотиробічника $abcd$, описаного на кривій c^2, відразу здогадати ся, що:

„Єсли тятива (CD) стіжкового перерізу c^2 обертає ся около єї сталої точки P, то стичні c, d, вичеркнені до кривої c^2, в єї кінцях (C, D), перетинають ся на сталій прямій $-p-$, бігуновій точки P, з огляду на криву c^2“.

З тих самих причин, з котрих пряма $-p-$ є бігуновою точки P, є перекутні q, r відповідно бігуновими точок Q, R; або иньшими словами:

„Єсли в переріз стіжковий є вписаний чотирокутник $ABCD$, тоді боки єго трикутника перекутного є бігуновими протилежних вершків того трикутника“.

2 а) Приймім тепер на площі перерізу стіжкового c^2 довільну просту (рис. 1).

Дві пари стичних a, b; c, d, вичеркнених з двох довільних точок тої прямої до кривої c^2, утворять чотиробічник описаний на тій кривій, а їх точки стичности A, B; C, D, визначать чотирокутник вписаний в туюж криву; боки трибічника перекутного $p\,q\,r$ чотиробічника $a\,b\,c\,d$ переходять відповідно через вершка P, Q, R трикутника перекутного чотирокутника $A\,B\,C\,D$. Коли означимо через u, v прості, що сполучають точку P з точками (a, b), (c, d) пересїчи стичних a, b, c, d, тоді зі свійств гармонічних чотиробічника $a\,b\,c\,d$ слїдує, що пряма $-u-$ є гармонічно спряжена з прямою $-p-$, з огляду на стичні a, b, — як рівнож проста $-v-$ є гармонічно спряжена з тоюж простою $-p-$, з огляду на стичні c, d; се є: $(a\,b\,p\,u) = -1$, $(c\,d\,p\,v) = -1$.

При сталім положеню прямої $-p-$ і стичних a, b, нехай стичні c, d так по кривій c^2 порушають ся, щоби їх точка пересїчи позіставала завсїгди на прямій $-p-$; то пряма $-v-$ гармонічно спряжена з прямою $-p-$, з огляду на стичні c, d, мусить переходити через туюж саму точку P, бож точка та творить ґрупу гармонічну з трома сталими точками A, B, U. Отже:

„Єсли точка пересїчи пари стичних c, d кривої II-го ст. порушає ся по сталій прямій $-p-$, то пряма $-v-$ гармонічно спряжена з прямою $-p-$, з огляду на стичні c, d, переходить завсїгди через сталу точку P“.

А що через кожду точку прямої $-p-$ можна повести тільки одну пряму $-v-$ гармонічно спряжену з $-p-$, з огляду на стичні c, d, що дають ся з тої точки повести до кривої c^2, проте точка P є одинокою спільною точкою для всїх прямих — v —.

Подібно отже — як через бігун є однозначно визначена єго бігунова, — так і навідворіть:

„З кождою дїйсною прямою (p), що лежать на площі стіжкового перерізу c^2, є спряжена тільки одна дїйсна точка (P), докладно визначена через тую пряму і криву c^2“.

Точку P названо „бігуном“ даної прямої, з огляду на переріз c^2.

2 б) З повисшої фіґури дасть ся вичитати прямо слїдуюче свійство:

„Єсли чотиробічник $a\,b\,c\,d$ є описаний на кривій II-го ст. c^2, тоді кождий вершок єго перекутного трибічника є бігуном протилежного бока того трибічника“.

Як рівнож:

„Єсли спільна точка стичних c, d до кривої II-го ст. c^2 порушає ся по сталій прямій — p —, то пряма, сполучаюча їх точки стичности, обертає ся около своєї сталої точки P, що є бігуном прямої — p —, в віднесеню до кривої c^2“.

3. Беру єще раз під розвагу чотирокутник $A\,B\,C\,D$, вписаний в криву II-го степ. c^2 і чотиробічник $a\,b\,c\,d$ описаний відповідно в вершках A, B, C, D на тійже кривій (рис. 1).

Після тверджень в уступах 1 б), 2 б) є боки p, q, r спільного перекутного трикутника обох чотирокутників бігуновими єго протилежних вершків P, Q, R; і взаїмно вершки P, Q, R того трикутника є бігунами єго протилежних боків p, q, r.

Єсли отже — q — є боком трикутника перекутного, що сполучає єго вершки P і R, то єї бігун R є точкою спільною тятив $B\,D$ і $A\,C$; подібно бігун R бока — r — знаходить ся в спільній точці тятив $B\,C$ і $A\,D$.

Нехай при сталім положеню вершків A і B чотирокутника $A\,B\,C\,D$ бік $D\,C$ обертає ся около точки P; тоді прямі $A\,D$ і $B\,D$ (або $A\,C$ і $B\,C$) опишуть дві вязки проєктивні, о вершках A і B, а точки Q і R, яко точки пересїчи відповідних простих тих вязок з прямою — p —, утворять два проєктивні ряди. А що прямі (q) є перспективічні з рядом (R) [подібно як прості (r) є перспективічні з рядом (Q)], — проте маємо:

„Єсли пряма — q —, обертаючи ся около своєї сталої точки P, описує вязку $P\,(q)$, натоді бігун Q тої прямої, з огляду на криву II-го ст. c^2 [що лежить на площі вязки], описує на бігуновій — p — точки P ряд $p\,(Q)$, проєктивний з вязкою $P\,(q)$“.

Однак легко мож запримітити, що пряма — p — мусить переходити через осередок вязок A (D) і B (D), з чого слїдує, що відповідні точки Q і R рядів (Q) і (R) суть замінні і творять інволюцию [Dr. Łazarski, Zasady geom. w. I, st. 16].

Коли проте назвем „бігунами спряженими", з огляду на криву II-го ст. c^2, такі дві точки (пр. Q і R), котрі посїдають свійство, що бігунова одної з них переходить через другу, а „бігуновими спряженими", з огляду на криву c^2, такі дві прямі (пр. q, r), з котрих одна переходить через бігун другої, тодї з тверджень попередних слїдує:

„Бігуни спряжені, з огляду на криву II-го ст. c^2, що лежать на прямій, творять інволюцию, для якої точки пересїчи тої прямої з кривою c^2 є точками подвійними. Та інволюция є отже гіперболїчна, параболїчна або еліптична, залежно від сего, чи підстава інволюциї перетинає криву c^2 в дїйсних точках, стикає ся з нею, чи перетинає ї в двох точках мнимих".

І навідворіть:

„Бігунові спряжені, в віднесеню до кривої II-го ст. c^2, що переходять через одну точку, творять інволюцию, для котрої стичні, начеркнені з даної точки до кривої c^2, є подвійними прямими. Та отже інволюция є гіперболїчна, параболїчна або еліптична, залежно від сего, чи дана точка лежить на вні, на обводї або в нутрі кривої c^2".

Нетрудно рівнож запримітити слїдуюче свійство:

„Вязка інволюцийна бігунових спряжених, що переходять через одну точку, є перспективічна з рядом бігунів спряжених, що лежать на бігуновій тої точки".

Розуміючи відтак через „трокутник бігуново спряжений", з огляду на криву II-го ст. c^2, — три точки, посїдаючі тоє свійство, що бігунова одного з них переходить через два иньші; подібно через „трибічник бігуново спряжений", з огляду на криву c^2, — три прямі, які посїдають свійство, що бігун одної з них є спільною точкою двох иньших, — тодї два перші з повисших тверджень дадуть ся слїдуючо висказати:

„Кожда точка P на площі перерізу стіжкового c^2 є спільним вершком безконечного множества трикутників бігуново спряжених з огляду на криву c^2, для котрих то трикутників бігунова — p — точки — P — є спільним боком. Пара вершків, що лежать на прямій — p — творять ряд інволюцийний, а пара боків, що переходять через точку P, творять вязку інволюцийну".

І взаїмно:

„Кожда пряма — p — є спільним боком безконечного множества трибічників бігуново спряжених з огляду на криву c^2, для котрих бігун P тої прямої є спільним вершком. Пари боків, що переходять через туую точку, творять вязку інволюцийну, а пари вершків, що лежать на прямій — p —, творять ряд інволюцийний“.

4 а) Повисші получення, визначені з огляду на криву II-го ст. c^2, між елементами площі (π) і творами першого степеня тих елементів — становлять основне свійство закона бігунового дуалїзму на площі.

Після сего закона відповідає кождій точцї площі — π — єго бігунова, і навпаки кождій прямій тої площі єї бігун, з огляду на криву II-го ст. c^2; рядови точок відповідає проєктивна з ним вязка прямих, і навпаки. Системови плоскому u, зложеному з точок, прямих, рядів точок і вязок прямих, відповідає иньший систем плоский u_1 (на тій самій площі), зложений з прямих, точок, вязок прямих і рядів точок, — при чім:

„Кождому твердженю, кождій дефініциї, конструкциї або задачі, в котрих є згадка о сполученях і свійствах метових між елементами або творами першого степеня системи u — відповідає иньше тверджене, иньша дефініция, конструкция або задача о сполученях і свійствах метових між елементами або творами першого степеня системи u_1, які слїдують з перших, коли поміняємо понятя: точка і пряма, ділання: перетинати і лучити, — оставляючи незміненими понятя: перспективічного положеня і відношеня подвійного поділу“.

Системи u і u_1 в той спосіб собі відповідаючі названо „системами бігуново зі собою спряженими“, в віднесеню до кривої II-го ст. c^2, котру названо „провідною бігунового дуалїзму“.

Замітка: З того, що сказалисьмо о бігуні і бігуновій легко можна пізнати, що: 1) точкам і стичним підстави c^2, зачислюваним до одного з системів бігуново спряжених (н. пр. до u), відповідають стичні поведені в тих точках до кривої c^2, взглядно точки стичности тих стичних, належачі до другого систему (u_1)“.

2) Осередкови (S) провідної c^2 відповідає бігунова пряма в безконечности, і навідворіть: пряма в безконечности має за бігун осередок тої кривої“.

4 б) Нехай отже будуть дані в системі u дві вязки проєктивні прямих: W (a, b, c, . . .) і W_1 (a_1, b_1, c_1, . . .), котрі визначають, як звісно, криву другого степеня c^2; то вязкам тим відповідають бігуново, з огляду на провідну c^2, в системі u_1 два ряди проєктивні W (A, B, . . .) і W_1 (A_1, B_1, C_1, . .), котрі визначують криву другої кляси c^2. Точкам пересїчи прямих a і a_1, b і b_1, с. в.

точкам кривої c_1^2, відповідають прямі, що лучать точки A' і A'_1, B' і B'_1, ... т. є стичні кривої c^2; і навпаки стичним кривої c_1^2, котрі, як звісно, лучать по дві безпосередно по собі слідуючі точки тоїж кривої, відповідають точки пересїчи, що двох безпосередно по собі слідуючих стичних кривої c_2, с. є її точка. Звідси одержуємо:

„Кривій II-го степ. c_1^2, що належить до системи u, відповідає в системі u_1, бігуново спряженім з u, крива кляси другої c_2".

Такі дві криві c_1^2 і c_2, з котрих кожда має бігунові точки другої за стичні, будучи рівночасно місцем ґеометричним бігунів стичних другої, названо „кривими бігуново спряженими", з огляду на c^2.

На основі замітки на попередній стороні легко буде запримітити, що:

„Крива кляси другої c_2, бігуново спряженої з кривою другого степ. c_1^2, з огляду на криву c^2, є гіперболею, параболею або еліпсею, залежно від того, чи осередок S провідної c^2 лежить поза обводом, на обводі або на поли кривої c_1^2".

З осередка S провідної c^2 дадуть ся випровадити до кривої c_1^2 дві стичні, котрі є: в першім случаю дійсні і ріжні, в другім случаю накривають ся, а в третім случаю є мнимі; стичним тим відповідають точки в безконечности кривої c_2, котрі отже є: в першім случаю обі дійсні і ріжні, в другім случаю накривають ся, а в третім случаю є мнимі спряжені.

Позаяк означеню бігуна і бігунової, з огляду на криву c_1^2, відповідає бігуново дуалїстично означене бігунової і бігуна, з огляду на криву c_2, проте маємо твердженє:

„Єсли точка P і пряма $-g-$ є бігуново спряжені, з огляду на криву c_1^2, тодї бігунова $-p-$ точки P і бігун G прямої $-g-$, з огляду на провідну c^2, є зі собою бігуново спряжені, з огляду на криву c_2, що відповідає бігуново кривій c_1^2".

Звідси одержуємо слідуюче твердженє:

„Осередок кривої кляси другої c_2, бігуново спряженої з кривою II-го ст. c_1^2, — є бігуном, з огляду на провідну бігунового дуалїзму c^2, — такої прямої, котра є бігуновою осередка кривої c^2, з огляду на c_1^2".

Свійствам і твердженям кривої c_1^2, що полягають на проєктивности вязок прямих або рядів точок відповідають свійства і твердженя кривої c_2, що полягають на проєктивности рядів точок або вязок прямих. Приміром, твердженю Pascal'a о шестикутнику, вписанім в криву c_1^2, відповідає твердженє Brianchon'a о шестибічнику описанім на кривій c_2, і т. д.

Колибя криві II-го ст. $c_1{}^2$, $c_2{}^2$ ... творили вязку о основі $ABCD$, натоді криві кляси другої c'_2, c''_2 ..., бігуново спряжені з попередними, утворилиби ряд, вписаний в основу $abcd$, причім свійства метові ряду відповідалиби бігуново дуалїстично тим-же свійствам вязки.

4 в) Коли точка P, порушаючи ся після певного закона на площі кривої провідної c^2, описує в системі U криву c, натоді бігунова — p — тої точки, з огляду на c^2, порушаючи ся після певного закона, обвине в системі U_1 криву c_1, бігуново спряжену з c. Єсли точка P займе безконечно близьке положенє на кривій c, с. з. порушить ся по стичній в тій точцї до кривої, то еї бігунова — p — оберне ся около своєї точки стичности, яка є навпаки бігуном стичної в точцї P до кривої c. З сего слїдує:

„Кожду з двох кривих c і c_1 бігуново зі собою спряжених, з огляду на криву II-го степ. c^2, можна уважати за обвідню бігунових точок другої або за місце ґеометричне бігунів стичних тоїж другої кривої".

Коли точка P, описуючи криву c, переходить два, три, ... r разів тую саму точку D, виходячи кождим разом взагалї з иньшого положеня, тоді еї бігунова — p —, обвиваючи криву c_1, сходить ся два, три, ... r разів з тою самою прямою — d —, виходячи кождим разом з иньшого положеня. Звідси отже бачимо, що:

„Точцї r — кратній і стичним в тій точцї одної кривої (c) відповідають бігуново дуалїстично стична r — кратна і еї точки стичности другої кривої (c_1)".

Нетрудно буде рівнож доказати, що:

„Коли крива — c — є степеня m-го кляси n, то крива c_1, бігунового з нею спряжена є кляси m, степеня n-го".

Бо m- точкам, в яких довільна пряма перетинає криву c, відповідає бігуново дуалїстично m- стичних, поведених з бігуна тої прямої до кривої c_1, а n- стичним, що дають ся вичеркнути з довільної точки до кривої c, відповідає n- точок кривої c_1, що лежать на бігуновій тої точки.

Звісно однак, що кляса кривої m-го степеня дасть ся означити рівнанєм: $n = m(m-1)$. Та многість вказує якрав на степень кривої c_1, бігуново спряженої з кривою c, з чого слідувалоби, що кляса m кривої c_1 малаби вартість $m = m(m-1)[m(m-1)-1]$, а се після попередного твердженя повинно бути рівне рядови кривої c. Отже та сама крива — c — булаби раз m-го степеня, другий раз степеня $m(m-1)[m(m-1)-1]$, що є неможливе.

Тую суперечність повисших тверджень, знану під назвою „парадокса Poncelet'a" ухилив Plücker, виказуючи, що крива висшого степеня ніж другого посїдає точки особливі, котрі знижають клясу, а крива висшої кляси ніж другої посїдає стичні особливі, котрі знижають степень кривої. А іменно:

„Точка подвійна знижає клясу кривої о дві, точка звороту о три одиницї. Стична подвійна знижає степень кривої о дві, а стична звороту (перегинаня) о три одиницї"

Коли отже означимо через — δ — число точок подвійних, а через — $\varkappa$ — число точок звороту, одержуємо на означене кляси кривої — c — рівнане: $n = m\,(m - 1) - 3\,\delta - 3\,\varkappa$, котре в той спосіб зреконструоване виражає ряд кривої бігуново спряженої c_1.

Подібно, означуючи через — δ — число стичних подвійних, а через — i — число стичних перегинаня, одержуємо на означене ряду кривої — c — рівнане: $m = n\,(n - 1) - 2\,\delta - 3\,i$, що виражає клясу кривої c_1.*)

Твердженям о многокутниках вписаних або описаних на кривій — c — відповідають бігуново дуалїстично твердженя о многобічниках описаних або вписаних в криву c_1, і на відворіть. Свійствам метовим вязки кривих — c — відповідають подібні свійства ряду кривих c_1, і т. д.

4 г) Приміри повисші виказують, що закон бігунового дуалїзму є загальною методою трансформацийною сполучень і свійств метових творів ґеометричних, до яких зачисляють ся всї свійства начеркові тих творів і сполученя взаїмного положеня їх елементів, що опирають ся на відношеню подвійного подїлу. Однак до полученъ метричних, в котрих виступають сталї величини довжин або кутів, або їх відношене поєдинчого подїлу, — взагалї тої методи примінювати не можна, бо поняте довжини і кута не мають для себе понятий бігуново дуалїстичних.

Так примiром: Конструкциї прямих подвійних вязки інволюцийної відповідає бігуново дуалїстично конструкция точок подвійних ряду інволюцийного, однак та відповідність не розтягає ся на визначене нормальних вязки інволюцийного і осередка ряду інволюцийного. Рівнож не дасть ся перемінити при помочи тої методи слїдуюче твердженє: „Кожда стична в колї є нормальною до проміру, що переходить через єї точку стичности".

*) Рівнаня повисші випровадив Plücker дорогою аналїтичною; дорогою синтетичною удало ся дійти до них Дрови Лазарскому в розвідцї п. з. „O wpływie punktów i stycznych szczególnych na rząd i klasę krzywych płaskich" Sprawozdania Akademii w Krakowie — рік 1887.

Обсяг приміненя тої методи до сполучень метричних трохи ся розширяє, наколи за лінію провідну бігунового дуалізму приймемо коло або параболю, як то в слїдуючім роздїлї наміряю виказати.

5 а) Нетрудно на основі розумовань, поміщених в уступах 1 б) і 2 б), запримітити, що бігунова довільної точки, з огляду на коло (k), є прямовісною до проміру того кола, яке переходить через дану точку. З причини того свійства коло може бути ужите з певною користю за криву провідну при бігуново дуалїстичній трансформацві метричних получень.

Приймім отже на площі кола — k — кут ABC; то єго раменам AB, CB відповідають з огляду на коло — k —, бігуни A', C', що лежать на бігуновій — b — вершка B, котра є прямовісною до прямої, сполучаючої вершок B з осередком S даного кола — k —. Кут $A'SC'$, котрий творять прямі, сполучаючі осередок S з бігунами A', C' є рівний даному або є єго сповненєм; в кождім случаю оба кути посїдають рівні sinus'и. З того заключуємо:

„Коли дві фіґури плоскі є бігуново дуалїстично зі собою спряжені, з огляду на коло — k —, а між величинами кутів одної з них заходить певне получене, то подібне получене заходити мусить між кутами, утвореними около середоточки S кола — k — через проміри, що переходять через бігуни рамен даних кутів".

Коли кут ABC, не зміняючи своєї величини, обертає ся довкола сталих точок A і C своїх рамен, натоді бігуни єго рамен A', C' порушати ся муть на бігунових a, c точок A, C, причім кут $A'SC'$ буде мати рівнож сталу величину. А що вершок B даного кута, при повисшім руху, опише обвід кола — k_1 —, які переходить через точки A, C, проте єго бігунова $A'C'$ обвине переріз стіжковий c^2, котрий є стичний до бігунових a, c і посїдає одно огнище в осередку S кола — k —. Отже:

„Крива бігуново спряжена з колом — k_1 —, з огляду на иньше коло — k —, є перерізом стіжковим c^2, котрий має одно огнище в осередку — S — кола — k —, а за провідну приналежну до того огнища, бігунову осередка кола k_1, з огляду на — k — "

Що ся тичить доказу другої части того твердженя, то належить запримітити, що стичним рівнобіжним кола — k_1 — відповідають бігуново точки кривої c^2, котрі лежать на тятивах, які переходять через осередок S кола провідного k, а тятивам, сполучаючим точки стичности тих стичних, відповідають точки пересїчи стичних в повисших точках кривої c^2. А що всї тятиви, що лучать точки стичности стичних рівнобіжних по — k_1 —, переходять через осередок того кола, проте точки пересїчи, що двох стичних кривої c^2, що їх тятиви стичности переходять через осередок S кола, провідною — k —, лежать на одній прямій, що є бігуновою осередка даного кола — k_1 —, з огляду на колю — k —. Однак та пряма є рівнож бігуновою точки S, з огляду на c^2, отже провідною тої кривої.

З повисшого твердженя слїдує відтак, що колам k_1, k_2 ..., довільно уміщеним на площі кола провідного — k —, відповідають бігуново дуалїстично криві c^2, c_1^2 ..., що мають в осередку S кола — k — спільне огнище. Отже:

„Розличні твердженя і свійства кутів у кіл можна перемінити бігуново дуалїстично на иньші твердженя і свійства кутів, що належать до спільного огнища перерізів стіжкових".

5 б) Трансформацию сполучень метричних при помочи параболї, яко провідної бігунового дуалїзму, назвав Chasles „параболїчною", а Poncelet „ортоґональною". Полягає она на слїдуючім свійстві:

„Бігунові двох довільних точок, з огляду на параболю, визначують на єї оси довжину, котра є рівна довжинї прямовісного мета на ту вісь довжини, що сполучає дані точки".

І дїйсно, нехай через дані точки переходять дві прямі, прямовісні до оси параболї; то через бігуни тих прямих перейдуть відповідно бігунові даних точок. Звісно однак, що віддаленя тих бігунів від вершка параболї є рівні віддаленям тих прямих від тогож вершка. З того слїдує, що віддаленє тих бігунів — є. з. довжина визначена через бігунові даних точок на оси параболї — є рівна віддаленю прямовісних до оси параболї, що переходять через дані точки — т. є метови прямокутному довжини, сполучаючої дані точки.

Нехай отже A, B, C, D, E ... будуть точками фіґури плоскої, а $\Phi(AB, CD, EF, \ldots) = O$ сполученєм між довжинами єї боків. Натодї бігунові a, b, c, d, точок A, B, C, ... з огляду на параболю p^2, що лежать на площі тої фіґури, утворять другу фіґуру, бігуново дуалїстично спряжену з першою. Єсли α, β, γ, ... будуть означати точки, в яких бігунові a, b, c, ... перетинають вісь x — параболї — p^2 —, то з твердженя повисшого слїдує, що:

$$\alpha\beta = AB \cos (AB, x), \quad \gamma\delta = CD \cos (CD, x),$$

Довжини AB, CD, обчислені з тих рівнань і підставлені в рівнанє $\Phi = O$ замінять єго на слїдуюче:

$$\Phi\left[\frac{\alpha\beta}{\cos (AB, x)}, \quad \right] = O.$$

Єсли послїдне рівнане буде того рода, що *cosinus*'и зі знаменників уступлять, так, що рівнане то прийме вид: $\Phi\,[\alpha\beta,\ \gamma\delta,\ \ldots] = O$, натодї представляти оно буде получене між довжинами, що належать виключно до другої фіґури, та виражати єї свійство, що відповідає бігуново дуалїстично свійству першої фіґури, представленому рівнанєм $\Phi\,[A\,B,\ C\,D,\ \ldots] = O$.

II.

1. Часто два системи U і U_1, бігуново зі собою спряжені, з огляду на криву II-го ст. c^2, уважаємо за оден, називаючи єго „системом бігуновим кривої c^2".

В отсїм роздїлї буду ся старати доказати, що свійство такого системи бігунового, представлене в I. роздїлї, істнує незалежно від єго провідної c^2, і що систем той є визначений, єсли будуть данї дві єго бігунові спряжені і до них приналежні в тім системі ряди інволюцийні спряжених бігунів.

Нехай отже дані бігунові спряжені будуть прямі p_1, p_2 [рис. 2], а на них інволюцийні ряди спряжених бігунів нехай будуть визначені через пари спряжених бігунів: A, A_1; B, B_1 зглядно A', A_1'; B', B_1'.

Спільній точцї P прямих p_1, p_2 відповідає в інволюцийнім рядї (p_1) одинока з ним спряжена точка P_2, котра є бігуном прямої p_2, а в рядї інволюцийнім (p_2) відповідає єму одинока, з ним спряжена точка P_1, котра є бігуном прямої p_1. З того слїдує, що пряма $-p-$, що сполучає точки P_1, P_2 є одинокою бігуновою точки P.

Єсли хочемо для довільної прямої p_x визначити єї бігун P_x, треба визначити точки C_1, C_1', спряжені в даних інволюцийних рядах з точками C і C', в яких та пряма перетинає основи p_1, p_2 тих інволюций. Прямі, що лучать точки C_1, P_1; C_1', P_2 є бігуновими відповідно точок C і C'. Спільна точка P_x тих прямих є якраз одиноким бігуном даної прямої p_x.

Подібно відворотною конструкциєю буде можна для кождої точки P_x визначити однозначно єї бігунову p_x.

Звідси бачимо, що повисші данї позваляють „з кождою точкою (P_x) площі спрягти певну, однозначно означену пряму (p_x) — єго бігунову; і взаїмно, з кождою прямою (p_x) спрягти певну, однозначно означену точку P_x — єї бігун", подібно як то одержувалисьмо в I. роздїлї при помочи кривої II-го ст. c^2.

2. На основі повисшої конструкциї нетрудно буде відтак доказати, що „єсли точка P_y, порушаючи ся по прямій $-p_x-$, опи-

сує ряд (P_y), натоді его бігунова p_y, обертаючи ся около бігуна P_x прямої p_x, визначить вязку (p_y), проєктивну з рядом (P_y)".

Єсли іменно точка P_y порушає ся по прямій p_x, тоді прямі $P_1 P_y$, $P_2 P_y$ (рис. 2) описують дві перспективні вязки; спільні отже точки D' і D тих прямих зі сталими прямими p_2, p_1 визначать на тих послідних два проєктивні ряди. В виду того мусять бути рівнож проєктивні і ряди, визначені через точки δ' і δ, спряжені відповідно з точками D' і D в даних інволюцийних рядах спряжених бігунів на прямих p_2 і p_1. Однак з рисунку можна побачити, що єсли точка P_y зійде ся зі спільною точкою прямих p, p_x, то точки D і D' зійдуть ся з точками P_1 і P_2, яким в обох інволюциях відповідає одна і та сама точка P, що є спільною точкою прямих p_1 і p_2. Звідси слїдує, що ряди (δ) і (δ') є перспективічні, отже прямі (p_y), які лучать точки відповідні тих рядів, переходити мусять через одну і тую саму точку P_x, котра є бігуном прямої p_x; бо нетрудно запримітити, що коли точка P_y сходить ся з точкою C або C' пересїчи p_x з прямими p_1 і p_2, то пряма p_y сходить ся в перщім случаю з прямою $C_1 P_1$, в другім случаю з прямою $C_1' P_2$, а ті перетинають ся якраз в точцї P_x, бігуні прямої p_x [стр. 13]. А що ряди (δ) і (δ') є проєктивні з рядом (P_y), проте вязка бігунових (p_y), переходячих через точку P_x, є проєктивна з рядом бігунів P_y, що лежать на прямій p_x.

Вязка (p_y) визначає на прямій p_x ряд точок (P_y') проєктивний з рядом (P_y). А що точки відповідні тих рядів є спряженими бігунами, проте є замінні і творять інволюцию, а тим самим їх бігунові [p_y і p_y'] є зі собою бігуново спряжені і творять інволюцийну вязку, котра є перспективічна з тим же рядом.

Тим робом отже доходимо до таких самих свійств як в I. роздїлї на стр. 5 і 6:

„Всї пари спряжених бігунів даного бігунового системі, що лежать на довільній прямій, творять інволюцийний ряд, подібно як всї пари спряжених бігунових, переходячих через тую саму точку, творять інволюцийну вязку. Ряд інволюцийний спряжених бігунів на прямій — p_x — є перспективічний з вязкою інволюцийною спряжених бігунових, що переходять через бігун P_x тоїж прямої p_x".

Так отже дїйсно систем бігуновий на площі є визначений, скоро є дані дві прямі бігуново спряжені в тім системі і до них приналежні інволюциї спряжених бігунів в тімже системі.

В подібний спосіб доказати можна, що систем бігуновий буде визначений: 1) через свої два спряжені бігуни і до них приналежні інволюцийні вязки спряжених бігунових; 2) если є даний его трикутник бігуновий, оден бігун і его бігунова.

3. Належало-би тепер спитати, чи є на площі бігунового системи (u):

а) такі точки, котрих-би бігунові переходили через них самих;

б) такі прямі, котрих-би бігуни на них самих лежали;

в) яке є місце ґеометричне — одних і других?

Звісно з попередного уступу, що если точка P_y порушає ся по прямій $-p_x-$, натоді ві бігунова $-p_y-$ зачеркує вязку около бігуна P_x прямої p_x, а пряма $-p_x-$ визначує на тій вязці ряд (P_y'), котрий є проективний з рядом (P_y), творячи з ним інволюцийний ряд спряжених бігунів, приналежний до прямої p_x в данім бігуновім системі. Подвійні точки тої інволюциї будуть отже посідати те свійство, що їх бігунові будуть переходити через них самих.

Приймім, що інволюция спряжених бігунів на прямій $-p_x-$ є гіперболїчною, а ві подвійні точки є E і F; то кожда з тих точок є точкою подвійною всїх інволюцийних рядів спряжених бігунів, приналежних до прямих, що переходять через ті точки. З того бачимо, що на кождій прямій (l), переходячій через точку F, находить ся еще одна така Z, через яку переходить его бігунова. Щоби отже визначити місце ґеометричне тих точок, треба-би обертати пряму p_x около ві подвійної точки F і вишукати другі точки подвійні (Z) інволюцийних рядів спряжених бігунів на тих прямих.

Шукані точки Z дадуть ся визначити при помочи слїдуючої конструкциї [рис. 2].

Нехай бігунова p_y точки P_y перетинає пряму p_x в точцї P_y', то точки P_y і P_y' є відповідними точками ряду інволюцийного спряжених точок на прямій p_x, творять отже ґрупу гармонїчну з подвійними точками E і F. Подібно річ має ся на довільній прямій $-l-$, переходячій через точку подвійну F: пряма та перетинає ся з прямою p_y в точцї G, а з бігуновою $P_y\gamma$ тої точки в точцї G_1, котра є гармонїчно спряжена з точкою G, з огляду на точки подвійні F і еще не звісну точку Z. З того слїдує, що точка Z є точкою пересїчи прямої $-l-$ з прямою, що лучить другу точку подвійну E на $-p_x-$ з точкою γ, що є спряжена з точкою G в рядї інволюцийнім на p_y. Однак легко запримітити, що коли пряма $-l-$ обертає ся около точки подвійної F, то точки G визначає ряд (G), проективний з рядом (γ), визначеним точкою γ, бігуново спряженою з G, — пряма отже $E\gamma$ утворить вязку проективну з вязкою (l).

Ті дві проєктивні вязки визначують якраз шукане місце ґеометричне точок Z, котре отже є кривою II-го ст. c^2. Стичні до тої кривої c^2 в точках E, F будуть відповідати в тих вязках прямій, котра лучить їх вершки E і F. Є то отже прямі, що лучать точку P_x прямої p_y, бігуново спряженої зі спільною точкою P_y' прямих p_x і p_y — з точками E і F. А що точка P_x є бігуном прямої — p_x —, проте стичні $P_x E$, $P_x F$ є бігуновими точок E і F в даній бігуновім системі (u). — Отже бігунові системи бігунового (u), переходячі через свої бігуни, є стичними кривої c^2.

З повисшої конструкції слїдує, що трикутник $P_x E F$ є бігуново спряжений не тілько з огляду на даний систем бігуновий (u), але рівнож з огляду на стіжковий переріз c^2. Подібно пряма $P_y \gamma$ є бігуновою точки G, а пряма $P_y G$ є бігуновою точки — γ — так з огляду на даний систем бігуновий, як рівнож з огляду на тойже переріз стіжковий c^2.

З повисших розумовань слїдує відповідь на поставлене питане:

„Місце ґеометричне точок в бігуновім системі плоскім, котрих бігунові переходять через них самих, є крива II-го степ. (c^2), яка є рівночасно обвідня всїх прямих, котрих бігуни лежать на них самих — так, що кожда точка тої кривої і в тій точцї єї стична є зі собою бігуново спряжені в тім-же бігуновім системі. Той отже переріз стіжковий містить точки подвійні всїх рядів інволюцийних спряжених бігунів того бігунового системи, котрі те ряди виступають на загалї прямих его площі, а стичні того перерізa є прямими подвійними всїх вязок інволюцийних спряжених бігунових, приналежних в тім системі до загалу точок его площі. Той стіжковий переріз названо лїнїєю провідною даного бігунового системи, а сей послїдний не є нїчим иньшим — як загалом бігунів і бігунових, визначених з огляду на его лїнїю провідну так, що бігун і бігунова, з огляду на тойже переріз стіжковий, є ними і з огляду на даний бігуновий систем".

4. Повисші розважаня і конструкциї були заложені на тім, що інволюция спряжених бігунів на прямій p_x була ґіперболїчна, о дійсних точках подвійних (E, F). Однаковож не тратять они значіня і тоді, коли інволюция та єсть елїптична, о мнимих точках подвійних.

Взагалї легко є доказати — на основі розличних даних [ст. 14, 15], — потрібних до визначеня бігунового системи плоского (u), що ряди інволюцийні спряжених бігунів на прямих того системи могуть бути:

а) Частию ґіперболїчні, частию елїптичні; такий систем зове ся „ґіперболїчний"; крива провідна є дійсний переріз стіжковий (c^2).

б) Всї еліптичні; такий уклад бігуновий зове ся „еліптичний“; єго провідна є перерізом стіжковим мнимим.

в) Коли оден з двох рядів інволюцийних спряжених бігунів [p_1, p_2 на рис. 2], що служать до визначеня укладу бігунового (u), є параболїчний, примірои p_1, о подвійній точцї P_2, а другий ряд p_2 є гіперболїчний, о точках подвійних E_1, F_1, тоді точка P_2 є бігуном для кождої прямової на площі, і на відворіть, бігунова кождої точки на площі мусять переходити через тую точку P_2. З того слїдує, що вязка інволюцийна прямих, котрої вершок лежить в точцї P_2, а яка є перспективічна з даним інволюцийним рядом на p_2, визначує на кождій прямій приналежний до неї в данім укладї інволюцийний ряд спряжених бігунів.

Крива провідна того бігуновочо системи деґенерує ся на дві прямі, що сполучають точку P_2 з точками подвійними E_1, F_1 інволюцийного ряду на p_2.

Єслиби в повисшім случаю ряд гіперболїчний — p_2 — був заступлений рядом еліптичним, тоді крива провідна такого укладу бігунового булаби заступлена двома прямими мнимими спряженими.

Уклад бігуновий розважаний під в) зове ся „параболїчний“.

Отже дійсно, свійства бігунового плоского системи істнують незалежно від єго кривої провідної; виступають они навіть тоді, коли провідна є мнима.

III.

1. Особлива точка (M) площі бігунового системи (u), котра є бігуном прямої в безконечности, зове ся осередком, а прості, що через єї переходять, промірами тогож системи. Проміри спряжені бігунового системи (u) творять вязку інволюцийну (ст. 14), котрої прямі нормальні є головними осями, а прямі подвійні асимптотами системи. Але з твердженя на сторонї 16 слїдує, що повисші случайности бігунового системи сходять ся з тимиж провідної (c_2), з чого слїдує, що огнища тої кривої, які є вершками інволюцийних вязок нормальних бігунових спряжених, в віднесеню до тої кривої, посїдати мусять анальоґічні свійства для бігунового системи (u). Знані отже твердженя о огнищах перерізу стіжкового c_2 відносять ся і до бігунового системи u [Weyr. Projectivische Geometrie. Thl II, ст. 197].

„Пари прямих до себе нормальних і бігуново зі собою спряжених в системі бігуновім плоскім (u), визначують на головних осях того системи і прямій в безконечности пари точок інволюцийних рядів, котрих подвійні точки є огнищами того системи. Одна пара тих огнищ є завсїгди дійсна, одна мнима, а одна сходить ся з мнимими точками коловими в безконечности".

2. Кожду пряму l, що переходить через точку P бігунового системy u, можна уважати за одну з двох спряжених бігунових до себе нормальних того системy. Лучі l вязки $P(l)$ визначують на головній оси принятого бігунового системy ряд точок (L), котрий є проєктивний з рядом $(L\infty)$, після якого перетинає пряма в безконечности вязку $P(l)$ обернену о кут 90 степенів.

Коли (L') буде означати ряд точок, що відповідають точкам (L) в інволюцийнім ряді, котрого точки подвійні є огнищами на оси головній системy u, натоді нормальні (l'), вичеркнені з точок (L') до лучів вязки $P(l)$, є бігуново спряжені з тими прямими (l). А що ряди (L) і (L') є, як звісно, проєктивні, проте проєктивні є рівнож ряди $(L\infty)$ і (L'); отже прямі, що лучать їх відповідні точки, обвивають параболю. Параболя та, як легко запримітити, дотикає обох головних осий бігунового системy і має за провідну пряму, що лучить дану точку P з осередком M даного бігунового системy. Отже:

„Прямі (l'), бігуново спряжені в плоскім бігуновім системі з прямими (l), що переходять через сталу точку P, і до них нормальні, — обвивають параболю (p^2), котра має пряму PM, що лучить дані точки з осередком системy, за провідну і дотикає своїм обводом головних осий того системy і нормальних інволюцийної вязки бігунових спряжених, приналежної до тої точки P в данім системі. Кождій отже точцї (P) бігунового системy — u — відповідає певна означена параболя (p^2). Єсли однак точка P порушає ся по прямій l_0, тодї параболя p^2 — перебігає ряд параболь, вписаних в спільний чотиробік, котрий творять: дві головні оси бігунового системy, пряма в безконечности і пряма до даної l_0 нормальна і з нею бігуново спряжена. Провідні всїх тих параболь переходять через осередок даного бігунового системy".

А що ряд (L') є проєктивний з рядом (L), проте мусить він бути рівнож проєктивний з вязкою $P(l)$; з того слїдує, що вязка (l') стичних до параболї p^2 є проєктивна з вязкою $P(l)$. Звісно однак, що такі дві вязки визначають криву III. степеня (c^3), для котрої точка P є точкою подвійною. [Weyr. Theorie der mehrdeutigen geometr. Elementargebilde....]. Отже:

„Прямі (l'), бігуново спряжені з прямими (l), що переходять через сталу точку P, і до них нормальні, перетинають ся з ними в точках кривої III-го степеня c^3, для котрої точка P є точкою подвійною, а нормальні інволюцийної вязки бігунових спряжених, приналежної до тої точки в данім бігуновім системі, є стичними тої кривої (c^3) в точції P^{α}.

Однак на основі попередних розумовань нетрудно запримітити, що:

„Крива та c^3 переходить через: огнища даного бігунового систему, точки мнимі колові в безконечности, безконечно далеку точку прямої PM, основи нормальних, вичеркнених з точки P до головних осий систему, врешті через точки подвійні інволюцийного ряду спряжених бігунів, що лежать на бігуновій точки P. Колиби точка P лежала на одній з головних осий систему, тоді крива c^3 складалаби ся з тої оси і кола, зачеркненого на промірі, ограниченім точкою P і точкою P', спряженою з P в інволюцийнім ряді, визначаючім огнища систему на тій оси. Колиби однак точка P була в безконечности, то крива c^3 складалаби ся з прямої в безконечности і рівнобічної гіперболї“.

3. При помочи повисшої кривої c^3 буде можна легко означити клясу кривої, котру обвивають нормальні лучі інволюцийних вязок спряжених бігунових плоского бігунового системи, що їх вершки лежать на певній прямій $- p -$. Іменно пряма $- p -$ перетинає криву III-го ст. c^3, належачу в тім системі до точки P, взагалї в трох точках, котрі посїдають то свійство, що прямі, що лучать їх з точкою P, є осями трох інволюцийних вязок спряжених бігунових, приналежачих до тих точок в тім бігуновім системі. З того отже бачимо, що до шуканої кривої буде можна попровадити з довільної точки що найбільше три стичні, та отже крива є третої кляси. Звідси слідують твердженя:

„Нормальні лучі інволюцийних бігунових спряжених плоского бігунового системи, котрих вершки лежать на тій самій прямій $- p -$, обвивають криву третої кляси (c_3), що стикає ся з прямою $- p -$ в точції, в котрій перетинає єї пряма з нею бігуново спряжена і до неї нормальна“.

Легко однак запримітити, що:

„Крива та стикає ся: з головними осями бігунового системи, з прямими, начеркненими нормально до тих осий в точках, в котрих їх дана пряма (p) перетинає, а крім того з прямою в безконечности. Єсли пряма $- p -$ переходить через одно з огнищ даного системи, тодї крива c_3 складає ся з того огнища і параболї, що має за своє огнище друге огнище бігунового системи на тій самій оси, а за провідну пряму $- p -$“.

4. Розумованя отсего розділу (III.) основують ся на інволюцийних рядах бігунового системи на єго головних осях і прямій в без-

конечности, яких точки подвійні були огнищами того системy (ст. 17). Однак, як легко доказати, самі огнища не визначують докладно бігунового системy, і взагалї істнує безконечно богато бігунових системів плоских, що посїдають ті самі огнища. Криві провідні тих системів творять ряд стіжкових перерізів співогнищевих. З того заключаємо, що:

„Всї інволюцийні вязки спряжених бігунових, приналежні до довільної точки P у всїх бігунових системах співогнищевих, посїдають спільні лучі нормальні. Ті отже системи посїдають: спільну параболю p^2 і криву III-го ст. c^3, які відповідають тій точцї P, подібно криву кляси третої c_3, що відповідає довільній прямій — p —".

О бігуновім дуалїзмі в снопі.

1. Засади бігунового дуалїзму, виказані в попередних роздїлах для плоского системy, дадуть ся відразу перенести на сніп, уважаючи его за перспективу того системy з довільної точки в просторі.

Коли отже зроблю мет плоскої фіґури на рис. 1 з довільної точки W, що лежить коло еї площі, тодї крива другого степеня c^2 буде кинена стіжком $W(c^2)$, кожда точка P лучем WP, а кожда пряма — p — площею діяметральною Wp того стіжка; стичні отже a, b кривої c^2 будуть заступлені площами Wa, Wb стичними до стіжка $W(c^2)$.

В виду того з твердженя на стор. 4 слїдує твердженє для поверхнї стіжкової II-го степеня:

„Коли діяметральна площа $W(CD)$ стіжкової поверхнї $W(c^2)$ II-го ст. обертає ся около сталого, на нїй лежачого проміра WP, тодї промір WV, гармонїчно спряжений з проміром WP, з огляду на творячі стіжка WC, WD, після котрих та площа перетинає даний стіжок, лежить на однїй і тій самій площі діяметральній Wp".

Площу Wp названо „площею бігуновою" проміру WP, з огляду на поверхню стіжкову II-го ст. $W(c^2)$; лучить она, як легко запримітити, творячі стичности площ стичних, поведених через промір WP до тої стіжкової поверхнї.

І на відворіть, з твердженя на ст. 4, 5 слїдує:

„Коли пряма пересїчи пари площ стичних (Wc, Wd) поверхнї стіжкової II-го ст. $W(c^2)$ порушає ся по сталій площі діяметральній Wv, гармонїчно спряженій з площею Wp, з огляду на площі стичні Wc, Wd, натоді площа WP переходить завсїди через оден і той самий промір WP".

Промір WP названо „проміром бігуновим“ площі-Wp, з огляду на стіжок $W(c^2)$; є він прямою пересічи площ стичних того стіжка вздовж творячих, після котрих его перетинає площа Wp

Загал тих промірів і площ діяметральних стіжкової поверхні II-го ст., спряжених зі собою в повисшій спосіб, зове ся „снопом бігуновим“ тої поверхні, для котрого та послїдна є „провідною“.

З розумовань в розділї II. поміщених бачимо, що стіжок провідний снопа бігунового може бути дійсний, мнимий або здеґенерований до двох площ дійсних або мнимих.

2. З тверджень о вязках, які заходять між елементами і творами I-го степеня плоского бігунового системy, легко буде здогадатись відповідних тверджень між елементами і творами I-го степеня бігунового снопа (W). І так з твердженя на стороні 5 (або 14) читаємо прямо:

„Єсли площа Wq снопа бігунового W, обертаючи ся около сталого, на нїй лежачого проміру WP, описує вязку площ, тодї промір WQ, бігуново спряжений з тою площею в данім снопі, описує на площі Wp бігуновій проміру WP — вязку лучів, проективну з тою вязкою площ“.

Називаючи відтак в снопі бігуновім W „промірами бігуново спряженими“ такі два проміри, що посїдають те свійство, що площа бігунова одного з них переходить через другий, а „площами діяметральними бігуново спряженими“ такі дві площі діяметральні, з котрих одна з них переходить через промір спряжений з другою, з тверджень на стороні 5, 6 (або 14) слїдують твердженя:

„Пари промірів бігуново спряжених в бігуновім снопі W, лежачі на тій самій площі, творять інволюцийну вязку, для котрої творячі пересічи тої площі з провідним стіжком $W(c^2)$ того снопа є лучами подвійними. Та інволюция є отже гіперболїчна або еліптична, залежно від того, чи площа дана перерізує провідний стіжок після двох творячих дійсних, є до него стичною або цілком его не перерізує.

І взаїмно:

„Пари діяметральних площ бігуново спряжених в снопі бігуновім W—, а переходячі через той самий промір, творять вязку інволюцийну, для котрої стичні площі, поведені через той промір до провідного стіжка того снопа, є подвійними площами. Та інволюция є отже гіперболїчна, параболїчна або еліптична, залежить від сего, чи той промір лежить на вні, на поверхни або в нутрі того провідного стіжка“.

Однаковож легко запримітити, що:

„Вязка інволюцийна діяметральних площ бігуново спряжених в бігуновім снопі W, — що переходять через той сам промір, є перспективічна з вязкою інволюцийною бігуново спряжених промірів, що лежать на діяметральній площі, бігуново спряженій з тим проміром".

Три проміри бігунового снопа W, які посідають те свійство, що площа бігунова одного з них переходить через дві дальші, зовуть ся „трійкою бігуново спряжених промірів" того снопа; подібно три площі діяметральні того снопа, які посідають свійство, що промір бігуново спряжений з одною з них є прямою пересїчи двох иньших, зовуть ся „трійкою площ діяметральних бігуново спряжених" того снопа. — В виду того повисші твердженя дадуть ся слїдуючо висказати:

„Кождий промір бігунового снопа W є спільний для безконечного множества трійок бігуново спряжених промірів того снопа; що два дальші проміри тих трійок лежать на площі бігуновій проміра і творять інволюцию".

І взаїмно:

„Кожда площа діяметральна бігунового снопа W є спільною для безконечного множества трійок площ діяметральних бігуново спряжених в тім снопі; що дві дальші площі тих трійок переходять через промір бігуново спряжений з тою площею і творять вязку інволюцийну".

Увага: Легко є доказати, що поміж безконечним множеством трійок бігуново спряжених промірів в певнім снопі бігуновім W є взагалї: або тілько одна нормальна або всї ті трійки є нормальні. В тім другім случаю названо бігуновий сніп „ортоґональним"; повстає він, коли з кождим проміром кулї спряжемо его площу діяметральну, нормальну до сего проміру. Стіжок асимптотичний кулї є стіжком провідним того снопа, що его площа в безконечности перетинає після систему бігунового плоского, для котрого кривою провідною є мниме коло в безконечности.

3. Повисші получення між елементами і творами I го степеня бігунового снопа — становлять основне свійство „закона бігунового дуалїзму того снопа".

Після того закона відповідає кождому промірови снопа з ним бігуново спряжена площа діяметральна, і взаїмно; вязцї промірів відповідає з ним проєктивна вязка площ діяметральних. Творови (u), зложеному з промірів і площ діяметральних того снопа відпо-

відає иньший твір (u_1), зложений з площ діяметральних і промірів того снопа — при чім:

„Кождому твердженю, кождій дефініциї, конструкциї або задачі, в яких говорить ся о сполученях або свійствах метових між елементами твору — *u* —, відповідає иньше твердженє, иньша дефініция, конструкция або задача о сполученях метових між елементами твору u_1, — які слїдують з перших, коли замінимо взаїмно поняття: промір і площа діяметральна; дїланє: перетинати і лучити, лишаючи однак *ненарушенними поняття: перспективічного положеня* і відношеня подвійного подїлу“.

B. KALICUN: Über das Gesetz der polaren Dualität in der Geometrie. I. Teil.

In dieser Abhandlung entwickelt der Verfasser das Gesetz des polaren Dualismus in der Ebene und im Bündel. Nach einer kurzen historischen Einleitung stellt er im I. Abschnitte die Abhängigkeit der projektivischen Eigenschaften der geometrischen Gebilde in der Ebene von einander vor, indem er diese Gebilde polarisch in Bezug auf einen Kegelschnitt verbindet, und weist nach, daß der polare Dualismus eine allgemeine Transformationsmethode der projektivischen Eigenschaften ist. Am Ende dieses Abschnittes benutzt er diese Methode zur Transformation einiger metrischen Eigenschaften der ebenen Gebilde, indem er zur Leitlinie einen Kreis bzw. eine Parabel annimmt. Im II. und III. Abschnitte zeigt der Verfasser daß das Gesetz des polaren Dualismus unabhängig von dem Leitkegelschnitte existirt.

Das Gesetz des polaren Dualismus im Bündel wird direkt von demselben in der Ebene ausgeführt, weil das Bündel als eine Projektion des ebenen Systems aus einem beliebigen Punkte des Raumes angesehen werden kann.