Повна лїнїйна ґрупа є перемінна з аритметичною. З того виходить, що аритметична ґрупа є визначною підґрупою повної лїнїйної.

Повна лїнїйна ґрупа степеня p^2 складаєть ся з двох родів субституцій:

$$\left.\begin{array}{l} g = \left| h\,k \quad h+\alpha,\ k+\beta \right|, \\ t = \left| h,k \quad ah+bk,\ ch+dk \right| \end{array}\right\} (\text{mod. } p). \quad (19)$$

Та ґрупа містить в собі як підґрупу т. зв. метациклїчну ґрупу степеня p^2, якою займемо ся в дальшій части нашої працї.

Друга частина.

Теорія рівнань.

VI. Альґебраічні рівнаня.

§. 47. **Альґебраічне рівнанє називаємо рішимим** (auflösbar), **коли його можна розвязати в альґебраічнім змислї, т. є представити його корінї як альґебраічні функції сочинників. Що розвязка рівнаня істнує все, виходить з основного твердженя альґебри, яке каже, що кожде рівнанє, якого сочинники є дїйсними або сполученими числами, має один корінь з обсягу дїйсних або сполучених чисел, а тим самим як раз стільки коріню́в, кілько одиниць є в степеню рівнаня***).

Помимо того не вміємо розвязати кождого даного рівнаня в альґебраічнім значіню; можемо радше сказати, що рішимі рівнаня є виїмками з поміж усїх, які-б ми могли утворити зі всїх можливих дїйсних і злучених чисел.

Теорія ґруп дає спромогу вибирати з поміж всїх рівнань рішимі.

---

*) Доказ основного твердженя альґебри не належить сюди, тільки до теорії функцій. Гл. нпр. Gauss, Vier Beweise für die Zerlegung ganzer alg. Funktionen in reelle Faktoren ersten und zweiten Grades. Ostwald's Klassiker der exakt. Wiss. Leipzig, 1898.

§. 48. Нехай буде дане альґебраічне рівнане n-того степеня

$$f(x)=0; \tag{1}$$

коли воно має корінь α, тоді є воно подільне через $x-\alpha$, а квот того діленя є новим рівнанєм, але вже степеня $n-1$.

Коли корінь рівнаня (1) α є вимірним числом, рівнанє називає ся **зведимим** (reduktibel); в противнім разї є рівнанє **незведиме** (irreduktibel). Незведимого рівнаня не можна розложити на чинники першого степеня з вимірними сочинниками.

Загал всїх вимірних чисел називаємо **природним обсягом вимірности** (natürlicher Rationalitätsbereich; Kronecker). Той загал має таку характеристичну прикмету, що чотири головні операції, виконувані на числах з того обсягу, дають опять вимірні числа на вислїд. Таку систему чисел, якої елєменти не змінюють ся (т. є не виходять поза межі системи) через чотири головні операції, називаємо **тїлом** (Körper; Dedekind).

Коли до обсягу вимірности доберемо якесь число з поза нього, нпр. невимірне або мниме, одержимо новий обсяг; в тім обсягу мусять приходити всї комбінації того долученого числа з числами первісного обсягу. Таку операцію називаємо **долучуванєм природних невимірностий** (Adjunktion natürlicher Irrationalitäten), а нове тїло називаємо **розширеним обсягом вимірности** (erweiterter R.) або **розширеним тїлом**. Функції, яких сочинники належать до даного тїла, називають ся **функціями того тїла** (обсягу) або **функціями в тім тїлї** (обсягу) (Funktionen im Körper).

Функцію називаємо **незведимою в данім обсягу**, коли вона не має дїльника в видї функції того обсягу. В тім самім значіню говоримо і про незведимість рівнань.

Незведиме рівнанє стає зведимим, коли розширимо первісний обсяг долученєм відповідної невимірности. Нпр. квадратне рівнанє

$$x^2-2x-2=0$$

є в природнім обсягу вимірности — будемо його називати стало обсягом (R) аботїлом (R) — незведиме; зате стає воно зведиме, коли до (R) долучимо невимірне число $\sqrt{3}$; бо тодї є:

$$x_1=1+\sqrt{3},\ x_2=1-\sqrt{3},$$

отже наше рівнанє є подільне через $x-x_1$ і $x-x_2$.

Розширений обсяг (R) значимо так, що в скобку замикаємо також долучену невимірність, (R,ω); в нашім примірі буде $(R,\sqrt{3})$.

З тої точки погляду бачимо, що розвязка рівнань буде полягати на відповіднім розширюваню обсягу вимірности; через те буде ставати рівнане зведиме, і ми одержимо дільники того рівнаня, $x - a$, обнижуючи рівночасно його степень.

§. 49. Щоби дійти до примінення теорії ґруп до альґебраічних рівнань, мусимо перше здати собі справу з того, який вплив мають субституції на рівнаня.

Утворім функцію Galois з корінів даного рівнаня (1); те рівнане не підлягає ніяким иншим обмеженям, тільки що воно не може мати многократних корінів. В такім разї ґрупа функції Galois даного рівнаня буде ідентична, а сама та функція матиме $n!$ вартостий. В приміненю до рівнань називаєть ся функція

$$\xi = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \quad . + a_n x_n \tag{2}$$

ресольвентою Galois, а рівнане $n!$-того степеня, утворене з неозначеної величини ξ і всїх вартостий ресольвент (2)

$$F(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \qquad (\xi - \xi_n) = 0 \tag{3}$$

рівнанем ресольвенти. Знаючи один корінь рівняня (3), можемо знайти всї инші, бо всї вони мають ту саму ґрупу, т. є 1. Отже наш проблем, розвязати рівнане n-того степеня, т. є знайти **всї** n корінів, заступаємо иншим, а саме, знайти **один** корінь рівнаня степеня $n!$.

§. 50. Рівнане (1) вважаємо **загальним**, коли його корінї і сочинники є зовсїм від себе независимі. Приймім тепер, що між корінями даного рівнаня є якась звязь; нпр. вже корінї рівнаня (3) не є независимі, тільки підлягають звязи (2). Таке рівнане називаємо **специяльним**. Отже корінї специяльного рівнаня є все ще звязані з собою якоюсь реляцією

$$\Phi(x_1, x_2, \quad ., x_n) = 0 \tag{4}$$

або

$$\Phi(x_1, x_2, \quad ., x_n) = c; \tag{4'}$$

чи дана реляція Φ лучить сочинники рівнаня, чи його корінї, се виходить на одно*). Коли даних більше таких реляцій, тодї методою неозначених сочинників можна їх замінити в одно одиноке рівнане:

$$\Phi = \Phi_1 a + \Phi_2 \beta + \qquad = 0.$$

Кожду з реляцій (4) або (4') можна заступити иншою функцією з того самого ґатунку, бо тодї можна ті дві реляції виражу-

*) Netto, Substitutionentheorie, стр. 161—164.

вати взаїмно одну другою. В такім разї кажемо, що ми **долучили до рівнаня** (1) **ґатунок функції** (4). До того самого результату дійдемо, коли замість ґатунку функцій введемо ґрупу тої функції. Ґрупа функції Φ називаєть ся **ґрупою даного рівнаня**.

Нпр. в рівнаню четвертого степеня:

$$x^4 + ax^2 + b = 0,$$

якого корінї є x_1, x_2, x_3, x_4, маємо таку зависимість між корінями: $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, отже

$$\Phi_1 = x_1 + x_2 = 0, \quad \Phi_2 = x_3 + x_4 = 0.$$

Ґрупа першої функції є:

$$G_1 = [1, (12), (34), (12)(34)];$$

добираючи субституцію

$$\sigma = (13)(24)$$

одержуємо ґрупу $G = G_1\sigma$ осьмого порядку, яка рівно-ж не змінить вартости тої функції. Отже ґрупа

$$G = [1, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (1423), (1342), (14)(23)]$$

є ґрупою нашого рівнаня.

§. 51. **I. Тверджене.** **Коли дане рівнанє $f(x) = 0$, якого корінї є всї ріжні, а сочинники є числами з тїла (R), то все можна знайти таку ґрупу, що кожда функція корінїв рівнаня, яка позволяє на ту ґрупу, дасть ся виразити вимірно знаними величинами, — і навпаки, що кожда функція корінїв, яку можна виразити знаними величинами, позволяє на ту ґрупу***).

Доказ. Рівнанє ресольвенти (3) є симетричною функцією корінїв рівнаня (1). Розложім його на чинники, які є в тїлї (R) незведимі, нехай отже буде:

$$F(\xi) = F_1(\xi) F_2(\xi)$$

приймім, що

$$F_1(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \qquad (\xi - \xi_\nu).$$

Коли субституції $s_1 = 1, s_2, s_3, \quad ., s_\nu$ переводять в себе величини $\xi_1, \xi_2, \quad ., \xi_\nu$, то ґрупа G, зложена з тих субституцій незмінить величини $F_1(\xi)$.

---

*) Serret, Cours d' Algèbre, Paris 1885, II. стр. 639. — Vogt, Leçons etc. стр. 76.

Кожду функцію корінїв, незмінну для ґрупи G, **можемо** виразити вимірно при помочи ресольвенти Galois ξ_1

$$\varphi_1\ (x_1,\ x_2, \quad\ldots,\ x_n) = \psi(\xi_1).$$

Виконуючи в тім рівнаню субституції ґрупи G, не змінимо лївої сторони, а права перейде чергою в

$$\psi(\xi_2),\ \psi(\xi_2), \qquad \psi(\xi_\nu)$$

отже будемо мати

$$\varphi_1 = \psi(\xi_1) = \psi(\xi_2) = \qquad = \psi(\xi_\nu)$$

або

$$\varphi_1 = \frac{1}{\nu}\left[\psi(\xi_1) + \psi(\xi_2) + \qquad + \psi(\xi_\nu)\right]. \tag{5}$$

Сума в гранчастій скобцї є симетрична в величинах $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$, отже можна її представити вимірно при помочи $F_1(\xi)$. Звідси виходить, що φ_1 має вимірну вартість в обсягу (R).

Навпаки, коли φ_1 можна представити величинами обсягу (R) то та функція позволяє на ґрупу G. Нехай буде

$$\varphi_1\ (x_1,\ x_2, \quad\ldots,\ x_r) = \chi(R),$$

отже вимірна функція величини обсягу R; представмо її ліву сторону як функцію ресольвенти Galois. Коли

$$\varphi_1 = \psi(\xi_1),$$

то і

$$\psi(\xi_1) = \chi(R).$$

Коли те рівнанє має один корінь рівнаня $F_1(\xi)$, то воно мусить бути справджене і для всїх инших корінів того рівнаня, отже

$$\psi(\xi_i) = \chi(R) = \varphi_1.$$

Звідси бачимо, що функція φ_1 не змінюєть ся, коли ξ_1 заступимо иншими вартостями: $\xi_2,\ \xi_3, \qquad \xi_\nu$, отже ґрупа G не має на неї впливу.

Ґрупу G називаємо ґрупою рівнаня (1).

§. 52. **II. Твердженє.** Ґрупа незведимого рівнаня є перехідна, і навпаки: рівнанє, яке має перехідну ґрупу, є незведиме.

Доказ. Приймім, що ґрупа G рівнаня (1) є неперехідна; нехай вона переводить в себе $x_1,\ x_2 \qquad x_\nu$, тодї функція

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \qquad (x - x_\nu)$$

є незмінна для G. φ належить до ґатунку ґрупи G або до низшого ґа-

тунку, отже кождим разом дасть ся представити вимірно. Тоді є $\varphi(x)=0$ дільником функції $f(x)=0$.

Коли $f(x)$ є зведиме, тоді можемо знайти таке $\varphi(x)$, про яке була бесіда. G не може тоді мати ні одної такої субституції, яка переводила би x_1 в $x_{\nu+1}$, бо тоді звісна функція $\varphi(x)$ не була би незмінна для всіх субституцій з G; отже G мусіло би бути неперехідною ґрупою.

З того слідує, що незведимість рівнаня і перехідність ґрупи є рівнозначні поняття.

§. 53. **Перейдім тепер до рівнань чотирох низших степенів, звертаючи увагу на те, що інтересне зі становиска теорії ґруп. Тому то будемо вишукувати дво-, три- і чотиро-вартісні функції і представляти їх вимірно при помочи знаних величин; до тої цїли послужить нам розслїджуванє ґруп даних рівнань.**

Квадратне рівнанє

$$x^2 - c_1 x + c_2 = 0 \qquad (6)$$

є все загальне, хиба що наложимо йому умову:

$$x_1 + x_2 = c_1 = 0;$$

тоді рівнанє стає спеціяльне. Знані величини в тім рівнаню є c_1 і c_2, основні симетричні функції корінїв. При їх помочи можна виразити кожду функцію корінів, отже передовсїм квадрат їх діскріміванти:

$$\varDelta = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = c_1^2 - 4c_2;$$

се є, як видко, симетрична функція корінїв. Квадратний корінь з неї:

$$\sqrt{\varDelta} = \sqrt{c_1^2 - 4c_2}$$

є двовартнісний, але вже знаний в величинах c_1 і c_2.

Возьмім тепер яку небудь лінїйну функцію корінїв

$$\varphi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

яку можемо написати також так:

$$\varphi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}(x_1 + x_2) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}(x_1 - x_2),$$

отже

$$\varphi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} c_1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \sqrt{c_1^2 - 4c_2}$$

Специяльно маємо для:

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0:\ \varphi_1 = x_1 = \frac{c_1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{c_1^2 - 4c_2};$$

$$\beta_1 = 0,\ \alpha_2 = 1:\ \varphi_2 = x_2 = \frac{c_1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{c_1^2 - 4c_2}.$$

Таким чином виразили ми корінї рівнаня знаними величинами.

Ґрупа квадратного рівнаня є $g = [1,\ (12)]$; вона змінить тільки вартість коріня з діскріміванти $\sqrt{\Delta}$.

§. 54. Маючи кубічне рівнанє

$$x^3 - c_1 x^2 + c_2 x - c_3 = 0, \qquad (7)$$

знаємо передовсїм основні симетричні функциї корінїв, c_1, c_2 і c_3, а далї двовартісну функцію, якої квадрат є симетричний, т. є

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2.$$

Представляючи її симетричними функціями, одержуємо звісний результат:

$$\Delta = -(c_2^3 + 27c_3^2) + 18c_1c_2c_3 + c_1^2c_2^2 - 4c_1^3c_3; \qquad (8)$$

квадратний корінь того вираженя, $\sqrt{\Delta} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$, є альтернуючою функцією. До тої функції належить альтернуюча ґрупа 3-го степеня:

$$G = [1,\ (123),\ (132)].$$

Ресольвента Galois має три вартости для субституції тої ґрупи; отже є вона корінем кубічного рівнаня, якого сочинники є двовартісними функціями. Щоби те друге кубічне рівнанє було о скільки мога найпростїйше, приймаємо за ресольвенту Galois функцію

$$\xi_1 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3, \qquad (9)$$

де ω є третім коренем з одиниції (се т. зв. ресольвента Lagrange'a). Альтернуюча ґрупа переводить її в ξ_1, $\omega^2\xi_1$, $\omega\xi_1$; третя степень з (9) є проте незмінна для альтернуючої ґрупи; знаючи, що

$$\omega = \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$

маємо

$$\xi_1^3 = \tfrac{1}{2}(+2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3 + 3i\sqrt{3\Delta})$$

або

$$\xi_1^3 = \tfrac{1}{2}(S_1 + 3\sqrt{-3\Delta}).$$

Змінюючи знак при $\sqrt{-3\varDelta}$, одержимо $\xi_2 = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3$, і

$$\xi_2{}^3 = \tfrac{1}{2}(S_1 - 3\sqrt{-3\varDelta}).$$

Таким чином маємо:

$$\xi_1 = x_1 + \omega x^2 + \omega^2 x_3 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 + 3\sqrt{-3\varDelta})},$$

$$\xi_2 = x_1 + \omega^2 x_3 + \omega x_3 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 - 3\sqrt{-3\varDelta})},$$

а добираючи ще до того знану реляцію

$$\xi_0 = x_1 + x_2 + x_3 = c_1,$$

маємо:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{3}\Big[c_1 + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 + 3\sqrt{-3\varDelta})} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 - 3\sqrt{-3\varDelta})}\Big],\\
x_2 &= \tfrac{1}{3}\Big[c_1 + \omega^2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 + 3\sqrt{-3\varDelta})} + \omega\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 - 3\sqrt{-3\varDelta})}\Big],\\
x_3 &= \tfrac{1}{3}\Big[c_1 + \omega\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 + 3\sqrt{-3\varDelta})} + \omega^2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 - 3\sqrt{-3\varDelta})}\Big].
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Се т. зв. метода Lagrange'a.

§. 55. Звичайно уживаємо иншої дороги, а то тому, що обчислюванє величини $\sqrt{-3\varDelta}$ є доволї невигідне. Найбільше знана метода Hudde'a*) веде до т. зв. Карданськоï формулки.

Передовсім мусимо увільнити ся від квадратного члена при помочи підставленя

$$x = y + \tfrac{1}{3}c_1;$$

те поведе нас до рівнаня

$$y^3 - Ay - B = 0, \qquad (11)$$

де

$$A = \tfrac{1}{3}c_1{}^2 - c_2,$$
$$B = \tfrac{2}{27}c_1{}^3 - \tfrac{1}{3}c_1 c_2 + c_3.$$

*) Serret, Algèbre II. стр. 493.

Кладучи

$$y = \alpha + \beta$$

визначуємо ті дві нові незвісні з рівнань

$$\alpha^3 + \beta^3 = B,$$

$$\alpha\beta = \frac{A}{3},$$

або:

$$\beta = \frac{A}{3\alpha}, \quad \alpha^6 - B\alpha^3 + \frac{A^3}{27} = 0. \tag{12}$$

Се рівнане є шестого степеня; коли його корінем буде α_1, то прочі пять коріпїв будуть: $\omega\alpha_1$, $\omega^2\alpha_1$; β_1, $\omega\beta_1$, $\omega^2\beta_1$, де $\beta_1 = \frac{A}{3\alpha_1}$.

Переходячи до даного рівнаня, одержимо:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}[c_1 + 3(\alpha_1 + \beta_1)] \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}[c_1 + 3(\omega^2\alpha_1 + \omega\beta_1)], \\ x_3 &= \tfrac{1}{3}[c_1 + 3(\omega\alpha_1 + \omega^2\beta_1)]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Тепер можемо переконати ся, що

$$x_1 + x_2 + x_3 = c_1,$$

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = 3\alpha_1$$

$$x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = 3\alpha_2,$$

т. зн., що $\xi_1 = 3\alpha_1$, $\xi_2 = 3\alpha_2$, отже обі розвязки є ідентичні. — Згадану формулу **Кардана** одержимо, розвязуючи (12) для α і β:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}},$$

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{B}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}},$$

$$x_1 = \tfrac{1}{3}\left[c_1 + 3\sqrt[3]{B + \sqrt{B^2 - 4\left(\frac{A}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{B - \sqrt{B^2 - 4\left(\frac{A}{3}\right)^3}}\right];$$

порівнуючи те вираженє з

$$\xi_1{}^3 = \tfrac{1}{2}(S_1 + 3\sqrt{-3\Delta}),$$

переконаємо ся рівно-ж, що $S_1 = 27B$, а

$$3\sqrt{-3\Delta} = 27\sqrt{B^2 - 4\left(\frac{A}{3}\right)^3}$$

§. 56. Маючи рівнане четвертого степеня

$$f(x) = x^4 - c_1x^3 + c_2x^2 - c_3x + c_4 = 0, \qquad (14)$$

знаємо передовсїм основні симетричні функції його коренів, а діскрімінанту можемо легко обчислити. Розглядьмо ся тепер в ріжних ґрупах четвертого степеня і добираймо до них відповідні функції. До тої цїли ужиймо означень з §. 30.

Наше рівнане є загальне, отже його ґрупа є симетрична G, порядку 24.

Ґрупою діскрімінанти є альтернуюча ґрупа H порядку 12.

З симетричної ґрупи G можемо ще утворити три спряжені ґрупи Γ_1, Γ_2, Γ_3 порядку 8 (§. 32): ґрупу

$$\Gamma_1 = [1,\ (12),\ (34),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)],$$

яка не змінює функції

$$\varphi_1 = x_1x_2 + x_3x_4;$$

трансформуючи її транспозицією (23) одержуємо ґрупу

$$\Gamma_2 = [1,\ (13),\ (24),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)],$$

належну до функції

$$\varphi_2 = x_1x_3 + x_2x_4,$$

а через трансформацію (24) доходимо до

$$\Gamma_3 = [1,\ (14),\ (23),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)]$$

з функцією

$$\varphi_3 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

Ті три ґрупи є підґрупами симетричної, а не альтернуючої; тому то не можна функціями φ виразити квадратного кореня діскрімінанти.

Перекрій тих трьох ґруп дає ґрупу порядку 4:

$$K = [1,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)],$$

якої функцію одержимо, комбінуючи всї три φ:

$$z_1 = \varphi_1 + \omega\varphi_2 + \omega^2\varphi_3 \quad \left(\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right), \qquad (15)$$

Третя степень тої функції є двовартісна, і її можна представити при помочи $\sqrt{\Delta}$.

Кожда з груп Γ містить в собі ще підгрупу порядку 4:

$$J_1 = [1,\ (12),\ (34),\ (12)(34)],$$
$$J_2 = [1,\ (13),\ (24),\ (13)(24)],$$
$$J_3 = [1,\ (14)\ (23),\ (14)(23)];$$

Їх функції є:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \\ g_2 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \\ g_3 &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Крім того маємо ще чотири циклічні групи порядку 4

$$C_1 = [1,\ (1324),\ (12)(34),\ (1423)],$$
$$C_2 = [1,\ (1234),\ (13)(24),\ (1432)];$$
$$C_3 = [1,\ (1243),\ (14)(23),\ (1342)];$$

їх функції є очивидно теж циклічні. До C_1 належить

$$\xi = (x_1 + \varepsilon x_3 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_4)^4,$$

де ε є корінем двочленного рівнаня четвертого степеня, т. є $\pm i$. Приймаючи раз $\varepsilon = i$, другий раз $\varepsilon = -i$, маємо:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= [(x_1 - x_2) + i(x_3 - x_4)]^4, \\ \xi_1' &= [(x_1 - x_2) - i(x_3 - x_4)]^4; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

до C_2 і C_3 належать:

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= [(x_1 - x_3) + i(x_2 - x_4)]^4, \\ \xi_2' &= [(x_1 - x_3) - i(x_2 - x_4)]^4, \end{aligned}\ \right| \ \left.\begin{aligned} \xi_3 &= [(x_1 - x_4) + i(x_2 - x_3)]^4, \\ \xi_3' &= [(x_1 - x_4) - i(x_2 - x_3)]^4. \end{aligned}\right\} \tag{17'}$$

Приходимо тепер до груп другого порядку:

$$L_1 = [1,\ (12)(34)],\ L_2 = [1,\ (13)(24)],\ L_3 = [1,\ (14)(23)];$$

ті групи є квадратами субституцій з груп C; до них належать функції, які є квадратними корінями функцій ξ.

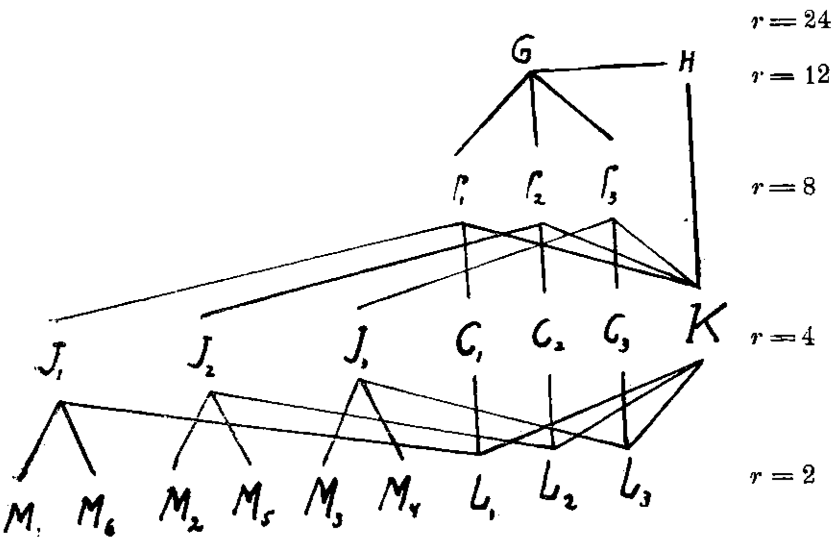
Крім L маємо ще инші групи другого порядку:

$$M_1 = [1,\ (12)],\ M_2 = [1,\ (13)],\ M_3 = [1,\ (14)],\ M_4 = [1,\ (23)],$$
$$M_5 = [1,\ (24)],\ M_6 = [1,\ (34)];$$

до них можемо дібрати такі функції, як

$$u_1(x_1 + x_2) + u_2 x_3 + u_3 x_4.$$

В тім розслідї не увгляднили ми підґруп шестого порядку, які є неперехідні, бо змінюють тільки три елементи. — Підґрупи симетричної ґрупи G можемо представити такою таблицею:



§. 57. Після тої таблиці укладаємо розвязку нашого рівнаня. Метода Lagrange'а вимагає, щоби шукати функцій, які належать до ґруп Γ_1, Γ_2, Γ_3. Ті функції є корінями кубічного рівнаня

$$\varphi^3 - c_2\varphi^2 + (c_1 c_3 - 4c_4)\varphi - (c_1{}^2 c_4 - 4c_2 c_4 + c_3{}^2) = 0 \qquad (18)$$

(гл. §. 37). Знаючи один з них, можемо обчислити функції, належні до ґрупи J_1, J_2, J_3, бо ті ґрупи є визначними підґрупами для Γ_1, Γ_2, Γ_3; до тої цїли треба тільки розвязати одно квадратне рівнанє. Потім можемо представляти кождий ґатунок функцій одною з поміж них.

Нпр. функція $t_1 = x_1 + x_2$, що належить до J_1, переходить через Γ_1 в $t = x_3 + x_4$, отже t_1 і t_2 є корінями квадратного рівнаня

$$t^2 - c_1 t + (\varphi_2 + \varphi_3) = 0,$$

а що $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = c_2$, то $\varphi_2 + \varphi_3 = c_2 - \varphi_1$, отже

$$t^2 - c_1 t + (c_2 - \varphi_1) = 0.$$

Визначім тепер один корінь того рівнаня, нпр. t_1, а будемо мати другий: $t_2 = c_1 - t_1$, отже взагалї маємо такі реляції:

$$x_1 + x_2 = t_1, \qquad x_3 + x_4 = t_2,$$

$$t_2 x_1 x_2 + t_1 x_3 x_4 = c_3, \qquad x_1 x_2 + x_3 x_4 = \varphi_1.$$

З двох долішніх рівнань виходить:

$$x_1 x_2 = \frac{c_3 - \varphi_1 t_1}{t_2 - t_1}, \quad x_3 x_4 = \frac{c_3 - \varphi_1 t_2}{t_1 - t_2},$$

а комбінуючи їх з горішніми, одержуємо вже коріні даного рівнаня.

Провідна думка методи Lagrange'а є та, щоби визначити один корінь рівнаня третого степеня і коріні трьох квадратних рівнань. — Ми посували ся від функцій φ до t і до x; дотичні ґрупи були: Γ, J, M, 1; кожда з тих ґруп була визначною попередньої, а ряд сочинників зложення був: 3, 2, 2, 2. Звідси бачимо, що порядок ґрупи r спадає відразу на $\frac{r}{m}$, коли ми розвяжемо помічне рівнанє m-того степеня.

§. 58. Модіфікація тої методи лежить в тім, що виходимо від функцій ґруп J, і при їх помочи представляємо всї другі. Функція ґрупи J_1

$$g_1 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$

має для Γ_1 дві вартости, g_1 і $-g_1$. Легко переконати ся, що

$$g_1^2 = c_1^2 - 4(c_2 - \varphi_1).$$

Звідси можна обчислити $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$; $x_3 + x_4$, $x_3 x_4$ через g_1, але лїпше поступити так:

Функція g_1 має шість вартостий, з того три ріжні, а другі три ріжнять ся від тамтих тільки знаками, отже g_1 є корінем рівнаня шестого степеня; кладучи $g_1^2 = \vartheta$, маємо те рівнанє:

$$(\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta - \vartheta_2)(\vartheta - \vartheta_3) = \vartheta^3 + (8c_2 - 3c_1^2)\vartheta^2 + (8c_1^4 - 16c_1^2 c^2 + 16c_2^2 + 16c_1 c_3 - 64c_4)\vartheta + (c_1^3 + 4c_1 c_2 - 8c_3)^2 = 0$$

Нехай будуть ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 його корінями, тодї маємо:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{c_1 + \sqrt{\vartheta_1} + \sqrt{\vartheta_2} + \sqrt{\vartheta_3}}{4}, \\ x_2 &= \frac{c_1 + \sqrt{\vartheta_1} - \sqrt{\vartheta_2} \quad \sqrt{\vartheta_3}}{4}, \\ x_3 &= \frac{c_1 - \sqrt{\vartheta_1} + \sqrt{\vartheta_2} \quad \sqrt{\vartheta_3}}{4}, \\ x_4 &= \frac{c_1 - \sqrt{\vartheta_1} - \sqrt{\vartheta_2} + \sqrt{\vartheta_3}}{4}. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

§. 59. Метода Euler'а полягає на тім, що йдемо рядом зложення G, Γ, C, L, 1. Функції, які належать до ґрупи C, є корінями рівнаня шестого степеня; але тому, що C є вичначною підґрупою ґрупи Γ з показчиком 2, одержимо функцію ґрупи C, добуваючи другий корінь з функції ґрупи Γ. Функції $\xi_1 + \xi_1'$ або $(\xi_1 - \xi_1')^2$ належать до ґрупи C_1, отже можна їх представити при помочи φ.

Маємо:

$$\begin{aligned}\xi_1 + \xi_1' &= 2[(x_1 - x_2)^4 - 6(x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^4] \\ &= 4[(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - x_4)^2]^2 - 2[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)]^2 \\ &= 4\vartheta_2\vartheta_3 - 2(c_1^2 - 2c_2 - 2\varphi_1)^2;\end{aligned}$$

$\vartheta_2\vartheta_3$ можна представити при помочи ϑ_1 т. є при помочи φ_1, бо

$$\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 = (c_1^3 + 4c_1c_2 - 8c_3)^2 = (c_1^2 - 4c_2 + 4\varphi_1)\vartheta_2\vartheta_3,$$

отже

$$\vartheta_2\vartheta_3 = \frac{(c_1^3 + 4c_1c_2 - 8c_3)^2}{c_1^2 - 4c_2 + 4\varphi_1} = Q.$$

Дальше маємо:

$$\xi_1\xi_1' = (c_1^2 - 2c_2 - 3\varphi_1)^2,$$

отже ξ і ξ_1' є корінями рівнаня:

$$\xi^2 - [4Q - 2(c_1^2 - 2c_2 - 2\varphi_1)^2]\,\xi + (c_1^2 - 2c_2 - 2\varphi_1)^2 = 0. \quad (20)$$

З того рівнаня можемо обчислити кожду функцію корінів, а навіть самі коріні, як фукції величини $\sqrt[4]{\vartheta_1}$; лекше однак поступити в инакший спосіб. В функції

$$\sqrt[4]{\xi_1} = x_1 + ix_3 + i^2x_2 + i^3x_4$$

заступаємо i раз через i^2, другий раз через i^3; субституції ґрупи C не змінять тих нових функцій,

$$g_1 = x_1 - x_3 + x_2 - x_4,$$

$$\sqrt[4]{\xi_1'} = x_1 - ix_3 - x_2 + ix_4,$$

отже можна їх всї представити в ξ_1. Добираючи до них ще

$$c_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

маємо:

$$x_1 = \tfrac{1}{4}(c_1 + \sqrt[4]{\xi_1} + g_1 + \sqrt[4]{\xi_1'})$$

і подібні вираженя для других корінів. Величини

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{g_1\sqrt{\xi_1}}{\xi_1} \\ \text{і} \quad B &= \frac{\sqrt[4]{\xi_1}\sqrt[4]{\xi_1'}}{\xi_1}\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

належать до ґрупи C_1, отже можна їх виразити при помочи ξ_1; звідси слїдує:

$$x_1 = \frac{1}{4}\left[c_1 + \sqrt[4]{\xi_1} + A\left(\sqrt[4]{\xi_1}\right)^2 + B\left(\sqrt[4]{\xi_1}\right)^3\right].$$

§. 60. Найвигіднїйша до практичного численя є слїдуюча метода:*) Позбувши ся в рівнаню (14) члена з x^3,

$$y^4 - py^2 - qy + r = 0, \qquad (22)$$

кладемо:

$$y = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta + \gamma\sqrt{\alpha}}; \qquad (23)$$

через двократне квадроване доходимо до

$$y^4 - 2(\alpha + \beta)y^2 - 4\alpha\gamma y + (\alpha - \beta)^2 - \gamma^2 = 0, \qquad (24)$$

а порівнуючи сочинники обох рівнань, (22) і (24), одержуємо:

$$\alpha + \beta = \frac{p}{2}, \ \alpha\gamma = \frac{q}{4}, \ (\alpha - \beta)^2 - \gamma^2 = r,$$

а звідси

$$\beta = \frac{p}{2} - \alpha, \ \gamma = \frac{q}{4\alpha}, \ \left(2\alpha - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{16\alpha} - r = 0,$$

т. є

$$\alpha_1^3 - \frac{p}{2}\alpha^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)\alpha - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Нехай буде u_1 корінем того рівнаня, тодї маємо, коли заступимо сочинники рівнаня величинами α, β, γ:

$$u^3 - (\alpha + \beta)u^2 + \left(\alpha\beta + \frac{\alpha\gamma^2}{4}\right)u - \frac{\alpha^2\gamma^2}{4} = 0.$$

Подїлїм тепер те рівнане через $u - \alpha$; квот буде:

$$u^2 - \beta u + \frac{\alpha\gamma^2}{4} = 0;$$

корінї того нового рівнаня є:

$$u_2 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \frac{\alpha\gamma^2}{4}} = \tfrac{1}{2}\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma^2}\right),$$

$$u_3 = \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \frac{\alpha\gamma^2}{4}} = \tfrac{1}{2}\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma^2}\right).$$

Звідси:

$$\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3} = \sqrt{\beta + \gamma\sqrt{\alpha}},$$

*) Метода Euler'а, інтерпретована моїм Вп. професором Тадеем Цвойдзїньским, тепер проф. ґімназії у Львові.

отже

$$y = \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3},$$

а корінь первісного рівнаня:

$$x = \frac{c_1}{4} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}$$

Функції $\sqrt{u_2}$ і $\sqrt{u_3}$ є двовартісні; отже добираючи всї комбінації знаків $+$ і $-$, одержуємо чотири корінї рівнаня (14).

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{c_1}{4} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3} \\ x_2 &= \frac{c_1}{4} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3}, \\ x_3 &= \frac{c_1}{4} + \sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3}, \\ x_4 &= \frac{c_1}{4} + \sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

§. 60 a. Метода Дивільковського*). Рівнанє, увільнене від кубічного члена,

$$y^4 - py^2 - qy + r = 0, \qquad (22)$$

можемо розвязувати також при помочи підставленя

$$y = \alpha z + \beta; \qquad (26)$$

через те одержимо нове рівнанє в z, якому хочемо надати форму відворотного:

$$Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Bz + A = 0. \qquad (27)$$

Вставляючи вартість (26) в (22), одержимо такі реляції:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^4 &= \beta^4 - p\beta^2 - q\beta + r, \\ 4\alpha^3\beta &= 4\alpha\beta^3 - 2p\alpha\beta - q\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

а звідси

$$\alpha^2 = \frac{4\beta^3 - 2p\beta - q}{4\beta}. \qquad (28\text{ a})$$

Вставивши те остатнє вираженє в перше рівнанє (28), одержимо кубічну ресальвенту для β

---

*) Отсю методу прислав ш. автор до редакції „Збірника“.

$$-8q\beta + (16r - 4p^2)\beta^2 - 4pq\beta - q^2 = 0, \qquad (29)$$

з якої одержимо β. Знаючи його, знаємо легко і α, а тоді вже маємо і сочинники відворотного рівнаня (27)

$$A = \alpha^2,$$

$$B = 4\alpha\beta,$$

$$C = 6\beta^2 + \alpha.$$

§. 61. Спеціяльні рівнаня третого і четвертого степеня мають ґрупи, менші від симетричної. Їх пізнаємо по тім, що котрийсь один з сочинників (або їх більше) є 0; т. зн., що між коріями того рівнаня панує вже якась завсимість.

Спеціяльне кубічне рівнанє має ґрупу $G = [1, (123), (132)]$ третього порядку; се циклїчна ґрупа, отже і приналежна функція буде теж циклїчна. Тодї рівнанє належить до типу т. зв. Абелевих рівнань; до його розвязки треба витягнути тільки один третїй корінь.

Спеціяльні рівнаня четвертого степеня можуть мати тільки ті підґрупи симетричної ґрупи, які є перехідні, т. зн.

1. альтернуючу ґрупу H;
2. одну з ґруп осьмого порядку $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$;
3. ґрупу K;
4. одну з циклїчних ґруп C_1, C_2, C_3.

Рівнаня з альтернуючою ґрупою мають як діскрімінанту повний квадрат функції з вимірними сочинниками в тїлї (R); отже функції $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ одержимо, витягаючи один третїй корінь. — Коли рівнанє має одну з ґруп Γ, то рівнанє $(\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta - \vartheta_2)(\vartheta - \vartheta_3) = 0$ має один вимірний корінь; сюди належать двоквадратні і відворотні рівнаня. Їх розвязуємо, витягаючи два рази квадратний корінь. — Ґрупа K вказує на те, що рівнанє (14) має три вимірні корінї, отже ті рівнаня розвязують ся також двократним витяганєм квадратного коріня. — Врештї рівнаня з циклїчними ґрупами є Абелеві*).

§. 62. Рівнань висших степенів не можемо розвязувати тими методами. Розвязка рівнаня полягала тут на тім, що ми творили якусь нову функцію, звану взагалї ресольвентою, долучуючи до пер-

---

*) Роздїл про рівнаня 2—4 степеня оброблений по части на основі Vogt'a: Leçons etc.

вісного обсягу вимірности що раз то нові невимірности. Початкове рівнане мало симетричну ґрупу, а кожда з ресольвент належала вже до низшої ґрупи. Таким чином ми доходили до одновартісних функцій корінів, т. зн. до самих корінїв, яких ґрупа була 1. Отже обсяг вимірности що раз то розширював ся, а ґрупа рівнаня зменшала ся. Дійшовши з ґрупою до краю, мали ми корінї представлені вимірно в величинах того найширшого обсягу.

Lagrange пробував розвязувати загальні рівнаня при помочи ресольвент. Нехай буде дане рівнаве

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

степеня n, де $n = m.p$, p — перве число. В такім разї ділимо всї корінї на p кляс по m корінїв і творимо суми тих поодиноких кляс: коріням надаємо по два показчики, як ми се вже робили, §. 40

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= x_{11} + x_{12} + x_{13} + \ldots + x_{1m}, \\ X_2 &= x_{21} + x_{22} + x_{23} + \ldots + x_{2m}, \\ & \\ X_p &= x_{p1} + x_{p2} + x_{p3} + \ldots + x_{pm}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Кожде X_i є незмінне для таких субституцій, які пересувають тільки другі показчики; отже ґрупа, яка не змінить нї одного X, є неперехідна, порядку $(m!)^p$. Инші субституції, які змінюють тільки перші показчики, пересувають лише величини X поміж собою, не змінюючи їх вартостий. Отже кожда симетрична функція величини X зістане незмінна для тої другої ґрупи, порядку $p!$, а тим самим і для комбінації обох ґруп, т. є для ґрупи порядку $p!(m!)^p$. Проте скількість всїх ріжних вартостий тих симетричних функцій величини X є

$$\varrho = \frac{n!}{p!(m!)^p},$$

а всї вони будуть корінями рівнаня степеня ϱ. Знаючи один з корінїв того рівнаня, можемо обчислити всї инші, бо вони всї належать до тої самої ґрупи.

Розширім тепер наш обсяг вимірности p-тим корінем з одиниці ω і утворім вирази:

$$\xi_1 = (X_1 + \omega X_2 + \omega^2 X_3 + \ldots + \omega^{p-1} X_p)^p,$$
$$\xi_2 = (X_1 + \omega^2 X_2 + \omega^4 X_3 + \ldots + \omega^{2(p-1)} X_p)^p,$$

$$\xi_{p-1} = (X_1 + \omega^{p-1} X_2 + \omega^{2(p-1)} X_3 + \ldots + \omega^{(p-1)^2} X_p)^p;$$

се т. зв. ресольвенти Lagrange'а; вони повстають в той спосіб, що в ξ_1 напишемо на місци ω чергою: $\omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{p-1}$. Кождий з тих виразів є незмінний для тих субституцій, які збільшують показчики величин X; се аритметичні субституції. Коли-ж утворимо симетричні функції тих величин, то вони будуть незмінні ще й для тих субституцій, які множать кождий показчик тим самим числом; їх є $(p-1)$, отже симетричні функції величин X мають ґрупу порядку $p(p-1)$, а їх всїх буде $\frac{p!}{p(p-1)} = (p-2)!$, т. зн., що з рівнаня того степеня можна обчислити кожду таку симетричну функцію. З того рівнаня потрібуємо взяти тільки один який небудь корінь і ним потрафимо представити всї симетричні функції величини ξ:

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{p-1} = \sigma_1 = r_1(\sigma_1)$$
$$\xi_1 \xi_2 + \ldots + \xi_{p-2}\xi_{p-1} = \sigma_2 = r_2(\sigma_1)$$

$$\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{p-1} = \sigma_{p-1} = r_{p-1}(\sigma_1);$$

ті величини є корінями степеня рівнаня $p-1$:

$$\xi^{p-1} - r_1 \xi^{p-2} + \ldots + r_{p-1} = 0. \tag{3}$$

Знаючи знов тільки один корінь того нового рівнаня, можемо обчислити всї инші вимірно, бо всї вони мають ту саму ґрупу: $\xi_1 = R_1(\xi_1)$, $\xi_2 = R_2(\xi_1) \ldots$, $\xi_{p-1} = R_{p-1}(\xi_1)$. Далі знаємо ще величину ξ_0, яку одержимо, коли ω заступимо 1, т. є:

$$\xi_0 = (X_1 + X_2 + \ldots + X_p)^p = a^p,$$

де a є першим із сочинників рівнаня (1) (сума всїх корінїв).

Тепер треба нам тільки витягнути один n-тий корінь з величин ξ_i; також і ті всї корінї дадуть ся обчислити одним з них, бо всї мають ту саму ґрупу порядку $(m!)^p$, отже

$\sqrt[p]{\xi_1}=u_1, \sqrt[p]{\xi_2}=\varphi_2(u_1), \sqrt[p]{\xi_3}=\varphi_3(u_1),\ldots,\sqrt[p]{\xi_{p-1}}=\varphi_{p-1}(u_1)$, т. зн.

$$X_1+X_2+\ldots+X_p=a$$
$$X_1+\omega X_2+\ldots+\omega^{p-1}X_p=u_1=\varphi_1(u_1)$$
$$X_1+\omega^2X_2+\ldots+\omega^{p-1}X_p=\varphi_2(u_1)$$

$$X_1+\omega^{p-1}X_2+\ldots+\omega^{(p-1)^2}X_p=\varphi_{p-1}(u_1).$$

Розвязка тих рівнань з огляду на X дає

$$X_k=\frac{1}{p}\left[a+\sum_{i=1}^{p-1}\omega^{-ki}\varphi_i(u_1)\right]$$

Отже, щобя розвязати рівнане (1) степеня $n=mp$, мусимо:

1. розвязати одно рівнане степеня $\varrho=\frac{n!}{p!(m!)^p}$ і взяти з нього один корінь;

2. розвязати рівнане степеня $(p-2)!$, яке дасть ся утворити з вимірних функцій коріня попереднього рівнаня, і взяти з нього знов один корінь;

3. розвязати рівнане степеня $(p-1)$, яке утворить ся з попереднього рівнаня;

4. витягнути p-тий корінь з величини ξ_1, т. зн. розвязати рівнане степеня p: $y^p-\xi_1{}^r=0$.

Добуток степенів тих всїх рівнань є $\frac{n!}{p!(m!)^p}\cdot(p-2)!(p-1)p$ $=\frac{n!}{(m!)^p}$, т. зн., що розвязка рівнаня степеня n залежить від рівнаня степеня $\gamma=\frac{n!}{(m!)^p}$: через відповідний розклад числа n на чинники можемо знайти найменшу вартість числа γ.

§. 63. Коли степень рівнаня є первий, т. є $n=p$, $m=1$, тодї відпадає перше рівнане степеня ϱ, бо $\varrho=1$, отже величини X є ідентичні з корінями даного рівнаня. Для $n=p$ маємо проте розвязати рівнане степеня $(n-2)!$, степеня $(n-1)$ і витягнути один n-тий корінь. Коли $n>4$, то $(n-2)!>n$ для кождого первого числа, отже фактично приходимо до рівнаня висшого степеня, замість зблизити ся до розвязки. Для $n=3$ є $(n-2)!=1$, отже відпадає й друге рівнане, і ми маємо тільки розвязати одно квадратне рівнане і витягнути один кубічний корінь, як се дійсно ми виконували.

Коли n є зложеним числом, і ми остаточно дійшли до розвязки четвертого рівнаня, отже знайшли вже всї X, тоді рівночасно з кождим

$$X_i = x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_i$$

знаємо й всї симетричні функції величини x_{i_1}, x_{i_2}, x_{im}, бо вони всї мають ту саму ґрупу. Длятого вже маємо до діла з проблемом низшого степеня, бо з розвязкою рівнаня степеня m, яке має корінї $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{im}$. Коли m є перве число, розвязуємо рівнане, як показано висше; коли-ж $m=m_1p_1$, де p_1 є первий чинник з m, творимо новіресольвенти вказаним способом. Подїлїм тих m корінїв знов на p_1 ґруп так: коли приймемо, що $x_{ik}=x_{rs}^{(i)}$, то пишемо таблицю:

$$x_{11}^{(i)}, x_{12}^{(i)}, \ldots, x_{1m_1}^{(i)},$$

$$x_{21}^{(i)}, x_{12}^{(i)}, \ldots, x_{2m_1}^{(i)},$$

$$x_{p_1 1}^{(i)}, x_{p_1 2}^{(i)}, \ldots, x_{p_1 m_1}^{(i)},$$

і творимо:

$$X_1^{(i)} = x_{11}^{(i)} + x_{12}^{(i)} + \ldots + x_{1m_1}^{(i)},$$

$$X_2^{(i)} = x_{21}^{(i)} + x_{22}^{(i)} + \ldots + x_{2m_1}^{(i)},$$

$$X_{p_1}^{(i)} = x_{p_1 1}^{(i)} + x_{p_1 2}^{(i)} + \ldots + x_{p_1 m_1}^{(i)},$$

анальоґічно як спершу, — аж дійдемо до $m_{\lambda-1}=p_\lambda m_\lambda$, де p_λ і m_λ є вже перві числа.

При зложених степенях мусимо проте добирати найдогіднїйшу комбінацію числа m і p, щоби γ вийшло minimum. Для $n=4$ маємо: $m=2$ і $p=2$, т. зн. $\varrho=\frac{4!}{2!(2!)^2}=3$; отже при рівнанях четвертого степеня маємо розвязати рівнаня степенів: 3, 2, 1, 2,

Для $n=6$, маємо: $m=2$, $p=3$, або $m=3$, $p=2$. Перше дає: $\varrho=\frac{6!}{3!(2!)^3}=15$, друге дає: $\varrho=\frac{6!}{2!(3!)^2}=10$, отже маємо розвязувати рівнаня таких степенів:

а) 15, 1, 2, 3; б) 10, 1, 1, 2, Кождим разом маємо тут ресольвенту висшого степеня ніж дане рівнане.

VII. Альґебраічна розвязка рівнань.

§. 64. Альґебраічне рівнане

$$f(x)=x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_{n-1}x+c_n=0, \qquad (1)$$

якого сочинники є величинами з обсягу (R), незведиме в тім обсягу, назвали ми **рішимим**, коли його коріні можемо представити як функції сочинників при помочи скінченого числа таких операцій: додаваня, відниманя, множеня, діленя, степенованя й коріньованя.

Виконуючи пять перших операцій (степеноване тільки цїлочисельним виложником) не виходимо поза обсяг (R); зате при коріньованю одержуємо числа, які не належать до обсягу (R). Тодї одержуємо розширений обсяг (R').

Можна обмежити ся все на добуваню таких корінїв, яких виложники є первими числами, бо зложений корінь, $m.n$-тий, можна розложити на добуване m-того й n-того кореня.

Функції, які одержуємо через коріноване, називаємо **альґебраічними функціями** величин з обсягу (R). Отже щоби з вимірної функції одержати альґебраічну, мусимо добути з неї якийсь p-тий корінь (p перве число). Нехай буде $F(R)$ тою вимірною функцією, а V величиною, яку одержуємо через добуте кореня, тодї маємо:

$$V^p=F(R). \qquad (2)$$

а звідси

$$V=\sqrt[p]{F(R)}.$$

Долучуючучи до обсягу (R) величину V, одержуємо новий обсяг $(R; V)$.

Рівнане (1), яке було в обсягу (R) незведиме, може по долученю величини V стати зведимим; бо коли нпр. $x^n - \varphi$ є в (R) незведиме, т. зн. φ не є повною n-тою степенню, то приймаючи $\varphi = V^n$ і долучивши V до (R) одержимо рівнане зведиме, бо $x^n - V^n$ є подїльне через $x - V$.

Обсяг (R') можна знова розширити новим невимірним числом; назвавши першу невимірніть V_ν:

$$V^{p}{}_{\nu} = F_\nu(R)$$

одержимо дальшу невимірність:

$$V_{\nu-1}^{p_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(R; V_\nu);$$

те саме можемо повторити дальше:

$$\left.\begin{array}{l} V_{\nu-2}^{p_{\nu-2}} = F_{\nu-2}(R; V_\nu, V_{\nu-1}), \\ \\ V_1^{p_1} = F_1(R; V_\nu, V_{\nu-1}, \ldots, V_2). \end{array}\right\} \quad (3)$$

Таким чином дійдемо ми до ν_1 разів розширеного обсягу $(R^{(\nu)}) = (R; V_1, V_2, V_3, \ldots, V_\nu)$; в тім обсягу можемо представити кождий з коріня x як функцію

$$x_1 = F_0(R; V_\nu, V_{\nu-1}, \ldots, V_2, V_1) \quad (4)$$

§. 65. I. **Твердженє**. Коли рівняня

$$f_1 x^{p-1} + f_2 x^{p-2} + \ldots + f_p = 0, \quad (5)$$

$$x^p - F = 0 \quad (6)$$

істнують рівночасно, а F; $f_1, f_2, \ldots f_p$ є вимірними функціями в якімось обсягу (R), то

1. або $f_1 = f_2 = \ldots f_p = 0$,

2. або один з корінїв рівняня (6) належить до того самого обсягу (R).

Доказ. Приймім, що не всї сочинники рівняня (5) є зерами, то рівняня (5) і (6) мусять мати якийсь спільний чинник

$$x^k + \varphi_1 x^{k-1} + \ldots + \varphi_k,$$

якого сочинники є вимірними функціями величини f. Коли сей чинник є первого степеня, то порівнаний з зером дає корінь рівняня (6) в вимірній функції; коли-ж степень k є зложений, а x_1 є одним із спільних корінів, то вищі спільні корінї будуть мати вигляд $x_1 \omega^{\alpha}$, $x_1 \omega^{\beta}, \ldots$, де ω є p-тим корінем з одиниці. Добуток спільних корінів буде:

$$\pm \varphi_k = x_1{}^k \omega^{\alpha+\beta+\cdots} = x_1{}^k \omega^{\lambda}; \qquad (7)$$

тимчасом можна все знайти такі два числа u і v, для яких буде сповнена реляція $ku + pv = 1$; підносячи (7) до степені u, одержимо

$$\pm \varphi_k{}^u = x_1{}^{1-pv} \omega^{\lambda u} = x_1 \omega^{\lambda u} F^{-v},$$

а звідси слїдує

$$x_1 \omega^{\lambda u} = \pm \varphi_k{}^u F^v,$$

т. зн., що ліву сторону рівнаня (7), яка є одним із спільних корінїв рівнань (5) і (6), можна представити вимірно в величинах $F; f_1, f_2, \quad f_p$.

§. 66. Ряд функцій (3) можемо звести до одної цілочисельної функції, зложеної з елементів V, якої сочинники є вимірні в R. Коли нпр. $F_{\alpha-1}$ не є цілочисельною функцією, то можна її представити як квот двох таких функцій:

$$F_{\alpha-1} = \frac{G_0 + G_1 V_\alpha + \ldots}{H_0 + H_1 V_\alpha + \ldots},$$

де $G, H, \ldots$ є цілочисельними функціями величин $V_{\alpha+1}, V_{\alpha+2}, \ldots, V_\nu$. Потім можемо з чисельника й знаменника усунути всї степенї величини V_α, висші від $(p_\alpha - 1)$-тої при помочи реляції

$$V_\alpha{}^{p_\alpha} = F_\alpha(R;\ V_\nu,\ V_{\nu-1}, \ldots, V_{\alpha+1}). \qquad (8)$$

Коли V_α зістало ще в знаменнику функції $F_{\alpha-1}$, то назвім прочі корінї рівнаня (8) $V_\alpha', V_\alpha'' \ldots$; вони сповнять рівнанє:

$$\frac{X^{p_\alpha} - V_\alpha{}^{p_\alpha}}{X - V_\alpha} = X_\alpha^{p-1} + V_\alpha X_\alpha^{p-2} + \ldots + V_\alpha^{p-1} = 0. \qquad (9)$$

Добуток

$$\Pi = (H_0 + H_1 V_\alpha' + \ldots)(H_0 + H_1 V_\alpha'' + \ldots) \ldots$$

не може бути зером, бо коли-б так було, то один із корінїв рівнаня (8) вдоволяв би рівночасно рівнанє (8) і рівнанє степеня $(p_\alpha - 1)$; відповідно до попереднього твердженя були би корінї рівнаня (8) вимірні в обсягу $(R;\ V_{\alpha+1}, V_{\alpha+2}, \ldots, V_\nu)$, а се суперечить з заложеним.

Помножім рівнанє (8) добутком Π; знаменник буде симетричний з огляду на величини $V_\alpha, V_\alpha', V_\alpha'', \ldots$ і можна буде його представити цілочисельно при помочи $V_{\alpha+1}, \ldots, V_r$. Також і чисельник буде можна представити як добуток цілочисельної функції величини V_α і симетричної функції коріній рівнаня (9), отже можна обчислити його в величинах V_α. Отже $F_{\alpha-1}$ представить ся нам як цілочисельний многочлен з огляду на V_α: коли його сочинники є дробами з огляду на $V_{\alpha+1}$, поступаємо подібним способом, аж вкінці дійдемо до результату, що $F_{\alpha-1}$ буде цілочисельною функцією величин $V_\alpha, V_{\alpha+1}, \ldots, V_\nu$ з вимірними сочинниками в обсягу (R).

Коли в такім представленю появить ся величина V_α в степені висшім як $p_{\alpha-1}$, редукуємо її при помочи реляції $V_\alpha^{p_\alpha} = F_\alpha$ до низших степенів, так що вкінці можемо написати:

$$F_{\alpha-1} = J_0 + J_1 V_\alpha + J_2 V^2_\alpha + \ldots + J_{p_\alpha - 1} V_\alpha^{p_\alpha - 1} \qquad (10)$$

де $J_0, J_1 \ldots$ є цілочисельними функціями величин $V_{\alpha+1}, V_{\alpha+2} \ldots, V_r$.

§. 67. Ту редукцію можемо ще дальше продовжити і довести до того, що сочинник при першій степени V_α буде 1.

Нехай буде J_k одним із сочинників функції (10), ріжним від 0; положім

$$J_k V_\alpha^k = W_\alpha. \qquad (11)$$

Можна знайти все такі два числа u і v, які сповнять реляцію

$$ku + p_\alpha v = 1,$$

Піднесім (10) до u-тої степені

$$J_k^u V_\alpha^{1-p_\alpha v} = W_\alpha^u,$$

т. зн.

$$V_\alpha = W_\alpha^u F_\alpha^v J_k^{-u}, \qquad (12)$$

бо $V_\alpha^{p_\alpha v} = F_\alpha^v$. З рівнань (11) і (12) бачимо, що величини V_α і W_α, можемо представити вимірно одну другою і елементами $V_{\alpha+1}, \ldots V_\nu$, так що обсяги $(R; V_\alpha, V_{\alpha+1} \ldots)$ і $(R; W_\alpha, V_{\alpha+1})$ є ідентичні. Звідси слідує, що рівнане (10) можемо написати так:

$$F_{\alpha-1} = J_0 + W_\alpha + L_2 W_\alpha^2 + \ldots + L^{p_\alpha - 1} W_\alpha^{p_\alpha - 1}, \quad (13)$$

якого сочинники є функціями величини $V_\alpha, V_{\alpha+1}, V_{\alpha+2}, \ldots, V_\nu$.

В нашім представленю не змінить ся нічо, коли замість W_α напишемо V_α, отже будемо врешті мати:

$$F_{\alpha-1} = J_0 + V_\alpha + J_2 V_\alpha^2 + \ldots + J_{p_\alpha - 1} V_\alpha^{p_\alpha - 1} \qquad (13a)$$

Таку редукцію можемо посунути аж до $\alpha = 1$, і тоді одержимо:

$$x_1 = G_0 + V_1 + G_2 V_1^2 + \ldots + G_{p-1} V_1^{p_1 - 1}. \qquad (14)$$

Коли за V_1 підставимо в тім рівнаню всї иншї вартости, які та функція може приймати, т. є

$$V_1,\ \omega_1 V_1,\ \omega_1^{2} V_1, \ldots\ \omega_1^{p_1-1} V_1,$$

де ω_1 є p_1-тим корінем з одиниції, то ті суми будуть справджувати теж рівнанє (1), значить, вони будуть прочими його корінями:

$$x_2 = G_0 + \omega_1 V_1 + G_2 \omega_1^{2} V_1^{2} + \ldots + G_{p_1-1} \omega_1^{p_1-1} V_1^{p_1-1},$$

і загально

$$x_{k+1} = G_0 + \omega_1^{k} V_1 + G_2 \omega_1^{2k} V_1^{2} + \ldots + G_{p_1-1} \omega^{(p_1-1)k} V_1^{p_1-1} \qquad \text{(14a)}$$

$$(k = 0,\ 1, \ldots,\ p_1 - 1).$$

§. 68. Перенесїм отсе поступованє на примір конкретного рішимого рівнаня, нпр. кубічного

$$x^3 + px + q = 0,$$

яке розвязане дає (Карданський взір)

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Звідси маємо такий ряд реляцій:

$$V_3^{2} = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$V_2^{3} = -\frac{q}{2} + V_3,$$

$$V_1^{3} = -\frac{q}{2} - V_3.$$

$$x_1 = V_1 + V_2.$$

Підставивши ті вартости в дане рівнанє, одержуємо:

$$3 V_2 V_1^{2} + (3 V_2^{2} + p) V_1 + p V_2 = 0$$

і друге рівнанє

$$V_1 + \left(\frac{q}{2} + V_3\right) = 0.$$

З огляду на те, що

$$(V_1 + V_2)(3 V_1 V_2 + p) = 0$$

маємо $V_1 V_2 = -\frac{p}{3}$, т. є

$$V_1 = \frac{-\frac{p}{3}}{V_2} = \frac{-\frac{p}{3}V_2^2}{V_2^3} = \frac{V_2^2\left(-\frac{q}{2} - V_3\right)}{\left(\frac{p}{3}\right)^2},$$

отже в знаменнику нема вже невимірних чисел. В такім разї ряд рівнань (3) зводять ся до

$$V_3^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$V_2^3 = -\frac{q}{2} + V_3,$$

$$x_1 = V_2 + \frac{V_2^2\left(-\frac{q}{2} - V_3\right)}{\left(\frac{p}{3}\right)^2}.$$

Користуючи ся кінцевою заміткою попереднього §., т. є заступаючи V_1 величинами ωV_1 і $\omega^2 V_1$, маємо:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \omega^2 V_2 + \frac{\omega V_2^2\left(-\frac{q}{2} - V_3\right)}{\left(\frac{p}{3}\right)^2}, \\ x_3 &= \omega V_2 + \frac{\omega^2 V_2^2\left(-\frac{q}{2} - V_3\right)}{\left(\frac{p}{3}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \left(\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

§. 69. **II. Твердженє.** Величину x_1, яка сповнює рішиме альґебраїчне рівнанє $f(x)=0$, можна представити в видї цїлочисельної функції невимірних величин

$$V_1,\ V_2,\ \ldots\ V_\nu;$$

якої сочинники є числами з обсягу (R). Величини V є з одної сторони функціями корінїв рівнаня $f(x)=0$ і корінїв з одиницї; з другої сторони можна їх обчислити з ряду рівнань

$$V_\alpha^{p_\alpha} = F_\alpha\,(R;\ V_\nu,\ V_{\nu-1},\ \ldots\ V_{\alpha+1})$$

$(\alpha=\nu,\ \nu-1,\ \ldots\ 1)$, де p_α є первими числами, а F цїлими функціями величин $V_\nu,\ V_{\nu-1},\ \ldots\ V_{\alpha+1}$ і вимірними функціями величин з обсягу R*).

*) Netto, Substitutionentheorie, стр. 244. Vogt, Leçons, стр. 116.

Доказ. 1. Помножім кожде з рівнань (14а) величиною ω_1^{-k} і додаймо їх; з того одержимо:

$$p_1 V_1 = \sum_{k=1}^{p_1} \omega_1^{-k} x_{k+1},$$

$$V_1 = \frac{1}{p_1} \sum_{k=1}^{p_1} \omega_1^{-k} x_{k+1}. \tag{15}$$

т. зн., що V_1 є лінійною функцією корінїв рівнаня (1) і корінів з одиниці.

2. Коли рівнанє (1) є незведиме, то його корінї мусять бути поміж собою ріжні. Викажемо, що корінї $x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}$, дані рівнанями (14а), є ріжні.

Добуток

$$f_1(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{p_1})$$

є симетричний з огляду на величини $V_1, \omega_1 V_1, \omega_1^2 V_1, \ldots$, отже можна його представити вимірно в обсягу $(V_1, V_2, V_3, \ldots)$; той добуток мусить бути незведимим. Коли-б він був зведимий, то можна-б його розложити на незведимі чинники

$$\varphi_1(x;\ V_2,\ V_3, \ldots) = (x - x_1)(x - x\alpha) \ldots,$$
$$\varphi_2(x;\ V_2,\ V_3, \ldots) = (x - x\beta)(x - x\gamma) \ldots,$$
$$\ldots;$$

ліві сторони не заключують в собі величини V_1, отже по виконаню множеня на правих сторонах мусїло би випасти V_1 і звідтам. Значить, що ті рівнаня не змінили-б ся, коли-б V_1 заступити вартостями $\omega_1 V_1, \omega^2 V_2, \ldots$, т. є коли-б кождий з корінїв x заступити иншим. Звідси слїдувало би, що всї чинники $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ є ідентичні, отже $f(x)$ є повною степению якогось многочлена; а що степень функції $f(x)$ є первий, то вона могла би бути тільки p_1-шою степению ріжниці $(x - x\alpha)$, а се неможливе, бо $x - x\alpha$ не є вимірне в $V_2, V_3, \ldots$

З того, що $f_1(x)$ є незведиме, слїдує, що всї корінї $x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}$ є ріжні; $f_1(x)$ є незведимим чинником функції $f(x)$ в обсягу $(R;\ V_2, V_3, \ldots)$.

3. Тепер творимо добуток зі всїх можливих виражень форми

$$y - \left[\frac{1}{p_1} \sum \omega_1^{-k} x_{k+1}\right]^{p_1},$$

т. зн., виконуємо в тім вираженю всі можливі субституції величини x; се дасть нам рівнане

$$\varphi(y) \equiv \Pi(y - y\lambda) = 0,$$

анальоґічне до (1), якого сочинники є вимірні в обсягу R.

Нехай буде y_1 корінем того рівнаня:

$$y_1 = \left[\frac{1}{p_1}\sum_{k=1}^{p_1} \omega_1{}^{-k} x_{k+1}\right]^{p_1} \tag{16}$$

то можна його представити з одної сторони як

$$y_1 = V_1{}^{p_1} = F_1(R;\ V_\nu, \qquad V_2)$$

з другої сторони як

$$y_1 = L_0 + V_2 + L_2 V_2{}^2 + \qquad . + L_{p_2-1} V_2{}^{p_2-1}.$$

Заступаючи V_2 чергою величинами $\omega_2{}^k V_2$ ($k=0, 1, \ldots, p_2-1$; $\omega_2{}^{p_2}=1$) одержимо загально:

$$y_{k+1} = L_0 + \omega_2{}^k V_2 + L_2 \omega_2{}^{2k} V_2{}^2 + \ldots + L_{p_2-1} \omega_2{}^{(p_2-1)k} V_2{}^{p_2-1}.$$

4. З величинами y поступаємо так само, як перше з x; звідси одержуємо нове рівнане $\psi(z)=0$, степеня p_3, якого корінї виразимо як функції величин V_3, і т. д.

Таким чином наше твердженє доказане.

§. 70. В добутку $f_1(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{p_1})$ можуть часами величини $V_2, V_3, \quad ., V\lambda_{-1}$ випасти в рахунку рівночасно з V_1; назвім першу невимірність, яка в $f_1(x)$ дійсно приходить, $V\lambda_{+1}$, тоді маємо:

$$f(x) = f_1(x;\ V\lambda,\ V\lambda_{+1}, \quad .)\psi_1(x;\ V\lambda,\ V\lambda_{+1}, \quad .); \tag{18}$$

чинник ψ_1 є цїлочисельний з огляду на ті V, які в ньому заходять.

Сочинники величин $V\lambda^0$, $V\lambda$, $V\lambda^2$, $\qquad V\lambda^{p_\lambda-1}$, мусять бути по тих сторонах рівнаня (18) рівні т. є мусять бути 0, бо $f(x)$ належить до обсягу (R); отже рівнанє (18) буде незмінене, коли за $V\lambda$ напишемо $V\lambda$, $\omega\lambda V\lambda$, $\omega\lambda^2\ V\lambda$, . ., $(\omega\lambda^{p_\lambda}=1)$. Утворім добуток тих всїх чинників, які одержимо через таке підставленє

$$f_2(x) = f_1(x;\ V\lambda,\ldots)f_1(x;\ \omega\lambda V\lambda,\ldots)\ldots f_1(x;\ \omega\lambda^{p_\lambda-1} V\lambda,\ldots); \tag{19}$$

сей добуток є незведимий в обсягу (R; $V\lambda_{+1}$, $V\lambda_{+2}$)...). Доказ незведимости переводимо анальоґічно як в попереднїм §. для $f_1(x)$.

Приймім, що в $f_2(x)$ разом з $V\lambda$ випадають ще инші невимірности: $V_{p+1}, \ldots, V_{k-1}$, а V_k вже дійсно знов там приходить. Тепер творимо добуток:

$$f_3(x) = f_2(x;\ V_k, \ldots)\ f_2(x;\ \omega_k V_k, \ldots) \ldots;$$

се буде знова один із незведимих чинників рівнаня (1) в обсягу $(R;\ V_{k+1}, \ldots)$, і т. д.

З того бачимо, що при кождім такім розумованю випадає що найменше одна з величин V, отже по кількох таких операціях позбудемо ся всїх невимірностий V. Таким чином дійдемо врештї до добутка $f(x) = 0$, який має n лінїйних ріжних чинників $x - x_\alpha$ і є в обсягу (R) незведимий. Число n можна представити як добуток: $n = p_1 p_\lambda p_k \ldots$

Звідси слїдує

III. Твердженє. Всї корінї рівнаня (1) одержимо, коли в незведимім добутку степеня p_1

$$f_1(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{p_1})$$

заступимо невимірність V_λ величинами $V_\lambda, \omega_\lambda V_\lambda, \omega_\lambda^2 V_\lambda, \ldots, \omega_\lambda^{p_\lambda - 1} V_\lambda$, і утворимо добуток

$$f_2(x) = f_1(x;\ V_\lambda, \ldots)\ f_1(x;\ \omega_\lambda V_\lambda, \ldots)\ f_1(x;\ \omega_\lambda^2 V_\lambda, \ldots);$$

дальше коли в $f_2(x)$ невимірність V_k заступимо анальоґічно величинами $\omega_k^\lambda V_k$ і утворимо добуток

$$f_3(x) = f_2(x;\ V_k, \ldots)\ f_2(x;\ \omega_k V_k, \ldots) \ldots$$

і т. д.; невимірности $V_\lambda, V_k, \ldots$ є першими, які дїйсно заходять в даних чинниках, а величини $\omega_\lambda, \omega_k, \ldots$, є p_λ-тим, p_k-тим, корінем з одиницї. Степень рівнаня є $n = p_1 p_\lambda p_k \ldots$

Порядок, в якім втягаємо в рахунок невимірности $V_1, V_2, \ldots$, є довільний; коли $V_\alpha, V_{\alpha+1}, \ldots V_{\beta-1}$ є визначені величинами $V_\beta, V_{\beta+1}, \ldots V_\nu$ при помочи рівнань

$$V_k^{p_k} = F_k(V_\beta, V_{\beta+1}, \ldots V_\nu;\ R), \quad (k = \alpha, \alpha + 1, \ldots, \beta - 1)$$

то порядок елементів $V_\alpha, V_{\alpha+1}, \ldots$ є довільний.

§. 71. **IV. Твердженє.** Коли степень рівнаня (1) є первим числом, $n = p_1$, то до визначеня x треба нам тільки одної невимірности степеня p_1:

$$x_1 = G_0 + V_1 + G_2 V_1^2 + \ldots + G_{p_1 - 1} V_1^{p_1 - 1}.$$

Виходить се з попереднього твердженя, коли обмежимо ся до першого вказаного там кроку; добуток $f_1(x)$ мусить бути ідентичний з $f(x)$, отже в нїм випадають рівночасно з V_1 всї прочі невиміт ти $V_2, V_3, \ldots V_\nu$.

Таке рівнане можемо представити добутком:

$$f(x)=\prod_{k=0}^{p_1-1}[x-(G_0+\omega_1{}^k V_1+G_2\omega^{2k}V_1{}^2+\ldots+G_{p_1-1}\omega^{p_1-1}V_1{}^{p_1-1})]=0,$$

де $\omega^{p_1}=1$.

§. 72. **V. Тверджене.** Загальне рівнане степеня висшого над четвертий не є рішиме альґебраїчно.

Доказ*). Нехай буде дане загальне незведиме рівнане степеня n

$$f(x)=x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_n=0 \qquad (1)$$

якого сочинники є числами обсягу (R), а корінї $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не мають нїякого иншого обмеженя, як тільки те, що є між собою ріжні; ми корінів не знаємо, тільки їх основні симетричні функції.

Коли рівнане (1) має бути рішиме, то його кождий корінь можна представити в формі (14a), т. є в видї функції величин $V_1, V_2, \ldots V_\nu$. Остатня величина з того ряду сповнює реляцію

$$V_\nu{}^{p_\nu}=F_\nu(c_1, c_2, \ldots, c_\nu)=F_\nu(c), \qquad (20)$$

отже є цїлочисельною функцією корінів рівняня (1):

$$V_\nu=\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)=\varphi(x),$$

якої p_ν-та степень є симетрична; сама-ж функція $\varphi(x)$ не є симетрична, т. зн., мусить змінити ся, коли на корінях x виконаємо якунебудь пермутацію, але її p_ν-та степень зістане незмінена:

$$\varphi^{p_\nu}=F_\nu. \qquad (21)$$

З того слїдує, що всї вартости функції $\varphi(x)$ є корінями рівнаня (19), т. зн. мають такі чисельні вартости:

$$\varphi, \ \omega_\nu\varphi, \ \omega_\nu{}^2\varphi,$$

Виконаймо на φ транспозицію (12), то одержимо:

$$\varphi(x_2, x_1, x_3, \ldots)=\omega_\nu\,\varphi(x_1, x_3, x_3, \ldots);$$

коли повторимо ту транспозицію, одержимо:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots)=\omega_\nu(x_2, x_1, x_3, \ldots);$$

помноживши оба рівнаня. маємо: $\omega_\nu{}^2=1$, т, зн. $p_\nu=2$. Звідси слїдує, що перша невимірність, яку мусимо долучити до первісного обсягу (R) при розвязцї загального рівнаня (1), мусить бути другої степени. Функція φ зістане незмінна для субституцій трьох і пяти елементів, бо ті субституції можна розложити на паристу скількість транспозицій.

---

*) Доказ того твердженя подав Абель (Crelle's Journal, I. 1826.) Wantzel упростив сей доказ. Пор. Serret, Algèbre, II. стр. 512; Vogt, Leçons, стр. 187.

Тепер беремо слідуючу невимірність, $V_{\nu-1}$, дану рівнанем

$$V_{\nu-1}^{p_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(V_\nu;\ c_1,\ c_2, \qquad c_\nu); \qquad (22)$$

функція $F_{\nu-1}$ мусить мати в собі елемент V_ν. бо в противнім разї була би вона вимірна в V_ν і величинах з R — проти заложеня. Подібно як перше кладемо:

$$V_{\nu-1} = \psi(x_1,\ x_2, \qquad x_n)$$

$V_{\nu-1}$ є функцією, якої $p_{\nu-1}$-ша степень є двовартістна, отже має ту саму ґрупу, що φ, т. зн. є незмінна для кождої поодинокої транспозиції. Але для тричленних циклїв ψ не може зіставати без зміни, бо тоді була би се альтернуюча функція, і можна би її виразити вимірно при помочи V_ν. Отже з

$$\psi^{p_{\nu-1}} = F_{\nu-1} \qquad (23)$$

виходить, що ψ має такі вартости: $\psi, \omega_{\nu-1}\psi,\ \omega^2_{\nu-1}\psi, \qquad .,$ $(_{\nu-1}^{p_{\nu-1}} = 1)$. Виконуючи на ψ цикль (1 2 3) три рази, одержимо:

$$\psi(x_2,\ x_3,\ x_1,\ x_4, \qquad .) = \omega_{\nu-1}\ \psi(x_1\ x_2,\ x_3,\ x_4, \qquad .),$$

$$\psi(x_3,\ x_1,\ x_2,\ x_4, \qquad .) = \omega_{\nu-1}\ \psi(x_2,\ x_3,\ x_1,\ x_4, \qquad .),$$

$$\psi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \qquad .) = \omega_{\nu-1}\ \psi(x_3,\ x_1,\ x_2,\ x_4, \qquad .).$$

Вимноживши ті рівнаня, одержуємо: $\omega_{\nu-1}^3 = 1$, т. зн. $p_{\nu-1} = 3$, отже друга з черги невимірність мусить бути кубічна.

Коли скількість незвісних є > 4, т. зн. коли степень рівнаня є висший від четвертого, ψ мусить змінити ся для пятичленного циклю; анальоґічно як перше одержимо $\omega_{\nu-1}^5 = 1$, т. є $p_{\nu-1} = 5$. З того виходить суперечність, отже рівнанє висшого степеня нїж четвертий не може бути рішиме.

§. 73. Заступім в загальній формі коріня рішимого рівнаня (§. 67)

$$x_\lambda = G_0 + \omega^{\lambda-1}V_1 + G_2\omega^{2(\lambda-1)}V_1^2 + \ldots + G_{p_1-1}\omega^{(p_1-1)(\lambda-1)}V_1^{p_1-1}, \qquad (14')$$

де ω є p_1-им корінем з одиниції, а $\lambda = 1,\ 2, \qquad ., p_1$, кожду з невимірностий V_α величиною $\omega_\alpha^k V_\alpha$, де ω_α є p_α-им корінем з одиниції. Означім, що через ту заміну перейде

$$V_\nu,\ V_{\nu-1}, \qquad V_1;\ G_0,\ G_1, \qquad G_{p-1},$$

в

$$v_\nu,\ v_{\nu-1}, \qquad v_1;\ g_0,\ g_1, \qquad g_{p_1-1},$$

отже x_λ в

$$\xi_\lambda = g_0 + \omega^{\lambda-1}v_1 + g_2\omega^{2(\lambda-1)}v_1^2 + \qquad . + g_{p_1-1}\omega^{(p_1-1)(\lambda-1)}v_1^{p_1-1}. \quad (24)$$

Загал корінїв не може через те змінити ся, бо додане величини ω_α як сочинника не змінить обсягу вимірности величини α, отже x_λ може що найвисше перейти в x_μ, т. зн.

$$\xi_\lambda = x_\mu.$$

Зазначимо се так:

$$\left.\begin{aligned} g_0 + \quad v_1 + g_2 \quad v_1{}^2 + \ldots &= G_0 + \omega^{k-1} V_1 + G_2 \omega^{2(k-1)} V_1{}^2 + \ldots, \\ g_0 + \omega v_1 + g_2 \omega^2 v_1{}^2 + \ldots &= G_0 + \omega^{l-1} V_1 + G_2 \omega^{2(l-1)} V_1{}^2 + \ldots, \\ g_0 + \omega^2 v_1 + g_2 \omega^4 v_1{}^2 + \ldots &= G_0 + \omega^{m-1} V_1 + G_2 \omega^{2(m-1)} V_1{}^2 + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

В тих рівнанях вичерпаний загал корінїв; додаючи їх проте, одержимо

$$g_0 = G_0$$

(бо $\omega + \omega^2 + \ldots = 0$, а те саме мусить бути і по правій сторонї). Воно значить, що G_0 є вимірною функцією тих величин, які не змінюють ся через ту заміну; отже коли рівнане (1) є первого степеня, де V_1 є невимірністю степеня p, а инших виложників там нема, G_0 буде числом з обсягу (R).

Множачи лїві сторони рівнань чергою через 1, ω^{-1}, $\omega^{-2}, \ldots$ одержимо

$$\begin{aligned} p_1 v_1 = G_0(1 + \omega^{-1} + \omega^{-2} + \ldots) + V_1(\omega^{k-1} + \omega^{l-2} + \omega^{m-3} + \ldots) \\ + G_2 V_1{}^2(\omega^{2k-2} + \omega^{2l-3} + \omega^{2m-4} + \ldots) + \ldots; \end{aligned}$$

сочинник першого додатника є 0, инші нї; назвім їх в скороченю $p_1 \tilde{\omega}_1$, $p_1 \tilde{\omega}_2$, отже

$$v_1 = \tilde{\omega} V_1 + G_2 \tilde{\omega}_2 V_2 + \tag{26}$$

піднесїм те рівнане до степени p_1, то се дасть

$$v_1{}^{p_1} = (\tilde{\omega}_1 V_1 + G_2 \tilde{\omega}_2 V_2 + \ldots)^{p_1} = A_0 + A_1 V_1 + A_2 V_1{}^2 + \ldots;$$

всї $\tilde{\omega}$ містять ся в A. З огляду на те, що

$$V_1{}^{p_1} - F_1(R;\ V_\nu, \ldots,\ V_2) = 0,$$

маємо такі дві евентуальности:

1. V_1 вимірне в V_2, v_2; V_3, v_3; ..., — або
2. $v_1{}^{p_1} - A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0, \ldots$, (§. 64).

Перша евентуальність неможлива, друга дає

$$v_1{}^{p_1} = A_0,$$

т. зн. права сторона рівнаня (26) є одночленом з огляду на V_1

$$v_1 = \tilde{\omega}_\mu G_\mu V_1{}^\mu, \tag{27}$$

отже

$$\xi\lambda = g_0 + \omega^{\lambda-1}(\tilde{\omega}_\mu G_\mu V_1{}^\mu) + g_1 \omega^{2(\lambda-1)} \tilde{\omega}_\mu{}^\mu G_\mu V_1{}^\mu)^2 + \ldots$$
$$+ g_{p_1-1} \omega^{(p-1)(\lambda-1)} (\tilde{\omega}_\mu G_\mu V_1{}^\mu)^{p_1-1}; \tag{28}$$

отсе вираженє є заразом корінем рівнаня (1), отже мусить мати форму якогось x_k

$$\xi\lambda = G_0 + \omega^{k-1} V_1 + G_2 \omega^{2(k-1)} V_1{}^2 + \ldots + G_{p_1-1} \omega^{(p_1-1)(k-1)} V_1{}^{p_1-1}. \tag{29}$$

Порівнуючи сочинники обох правих сторін при рівних степенях величини V_1, маємо

$$\omega^{\lambda-1} \tilde{\omega}_\mu G_\mu = G_\mu \omega^{(\mu-1)(k-1)},$$

т. є $\omega^{\lambda-1}\tilde{\omega}_\mu = \omega^{(\mu-1)(k-1)}$, а врешті

$$v_1 = \omega^{(\mu-1)(k-1)-(\lambda-1)} G_\mu V_1{}^\mu.$$

З того слїдує, що коли величини V помножити ріжними p_ν-тими корінями з одиниці, $V_1{}^{p_1}$ перейде в

$$(G_\mu V_1{}^\mu)^{p_1}$$

VIII, Рівнаня подїлу кола*).

§! 74. Найпростїйшим типом рішимих рівнань є т. зв. чисті рівнаня (reine Gleichungen), звані також двочленними (binomische) або рівнанями подїлу кола (Kreisteilungsgleichungen).

Двочленне рівнане має форму

$$x^n = a + bi;$$

коли-ж одначе за незвісну x ввести $\dfrac{x}{|\sqrt{a+bi}\,|}$, одержимо:

$$x^n = 1. \tag{1}$$

Назва „рівнаня подїлу кола" походить звідси, що їх розвязку одержуємо з формули Moivre'a

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n} \; (k = 1,\ 2, \ldots, n); \tag{2}$$

коли-ж представимо ті корінї ґрафічно, відтинаючи дїйсні вартости на оси XX', мнимі на оси YY', то точки, які відповідають корінам,

---

*) Пор. знаменитий твір: P. Bachmann, Die Lehre von der Kreisteilung, Leipzig, Teubner, 1872.

будуть лежати на обводї кола в рівних відступах, отже **поділять обвід кола на n ріжних частий**.

Підносячи рівнанє (2) до l-тої степени, одержимо

$$(x_k)^l = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^l = \cos\frac{2kl\pi}{n} + i\sin\frac{2kl\pi}{n} = x_{kl},$$

отже знов корінь того рівнаня. Отсе **характеристична прикмета рівнань подїлу кола, що кожда степень одного з поміж його коpінїв є знова коренем** рівнаня, отже корінї рівнаня (1) можемо представити рядом:

$$\omega,\ \omega^2,\ \ldots,\omega^{n-1},\ \omega^n = 1, \tag{3}$$

де $\omega = x_1$.

Рівнанє (1) має один вимірний корінь: $x_0 = = 1$; подїлївши проте (1) двочленом $x - 1$, одержуємо **незведиме***) рівнанє степеня $n - 1$

$$f(x) = x^{n-1} + {}^{n-2} + \quad . + x + 1 = 0. \tag{4}$$

§. 75. Розвязуючи рівнанє (1), одержимо

$$x = \sqrt[n]{1};$$

звідси виходить, що n-тий корінь з одиницї має як раз n вартостий; отже корінї рівнаня (1) будемо називати також n-тими **корінями з одиницї** (n-te Einheitswurzel); розвязку $x_0 = 1$ назвемо **головною вартістю** (Hauptwert) n-того коріня з одиницї.

Безпосередно з рівнаня (1) виходить такий результат:

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = 0,$$
$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x^2_{n-1} = 0,$$

$$x_0^{n-1} + x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{n-1} = 0,$$
$$x_0^n + x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{n-1}^n = n,$$

бо сума всїх корінїв рівнаня (1) мусить бути $= 0$, суму квадратів можемо з огляду на згадану характеристичну прикмету рівнаня представити як суму других степений корінів і т. д., але вже

---

*) Про докази незведимости гл. напр. Weber, Algebra I. стр. 596; Netto, Substitutionentheorie, стр. 174; Bauer, Vorlesungen über Algebra, Leipzig, Teubner 1903, стр. 131.

кожда n-та степень коріня є $= 1$, отже їх сума $= n$. Взагалі маємо:

$$\Sigma x_i^k = 0, \text{ коли } k \not\equiv 0 \ (mod.\ n),$$
$$= n, \text{ коли } k \equiv 0 \ (mod.\ n), \qquad (5).$$

бо коли $k = nq$, то

$$x_i^k = x_i^{nq} = (x_i^n)^q = 1,$$

а коли $k = nq + r$, $(r < k)$, то

$$x_i^k = x_i^{nq} . x_i^r = 1 . x_i^r \neq 1.$$

§. 76. Коли ω є рівночасно m-тим і n-тим корінем з одиниції, то є також і $\Delta(m,\ n)$-тим корінем з одиниції, де $\Delta(m,\ n)$ означує найбільшу спільну міру чисел m і n. Приймім $m > n$, тоді є

$$\omega^m = \omega^{nq+r} = (\omega^m)^q . \omega^r ;$$

коли $\omega^m = 1$ і $\omega^n = 1$, то мусить бути і $\omega^r = 1$.

Коли ω є n-тим корінем з одиниції, то ω^t (t — ціле число) є також n-тим коренем, бо з дефініциї маємо $\omega^n = 1$, а тим самим $(\omega^t)^n = (\omega^n)^t = 1$. Длятого можемо утворити ряд (3), якого члени будуть повторювати ся періодично. Два вирази з того ряду не можуть бути рівні, бо коли би було

$$\omega^\alpha = \omega^\beta,$$

то з того слідувало би $\omega^{\alpha-\beta} = 1$; се суперечить з заложенем, що α і β є менші від n, отже і їх ріжниця є менша від n, а число n є першим виложником в ряді (1), для якого $\omega^n = 1$.

Величину ω називаємо **первісним n-тим корінем з одиниці** (primitive Einheitswurzel), коли ніякий попередний член з ряду (3) перед ω^n не є $= 1$; в противнім разі називаємо **непервісним корінем** (imprimitive E). Скількість всіх первісних корінів з одиниці обчисляємо так:

1. Коли n є перве число $n = p$, тоді всі члени ряду (3) є первісними корінями з одиниції, з виїмком $\omega^p = 1$, отже їх скількість є $p - 1$. Зазначім ту скількість символем $\varphi(p)$, то маємо;

$$\varphi(p) = p - 1 = p\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

2. Коли $n = p^\mu$, тоді маємо такий ряд:

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{p-1} ;\ \omega^p, \ldots, \omega^{p^2-1} ;\ \omega^p, \ldots, \ldots ;\ \omega^{p^{\mu-1}}, \omega^{p^{\mu-1}+1}, \ldots, \omega^{p^\mu-1} \quad (3a).$$

зложений з p_μ членів. Вирази $\omega^p, \omega^{p^2}, \ldots \omega^{p^{\mu-1}}$, 1 не є первісними корінями, бо для довільного $i < \mu$, $k < p$ є

$$(\omega^{kp^i})^{p^{\mu-i}} = 1,$$

отже вже $p^{\mu-i}$-та степень такої величини є $= 1$, а $p^{\mu-i} < m$. Таких величин є $p^{\mu-1}$, отже скількість первісних корінів є

$$\varphi(p^\mu) = p^\mu - p^{\mu-1} = p^\mu \left(p - \frac{1}{p}\right).$$

3. Для $n = r.s$, де r і s є зглядом себе первні, назвім r-тий корінь α, а s-тий β; тоді є:

$$\omega = \alpha^k \beta^l;$$

в тій формі можемо представити кождий первісний n-тий корінь, коли n є зложене число, бо

$$\omega^m = (\alpha^k)^m . (\beta^l)^m = (\alpha^r)^{ks} . (\beta^s)^{kr} = 1.$$

Дальше є всі коріні того виду ріжні, бо коли би було

$$\omega = \omega',$$

то мусїло би бути

$$\alpha\beta = \alpha'\beta',$$

а також і

$$\omega^r = \alpha^r\beta^r = \beta^r; \quad \omega'^r = \alpha'^r\beta'^r = \beta'^r,$$

отже було би $\beta = \beta'$, а анальоґічно й $\alpha = \alpha'$; отже до $\omega = \omega'$ ми брали би рівні величини з рядів для α і для β.

Легко обчислити $\varphi(rs)$. Маємо $\varphi(r)$ r-тих і $\varphi(s)$ s-тих первісних корінїв. Кожда комбінація одного r-того й одного s-того первісного кореня дасть первісний rs-тий корінь, бо треба її підносити аж до степени rs, щоби одержати 1. Таких комбінацій є $\varphi(r)\,\varphi(s)$, отже

$$\varphi(rs) = \varphi(r)\varphi(s).$$

4. Подібно знайдемо $\varphi(rs\ldots t) = \varphi(r)\varphi(s)\ldots\varphi(t)$, а вважаючи числа $r, s, \ldots, t$ первними між собою, т. є

$$r = p_1^{\mu_1}, \quad s = p_2^{\mu_2}, \ldots, \quad t = p_\lambda^{\mu_\lambda}.$$

маємо

$$n = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \ldots p_\lambda^{\mu_\lambda},$$

отже:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_\lambda}\right). \tag{6}$$

Се т. зв- взір Gauss'а з теорії чисел; він подає скількість всїх чисел, менших від n, які є зглядом n перві *).

§. 77. Розвязку рівнань подїлу кола подав в альґебраічний спосіб перший Gauss **). Він доказав, що рівнанє виду (1) можемо все розвязати альґебраічними (т. є непереступними) величинами, а в деяких разах також подати ґрафічну розвязку такого рівнаня при помочи лїнеалу й циркля.

Метода Gauss'а (змодіфікована Бахманом) полягає на такім поступованю (для короткости приймаємо, що n є перве число, $n = p$; коли n є зложене число, зводить ся задача до кількох простїйших проблємів).

До кождого первого числа p дасть ся знайти таке число g, що в рядї

$$g,\ g^2,\ g^3, \quad \ldots,\ g^{p-1} \qquad (7)$$

нї одно з чисел дїлене через p, не дасть останка 1, аж тільки g^{p-1}; таке число g називаєть ся **первісним корінем** p (primitive Wurzel von p). Числа ряду (7), дїлені через p, дадуть останки 1, 2, 3, $\ldots$, $p-1$, — розуміє ся, не в тім самім порядку. Що так є, виходить із слїдуючого:

1. Всїх чисел в рядї (7) є $p-1$, отже стілько буде останків з дїленя; всї вони будуть менші від p;

2. Два останки не можуть бути рівні, бо тодї було би ($\alpha > \beta$)

$$g^\alpha = kp + r,$$
$$g^\beta = lp + r,$$

отже: $g^\alpha - g^\beta = g^\beta(g^{\alpha-\beta} - 1) = (k-l)p$: тодї мусїло би бути або g^β або $g^{\alpha-\beta} - 1$ подїльне через p, а обі ті евентуальности є виключені.

§. 78. Знайшовши перісний корінь g, розкладаємо число $p-1$ на два чинники: $p - 1 = a.b$, де a є перве число; уживаючи скороченя

$$\omega^m = [m],$$

творимо такі періоди:

$$(b,\lambda) = [\lambda] + [\lambda g^\alpha] + [\lambda g^{2\alpha}] + \quad \ldots + [\lambda g^{(b-1)a}], \qquad (8)$$

де λ може мати вартости: $g^0 = 1$, g^1, g^2, $\ldots$ g^{a-1}; для $\lambda = 0$ або $= g^\alpha$ одержимо $(b, \lambda) = b$, т. зв. **невластиву періоду**.

*) Нпр. P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, Sammlung Schubert, Leipzig, Göschen 1907, стр. 24.

**) Disquisitiones arithmeticae, sectio VII; Werke, т. 1. Göttingen, 1876.

Таким чином маємо:

$$\left.\begin{aligned}
(b,\ 1) &= [1] + [g^a] + [g^{2a}] + \ldots + [g^{(b-1)a}],\\
(b,\ g) &= [g] + [g^{a+1}] + [g^{2a+1}] + \ldots + [g^{(b-1)a+1}],\\
(b,\ g^2) &= [g^2] + [g^{a+2}] + [^{2a+2}] + \ldots + [g^{(b-1)a+2}],\\
&\ldots\\
(b,\ g^k) &= [g^k] + [g^{a+k}] + [g^{2a+k}] + \ldots + [g^{(b-1)a+k}],\\
&\ldots\\
(b, g^{a-1}) &= [g^{a-1}] + [g^{2a-1}] + [g^{3a-1}] + \ldots + [g^{ab} - 1];
\end{aligned}\right\} \quad (8a)$$

отже маємо a період, кожду по b членів, разом ab членів. Ті періоди одержуємо по просту так, що упорядкувавши корінї рівнаня (1) по виложниках ряду (7):

$$\omega^g,\ \omega^{g^2},\ \omega^{g^3},\ \ldots\ \omega^{g^{p-}} \quad (7a)$$

вибираємо чергою по однім членї до кождої із a період і т. д.

Періоди (8а) можна представити як корінї рівнаня степеня a о вимірних сочинниках. Називаючи:

$$(b,\ 1) = b_0,\ (b,\ g) = b_1,\ \ldots,\ (b,\ g^k) = b_k,\ \ldots\ (b,\ g^{a-1}) = b_{a-1},$$

маємо те рівнанє:

$$F(z) \equiv (z - b_0)(z - b_1)\ldots(z - b_{a-1}) = z^a - \sigma_1 z^{a-1} + \sigma_2 z^{a-2} - \ldots - \sigma_a = 0, \quad (9)$$

де σ_i є симетричними функціями період. Ті симетричні функції можна легко обчислити:

$$\sigma_1 = \sum_{k-1}^{a-1}(b\, g^k) = -1 \text{ (перший сочинних рівнаня } f(x) = 0).$$

Щоби обчислити σ_2, творимо:

$$b_\lambda \,.\, b_\mu = \left\{[\lambda] + [\lambda g^a] + [\lambda g^{2a}] + \ldots + [\lambda g^{(b-1)a}]\right\}$$
$$\times \left\{[\mu] + [\mu g^a] + [\mu g^{2a}] + \ldots + [\mu g^{(b-1)a}]\right\};$$

множимо перше ті вирази, які стоять під собою; з огляду на те, що $[\lambda] + [\mu] = [\lambda + \mu]$, бо $\omega^\lambda \,.\, \omega^\mu = \omega^{\lambda+\mu}$, маємо таку суму:

$$[(\lambda + \mu) + [(\lambda + \mu)g^a] + [(\lambda + \mu)g^{2a}] + \ldots + [(\lambda + \mu)g^{(b-1)a}] = b_{\lambda+\mu}.$$

Тепер множимо кождий вираз λ тим μ, що стоїть під ним о одно місце на право і одержуємо:

$$[\lambda + \mu g^a] + [(\lambda + \mu g^a)g^a] + [(\lambda + \mu g^a)g^{2a}] + \ldots + [(\lambda + \mu g^a)g^{(b-1)a}] = b_{\lambda + \mu g^a}$$

остатнїй вираз відповідає добуткови $[\lambda g^{(b-1)a}]\,.\,[\mu]$. Дальше множимо о 2 місця на право:

$$[\lambda+\mu g^{2a}]+[(\lambda+\mu g^{2a})g^{a}]+\cdot\quad\cdot=b_{\lambda+\mu g^{2a}},$$

вкінці о $(b-1)$ місць на право (т. є о одно місце на лїво):

$$[\lambda+\mu g^{(b-1)a}]+[\lambda+\mu g^{(b-1)a})g^{a}]+\cdot\quad\cdot=b_{\lambda+\mu g^{(b-1)a}},$$

отже:

$$b_\lambda\, b_\mu=b_{\lambda+\mu}+b_{\lambda+\mu g^{a}}+b_{\lambda+\mu g^{2a}}+\cdot\quad\cdot+b_{\lambda+\mu g^{(b-1)a}}, \quad (10)$$

т. зн., що добуток двох період є сумою $(b-1)$ період, утворених подібним способом, як періоди (8).

Творячи добутки ріжних період, одержуємо результат: **Кожду вимірну функцію, утворену в період, можемо представити сумою подібних період.** Таким чином є всі σ вимірними функціями період, т. зн. є вони сумами період. Ті суми можна обчислити в кождім окремім випадку.

Візьмім найпростїйший випадок, з якім маємо до діла при кождім такім рівнаню, а саме; $a=2$, бо $p-1$ є паристе число: $p-1=2b$. Тоді маємо дві періоди по b членів:

$$b_0=[1]+[g^2]+[g^4]+\ldots+[g^{2(b-1)}],$$
$$b_1=[g]+[g^3]+[g^5]+\ldots+[g^{2b-1}];$$

вони є коріннями квадратного рівнаня $z^2-\sigma_1 z+\sigma_2=0$,

де $\sigma_1=b_0+b_1=-1$,

$$\sigma_2=b_0\,.\,b_1=b_1+b g^2+b g^{4b}+\ldots+b g^{2b};$$

ті періоди се нїчо инше, як тільки b_0 і b_1 на переміну, бо $b g^2=b_1$ і т. д., отже $b_0\,.\,b_1=\frac{b}{2}(b_0+b_1)=-\frac{b}{2}$. Звідси:

$$F(z)\equiv z^2+z-\frac{b}{2}=0 \quad (9a)$$

т. є

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1+2b}}{2}.$$

Знак при b_0 і b_1 добираємо після тригонометричних вартостий коріньів; маємо именно

$$\omega=\cos\frac{2k\pi}{p}+i\sin\frac{2k\pi}{p};$$

$$b_0=\{[1]+[g^{2(b-1)}]\}+\{[g^2]+[g^{2(b-2)}]\}+\ldots$$
$$b_1=\{[g]+[g^{2b-1}]\}+\{[g^3]+[g^{2b-3}]\}+\ldots,$$

Вартість першої скобки $\{\ \}$ в b_0 є $[1]+[-1]$, бо $\omega g^{2(b-1)}=\omega^{-1}$, а $[1]+[-1]=\left(\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{p}-i\sin\frac{2\pi}{p}\right)=2\cos\frac{2\pi}{p}$;

анальоґічно буде друга скобка $[g^2]+[-g^2]=2\cos\frac{4\pi}{p}$ і т. д., отже загалом:

$$b_0=2\left\{\cos\frac{2\pi}{p}+\cos\frac{4\pi}{p}+\ldots\right\};$$

після того, яка є вартість скобки $\{\ \}$, беремо при b_0 знак $+$ або $-$, а при b_1 противний знак.

Кладучи $\varepsilon^2=1$, маємо врешті:

$$b_0=\frac{1+\varepsilon\sqrt{1+2b}}{2},\ b_1=\frac{-1-2\sqrt{1+2b}}{2}.$$

§. 79. Тепер розкладаймо b на два чинники: $b=cd$, де c є перве. З кождої періоди b_λ творимо c нових по d виразів так, що беремо з неї чергою по однім члені до кождої періоди.

I. b_0 дасть;

$$d_0=[1]+[g^{ca}]+[g^{2ca}]+\ldots+[g^{(d-1)ca}],$$
$$d_a=[g^a]+[g^{(c+1)a}]+[g^{(2c+1)a}]+\ldots+[g^{((d-1)c+1)a}],$$
$$d_{2a}=[g^{2a}]+[g^{(c+2)a}]+[g^{(c+2)a}]+[g^{(2c+2)a}]+\ldots\ [g^{(d-1)h+2)a}],$$

$$d_{(c-1)a}=[g^{(c-1)a}]+[g^{(2c-1)a}]+[g^{(3c-1)a}]+\ldots+[g^{(d-1)ca+1}];$$

кождий з виложників при g є многократю числа a.

II. b_1 розібємо на:

$$d_1=[g]+[g^{ca+1}]+[g^{2ca+1}]\ldots+[g^{(d-1)ca+1}]$$
$$d_2=[g^{a+1}]+[g^{(c+1)a+1}]+[g^{(2c+1)a+1}]+\quad+[g^{((d-1)c+1)a+1}],$$

кождий з виложників є форми $ka+1$; і т. д. Вирази, що повстають з b_λ, будуть мати виложники $ka+\lambda$.

Члени першої ґрупи, d_0, d_a, $d_{2a}, \ldots$, $d_{(c-1)a}$, залежать від рівнаня степеня c, якого сочинники є вимірними функціями тих періоді, а їх симетричні функції є періодами b.

Таких рівнань степеня c є a; всї вони є до себе подібні так, що з одного до другого можемо перейти через субституції показчиків d:

$$s=|\,z\quad z+1\,|\ (mod.\ a).$$

Тепер розкладаємо дальше: $d = ef$, де e є перве число; $f = gh$, g є перве число, і т. д., аж дійдемо до $k = lm$, де l і m є перві числа. Тоді маємо вже: $m = m \cdot 1$, отже будемо мати m одночленних період, а ними будуть самі корінї ω.

З того виходить, що рівнане подїлу кола степеня n розвязуємо, розкладаючи $n-1$ на перві чинники $n-1 = aceg \ldots lm$. Коли всї ті числа є $= 2$, отже $p - 1 = 2^\mu$, тодї маємо самі квадратні рівнаня. В такім разї можемо перевести ґеометричну конструкцію коріньв даного рівнаня при помочи лінії й циркля.

Щоби $p = 2^\mu + 1$ було первим числом, мусить бути $\mu = 2^\nu$ (Gauss), бо коли-б μ мало ще инші перві чинники крім 2, нпр. $\mu = 2^\nu . t$, то p було би подїльне через $2^{2^\nu} + 1$; бо положім $2^{2^\nu} = A$, то маємо:

$$2^{2^\nu \cdot t} + 1 = (2^{2^\nu})^t + 1 = A^t + 1,$$

отже:

$$\frac{A^t + 1}{A + 1} = A^{t-1} - A^{t-2} + \qquad \pm 1,$$

т. зн. той квот є цїлим числом. З другої сторони переконано ся що не всї числа форми $p = 2^{2^\nu} + 1$ є перві. Для $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ одержуємо:

$$p = 3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65537,$$

самі перві числа; зате для $\nu = 5$ одержуємо число, подїльне через 641. Дальші числа тої форми зложені є для $\nu = 12$ і $\nu = 23$.

Для $p = 5$ і $p = 17$ можна легко виконати дїйсну ґеометричну конструкцію *).

IX. Рівнаня Абеля.

§. 80. Узагальнюючи прикмету, яка була характеристична для рівнань подїлу кола, приймім, що кождий корінь незведимого рівнаня

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

можна представити як вимірну функцію попереднього. Назвім перший корінь x_1, а ту функцію $\varphi(x)$, то одержимо ряд:

$$x_1,\ x_2 = \varphi(x_1),\ x_3 = \varphi(x_2), \qquad x_k = \varphi(x_{k-1}), \tag{2}$$

---

*) Пор. нпр. Netto, Substitutionentheorie стр. 181., Serret, Algèbre II. стр. 565, etc.

Рівнане (1) має корінї: $x_1, x_2, x_3, \ldots$, отже коли ми величини (2) вставимо в те рівнане, то одержимо правдиві реляції

$$f(x_k) = f[\varphi(x_{k-1})] = 0. \qquad (1')$$

Ті корінї можемо представити також так:

$$x_3 = \varphi\{\varphi(x_1)\},\ x_4 = \varphi[\varphi\{\varphi(x_1)\}], \ldots, \qquad (2')$$

а уживаючи скорочень: $\varphi\{\varphi(x_1)\} = \varphi^2(x_1), \ldots$, маємо

$$x_3 = \varphi^2(x_1),\ x_4 = \varphi^3(x_1), \ldots, x_k = \varphi^{k-1}(x_1), \qquad (2'')$$

Сей остатнїй ряд не може бути безконечний, бо скількість корінів рівнаня є скінчена; проте мусять деякі вирази того ряду повторювати ся. Приймім, що перші вирази, які є собі рівні, є $\varphi^k(x_1)$ і $\varphi^{m+k}(x_1)$; звідси виходить, що $k = 0$, і $\varphi^m(x_1) = x_1$, отже ряд (2) буде мати такі ріжні між собою члени:

$$x_1\ \varphi(x_1),\ \varphi^2(x_1), \ldots, \varphi^{m-1}(x_1) \qquad (2a)$$

Ті члени є дїйсно ріжні; се слїдує з заложеня, бо перший член, який має повторити ся, є $\varphi^m(x_1)$.

Коли $n = m$, то ряд (2a) обіймає всї корінї рівнаня; коли-ж $n > m$, то лишили ся ще деякі корінї поза тим рядом. Приймім, що якесь x_2 є одним із корінів, необнятих рядом (2a); тодї можемо утворити другий такий ряд, в якім замість x_1 приходить елемент x_2, отже одержимо:

$$x_2,\ \varphi(x_2),\ \varphi^2(x_2), \ldots, \varphi^{\mu-1}(x_1): \qquad (3)$$

μ мусить бути $= m$, бо функція φ є в обох разах та сама, отже по $(m-1)$ повторенях мусимо прийти до первісного коріня.

Члени обох рядів є ріжні; бо коли би було нпр.

$$\varphi^a(x_1) = \varphi^b(x_2);$$

то виконуючи на обох сторонах операцію φ^{m-a}, одержали-б ми:

$$\varphi^{a+m-b}(x_1) = \varphi^m(x_2).$$

т. є

$$x_2 = \varphi^{a-b}(x_1)$$

а з того слідувало би, що x_2 належить до першого ряду, отже суперечність.

Коли $n = 2m$, то ряди (2a) і (3) вичерпали вже всї корінї рівнаня (1); в противнім разї зістали ще дальші корінї, з яких можемо утворити третїй ряд

$$x_3,\ \varphi(x_3),\ \varphi^2(x_3), \ldots, \varphi^{m-1}(x_3),$$

і т. д. аж вичерпаємо всї корінї.

Звідси виходить, що степень рівнаня (1) є многократю числа m.

Отже, коли корінї рівнаня (1) мають ту прикмету, що кождий корінь є функцією иншого корiня, то їх можна уложити в таблицю:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1, & \varphi(x_1), & \varphi^2(x_1), & \varphi^{m-1}(x_1), \\ x_2, & \varphi(x_2), & \varphi^2(x_2), & \varphi^{m-1}(x_2), \\ & & & \\ x_\nu, & \varphi(x_\nu), & \varphi^2(x_\nu), & , \varphi^{m-1}(x_\nu); \end{array}\right\} \quad (4)$$

тут є: $\varphi^m(x_k) = x_k$ для кождого рядка. Степень рівнаня є $n = m\nu$.

§. 81. Ґрупа рівнаня (1) є непервісна. Нам вільно переставлювати елементи в кождім рядку, уживаючи циклїчної субституції

$$c_\lambda = | \, x_\lambda \;\; \varphi(x_\lambda) \, | \; ;$$

отже ті субституції творять ґрупу порядку m^ν, бо циклїв є ν, а кождий з них є m-того степеня. Кожда инша субституція, яка заступить x_1 елементами: $x_2, x_3, \ldots, x_\nu$, переведе цілий перший рядок в другий, в третїй, ..., в ν-тий. Таких субституцій є $\nu!$, отже порядок цілої ґрупи буде $\nu! \; m^\nu$. Ґрупа є непервісна; вона має ν кляс по m елементів.

§. 82. Приймім, що степень рівнаня (1) є зложений: $n = m\nu$. Доказано, що тоді можна розвязку рівнаня (1) звести до розвязки ν рівнань степеня m, які маюиь корінї, відповідаючі рядкам таблиці (4).

Утворім ресольвенти Lagrange'a

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + \varphi(x_1) + \varphi^2(x_1) + \qquad + \varphi^{m-1}(x_1), \\ X_2 &= x_2 + \varphi(x_2) + \varphi^2(x_2) + \qquad + \varphi^{m-1}(x_2), \\ & \\ X_\nu &= x_\nu + \varphi(x_\nu) + \varphi^2(x_\nu) + \qquad \varphi^{m-1}(x_\nu). \end{aligned}$$

Субституції ґрупи рівнаня (1) не змінюють поодиноких ресольвент, тільки або їх перемінюють поміж собою, або переставлюють лише поодинокі додайники. Отже функція X_k є ν-вартісна; до X_1 належить ґрупа тих m^ν субституцій, які переставлюють елементи в нутрі поодиноких рядків, скомбінована з ґрупою, яка переставлює позісталих $\nu - 1$ рядків. Її порядок є проте: $(\nu - 1)! \; m^\nu$.

Симетричні функції величин X можна представити сочинниками рівнаня (1), бо вони мають ту саму ґрупу, що дане рівнане, отже є вони корінями рівнаня степеня ν:

$$\Phi(X) = (X - X_1)(X - X_2) \qquad (X \quad X_\nu) = 0. \qquad (5)$$

§ 83. Знаючи одну з тих ресольвент, можемо розвязувати рівнане дальше методою, поданою в попереднім розділї. Творимо циклїчні функції:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= x_1 + \omega\psi(x_1) + \omega^2\varphi^2(x_1) + \ldots + \omega^{m-1}\varphi^{m-1}(x_1), \\ \psi_2 &= x_1 + \omega^2\varphi(x_1) + \omega^4\varphi^2(x_1) + \ldots + \omega^{2(m-1)}\varphi^{m-1}(x_1), \\ & \\ \psi_{m-1} &= x_1 + \omega^{m-1}\varphi(x_1) + \omega^{(2m-1)}\varphi^2(x_1) + \ldots + \omega^{(m-1)2}\varphi^{m-1}(x_1): \end{aligned}\right\} (6)$$

коли утворимо функцію

$$\psi_\alpha \,.\, \psi_1{}^{m-\alpha} = T_\alpha,$$

то та функція буде незмінна для ґрупифункції X_1, яка ставить $\varphi(x_1)$ замість x_1; отже функції T можна представити вимірно величиною X_1.

Для $\alpha = 1$ маємо

$$T_1 = \psi_\alpha{}^m,$$

а для инших є

$$\psi_\alpha = \frac{T_\alpha}{\psi_1{}^m}\psi_1{}^\alpha = \frac{T_\alpha}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^\alpha \qquad (7)$$

Вставляючи ті вартости в лїві сторони рівнань (5) і узглядняючи, що

$$X_1 = x_1 + \varphi(x_1) + \varphi^2(x_1) + \ldots + \varphi^{m-1}(x_1),$$

одержимо:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{m}\left[X_1 + \sqrt[m]{T_1} + \frac{T_2}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^2 + \ldots + \frac{T_{m-1}}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^{m-1}\right], \\ \varphi(x_1) &= \frac{1}{m}\left[X_1 + \omega^{-1}\sqrt[m]{T_1} + \omega^{-1}\frac{T_2}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^2 + \ldots + \omega^{(m-1)}\frac{T_{m-1}}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^{m-1}\right], \\ & \\ \varphi^{m-1}(x_1) &= \frac{1}{m}\left[X_1 + \omega^{-(m-1)}\sqrt[m]{T_1} + \omega^{-2(m-1)}\frac{T_2}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^2 + \ldots \right. \\ &\qquad \left. + \,\omega^{-(m-1)^2}\frac{T_{m-1}}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^m\right]. \end{aligned}\right\} (8)$$

З того бачимо, що корінї рівнаня (1) представили ми в тій формі, до якої дійшли в теорії рішимих рівнань.

Та ми тут не маємо ще всїх корінів рівнаня (1), тільки один рядок таблиці (4). Заступаючи X_1 анальоґічними величинами $X_2, \ldots, X_\nu$, одержимо за кождим разом нових m корінів, отже загалом $m\nu$ корінів рівнаня (1).

§ 84. Коли степень рівнаня (1) є первим числом, то в поданій тут розвязці маємо повну розвязку рівнаня. Величина X_1 буде тут одинока того рода; буде вона сумою всїх корінїв рівнаня, отже першим сочинником рівнаня з противним знаком: $-c_1$. Звідси слїдує

I. Твердженє. Рівнанє первого степеня, якого кождий корінь є функцією попереднього, є рішиме.

Коли число m є зложене: $m = m_1, m_2$, мусимо зважити, що добуванє зложеного кореня розкладаєть ся на два корінованя о виложниках первих. Заступім в рівнаню на ψ_1 ω корінем рівнаня $\omega_1{}^{m_1} = 1$:

$$\psi_1 = [x_1 + \varphi^{m_1}(x_1) + \varphi^{2m_1}(x_1) + \ldots + \varphi^{(n_1-1)m_1}(x_1)]$$

$$+ \omega_1[\varphi(x_1) + \varphi^{m_1+1}(x_1) + \varphi^{2m_1+1}(x_1) + \ldots + \varphi^{(n_1-1)m_1+1}(x_1)]$$

$$+$$

$$+ \omega_1{}^{m_1-1}[\varphi^{m_1-1}(x_1) + \varphi^{2m_1-1}(x_1) + \varphi^{3m_1-1}(x_1) + \ldots + \varphi^{n_1m_1-1}(x_1)];$$

назвім вирази в гранчастих скобках: $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{m_1-1}$, то будемо мати:

$$\psi_1 = \chi_0 + \omega_1\chi_1 + \omega_1{}^2\chi_2 + \ldots + \omega_1{}^{m_1}\chi_{m_1-1}.$$

Функція $T_1 = \psi_1{}^{m_1}$ є незмінна для субституцій $| x_1 \ \varphi(x_1) |$; таксамо функція $T_a = \psi_a \psi_1{}^{m_1-a}$ буде незмінна для тих самих субституцій, отже можна ті функції представляти вимірно в X_1. Анальоґічно як перше маємо:

$$\chi_a = \frac{1}{m_1}\left[[X_1 + \omega_1{}^{-a}\sqrt[m]{T_1} + \omega_1{}^{-2a}\frac{T_2}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^2 + \cdot \quad \right]. \quad (8)$$

Обчисливши одну з величин χ_1, можемо обчислити симетричні функції величин, які стоять в тім χ як додатники, бо всї вони мають ту саму ґрупу. Таким чином можемо обчислити всї m корінїв даного рівнаня, долучивши до обсягу вимірности m_1-ший і n_1-ший корінь з одиниці.

Те саме поступованє можемо приміняти, коли m має більше перших чинників: $m = m_1 \ m_2 \ \ m_\chi$. Тоді долучуємо m_1-ший, m_2-ий, $\ldots, m_\chi$-тий корінь з одиниці і маємо витягнути корінї з тими самими виложниками з величин, які можна представити вимірно сочинниками даного рівнаня і долученими величинами.

Коли $m = 2^p$, рівнане зводить ся до витяганя p квадратних корінїв.

Таким чином маємо доказане

II. Твердженє. Рівнаня зложених степенїв, яких корінї можна роздїлити на кляси о рівній скількости членів так, що кождий корінь можна представити як вимірну функцію попереднього, т. є коли можна уставити корінї в таблицю

$$\left.\begin{array}{l} x_1,\ \varphi(x_1),\ \varphi^2(x_1), \ldots,\ \varphi^{m-1}(x_1)\ ;\ [\varphi^m(x_1) = x_1]\ ; \\ x_2,\ \varphi(x_2),\ \varphi^2(x_2), \ldots,\ \varphi^{m-1}(x_2)\ ;\ [\varphi^m(x_2) = x_2]\ ; \\ \\ x_\nu\ \ \varphi(x_\nu),\ \varphi^2(x_\nu), \ldots,\ \varphi^{m-1}(x_\nu)\ ;\ [\varphi^m(x_\nu) = x_\nu]\ ; \end{array}\right\} \quad (1)$$

є рішимі.

§. 85. Рівнаня, якими саме займаємо ся, мають ще одну характеристичну прикмету.

Напишім: $\varphi^\alpha(x_i) = \varphi_\alpha(x_i)$, $\varphi^\beta(x_i) = \varphi_\beta(x_i)$, $\varphi_\gamma(x_i) = \varphi_\gamma(x_i)$. Коли ми на x_i виконаємо з черги два ріжні функційні символї, нпр. φ_α і φ_β, одержимо символь, якого виложником буде $\alpha + \beta$, отже $\varphi_{\alpha+\beta}$; назвім його φ_γ, отже:

$$\varphi_\alpha[\varphi_\beta(x_i)] = \varphi_\alpha\varphi_\beta(x_i) = \varphi_\gamma(x_i).$$

Так само буде, коли ми змінимо порядок φ_α і φ_β:

$$\varphi_\beta[\varphi_\alpha(x_i)] = \varphi_\beta\varphi_\alpha(x_i) = \varphi_\gamma(x_i),$$

бо ми тут виконали в обох разах функційний символь $\alpha + \beta$ разів. Звідси слїдує, що коли φ і ψ означують два які небудь функційні символї, які подають звязь між корінями рівнаня (1), то порядок виконуваня тих символїв є довільний:

$$\varphi[\psi(x)] = \psi[\varphi(x)] \qquad (9)$$

Рівнаня, які мають ту прикмету, називають ся Абелевими*). Всї рівнаня, про які ми тут говорили, є Абелевими, бо сповняють умову (9). Отже

III. Твердженє. Абелеві рівнаня є рішимі.

---

*) Abel, Mémoire sur une classe d' équations resolubles algèbriquement. Crelle's Journal, 4 т. 1829; Oeuvres, т. 1. стр. 418. Назва походить від Jordan'a (Traité, §. 402) і Kronecker'a (Monatsberichte, Berlin, 1853).

Коли Абелеве рівнане є зведиме, то кождий з його незведимих чинників є опять Абелевим рівнанем*), отже ми будемо говорити виключно про **незведимі Абелеві рівнаня.**

Абелеве рівнане первого степеня називаємо **поодиноким** або також **цикл ї чним**. Отся друга назва походить звідси, що всі коріні того рівнаня можемо замкнути в один цикль, якого кождий член буде функцією попереднього. Ґрупа того рівнаня є **циклїчна**, бо тільки ті субституції не змінять функцій корінїв, які пересувають показчик о ту саму скількість місць.

Абелеві рівнаня зложених степенїв називаємо **вложеними** або **Абелевими рівнанями висших рядів** (höheren Ranges)**): число ν називаеть ся **рядом** (Rang) Абелевого рівнаня.

§. 86 **IV. Твердженє. Ґрупа Абелевого рівнаня є перемінна, якої порядок є рівний її степеневи.**

Доказ. 1. Кожду субституцію перемінної ґрупи представляли ми в виді

$$s = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \dots s_\nu^{\alpha_\nu} \tag{10}$$

Перемінну ґрупу G можемо розложити на части, які є опять Абелевими ґрупами, а порядок ґрупи G є добутком з порядків складових ґруп. Нехай одна із складових ґруп G_1, порядку r_1, має субституції форми

$$t_1 = s_a^{\alpha_a} s_b^{\alpha_b} \dots,$$

друга ґрупа G_2, порядку r_2, субституції

$$t_2 = s_c^{\alpha_c} s_d^{\alpha_d} \dots,$$

і т. д., то ґрупа G скомбінована в всїх тих частий, буде мати субступуції

$$s = s_1^{\alpha_1} \; s_2^{\alpha_2} \; b_3^{\beta_3} \dots;$$

її порядок буде $n = r_1 r_2 \dots r_\nu$.

2. Нехай до ґрупи G_1 належить функція φ; коли на нїй виконаємо субституцію $s_c = s_a s_b$, то одержали-б ще иншу вартість φ_c, до якої могли-б ми дійти ще й так, що виконали-б перше s_b, а опісля s_a, бо ті субституції є перемінні.

Примінїм се до корінїв Абелевих рівнаня

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

степеня n. Коріні того рівнаня укладали ми в ν рядків по m членів

$$x_i, \; \varphi(x_i), \; \varphi^2(x_i), \dots, \; \varphi^{m-1}(x_i); \; (i = 1, \; 2, \qquad \nu). \tag{4}$$

---

*) Vogt, Leçons, стр. 140.

**) Netto, Algebra, II. стр. 273.

Доберім сей розклад так, щоби m було первим числом. Ґрупа Абелевого рівнаня може мати тільки такі субституції, які переводять члени тільки в нутрі того самого рядка, або перемішують рядки поміж собою. Субституції першого рода дадуть циклїчну ґрупу порядку m, субституції другого циклїчну ґрупу порядку ν. Скомбінувавши обі ґрупи разом, одержимо перемінну ґрупу порядку $n = m\nu$, отже порядок ґрупи Абелевого рівнаня є рівний степеневи рівнаня, а тим самим і степеневи ґрупи.

3. Що згадана ґрупа є перемінна, виходить з того, що кожда циклїчна ґрупа з окрема є перемінна; назвім субституції першого рода σ, а другого рода τ, то субституції скомбінованої ґрупи будуть

$$s = \sigma^\alpha \tau^\beta \ (\alpha = 0, 1, \ldots m; \ \beta = 0, 1, \ldots, \nu). \qquad (15)$$

Звідси походить назва Абелевих ґруп.

§. 87. На основі того можемо значно зредукувати проблєм розвязки Абелевих рівнань.

V. Твердженє. Абелеве рівнанє степеня

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\nu^{\alpha_\nu} \qquad (16)$$

можна звести до розвязки цїлого ряду Абелевих рівнань степенів: $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_\nu^{\alpha_\nu}$.

Доказ. Приймім для прозорости $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$. Ґрупа Абелевого рівнаня степеня n матиме порядок n, отже буде мати в собі два роди субституцій такі, яких порядок є дїльником числа $p_2^{\alpha_2}$, отже можемо написати:

$$s = \sigma^{\beta_1} \tau^{\beta_2},$$

де σ й τ є тими двома родами субституцій; оба вони творять окремі ґрупи (циклїчні) Σ і T.

Назвім функцію, яка належить до циклїчної ґрупи Σ, φ, а функцію ґрупи T, ψ. Функція φ має тільки вартостий, кілько виносить порядок ґрупи Σ, т. є $p_1^{\alpha_1}$, отже залежить від рівнаня степеня $p_1^{\alpha_1}$; те рівнанє є Абелеве, бо його ґрупа Σ є перемінна. Так само функція ψ залежить від Абелевого рівнаня степеня $p_2^{\alpha_2}$.

Утворім тепер при помочи двох вимірних величин A і B нову функцію

$$X = A\varphi + B\psi, \qquad (17)$$

то та функція буде належати до ґрупи 1, отже всї функції корінів обох рівнань буде можна нею представити, а передовсїм самі корінї. Значить, що щоби знайти корінї рівнаня (1), треба розвязати одно рівнане степеня $p_1^{\alpha_1}$ і одно степеня $p_2^{\alpha_2}$, а потім з корінів тих рівнань утворити лінїйні функції χ, якими можна представити коріні рівнаня (1).

Тиким чином наше твердженє доказане; воно вчить, що вистарчить знати, як розвязувати Абелеві рівнаня степеня p^α, де p є перве число.

§. 88. **VI. Твердженє.** Розвязку Абелевого рівнаня степеня p^α можна звести на розвязку цїлого ряду незведимих Абелевих рівнань степеня p.

Доказ. Ґрупа Абелевого рівнаня має виключно субституції порядку p або порядку p^λ; назвім p^λ порядок тої субституції, яка має найвисший порядок. Всї ті субституції ґрупи G, яких порядок доходить тільки до $p^{\lambda-1}$, творять ґрупу H.

Коли порядок ґрупи H є p^a, то функція φ, яка належить до тої ґрупи, буде мати $p^{\alpha-a}$ вартостий, отже буде залежати від рівнаня такого степеня. Коли на φ виконаємо субституцію τ з поза ґрупи G, то одержимо тільки p вартостий тої функції, бо τ^p належить вже до ґрупи H, отже субституції ґрупи, до якої належить та функція φ, мають всї порядок p. Рівнанє для φ є Абелеве степеня p.

Коли знаємо φ, то ґрупа рівнаня редукує ся до H; з нею повторимо той сам процедер. Субституції, яких порядок є $<p^{\lambda-2}$, творять ґрупу J, до якої належить функція ψ; та функція є з огляду на ґрупу H p-вартісна, отже залежить від Абелевого рівнаня степеня p з ґрупою того самого порядку, і т. д.

Коли $\lambda=1$, одержуємо α Абелевих рівнань степеня p, бо ґрупа G буде редукувати ся все на низшу о показчику p; отже по α кроках дійдемо до ґрупи 1. Назвім функцію, що належить до ґрупи H, φ, до слїдуючої ґрупи $\psi,\ldots$, а до передостатньої ґрупи, порядку p, ω; тодї маємо: функція

$$\xi = A\varphi + B\psi + \ldots + E\omega$$

належить до ґрупи 1; нею можемо представити всї коріні даного рівнаня (1), а щоби її знати, мусимо розвязати α рівнань степеня p.

§. 89. **VII. Твердженє.** Ґрупа Абелевого рівнаня степеня p^α є аритметичною ґрупою степеня p^α о α показчиках (*mod.* p).

Доказ. Коріні Абелевого рівнаня можна представити також так, що дамо їм по α показчиків:

$$x_{h_1 h_2 \ldots h_\alpha} = (h_1,\ h_2, \ldots,\ h_\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ p). \qquad (18)$$

Нехай субституція

$$s_k = s_1^{k_1} s_2^{k_2} \ldots s_\alpha^{k_\alpha}$$

переводить згаданий корінь в

$$x_{k_1 k_2 \ldots k_\alpha}$$

так, що кожда зі складових субституцій s_i буде змінювати тільки i-тий показчик коріня (18); тоді мусить субституція

$$s_k . s_l = s_1^{k_1+l_1} s_2^{k_2+l_2} \ldots s_\alpha^{k_\alpha+l_\alpha}$$

перевести корінь (18) в

$$x_{k_1+l_1,\ k_2+l_2, \ldots\ k_\alpha+l_\alpha},$$

отже субституцію s можна написати так:

$$s = | z_1, z_2, \ldots, z_\alpha \quad z_1 + u_1, z_2 + u_2, \ldots, z_\alpha + u_\alpha | \ (mod\ p). \qquad (19)$$

Коли приймемо $u_\lambda^\eta = 1$, а всї прочі $u = 0$, одержуємо односторонну субституцію s_δ: отже кожду субституцію s можна написати як добуток односторонних

$$s_k = s_1^{k_1} s_2^{k_2} \ldots s_\alpha^{k_\alpha}.$$

X. Ґрупи рішимих рівнань.

§. 90. Ґрупою рівнаня

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

назвали ми таку ґрупу, яка не змінює нїякої вимірної (в R) функциї корінїв того рівнаня. З тої точки погляду панує між рівнанями а їх ґрупами тїсна звязь, яку ми можемо так виразити, що назвемо ґрупу рішимого рівнаня рішимою, а рівнане, якого ґрупа є первісна або непервісна, назвемо первісним чи то непервісним.

Ми вже доказали твердженє (§. 52), що ґрупа незведимого рівнаня є перехідна, і навпаки: рівнане, якого ґрупа є перехідна, є незведиме. Тепер розслїдимо вплив первісности й непервісности ґрупи на рівнане.

Приймім, що ґрупа G рівнаня (1) є непервісна; тоді можемо коріні розложити на ν кляс по m членів ($n = m\nu$):

$$\begin{array}{llll} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1m}, \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2m}, \\ & & & \\ x_{\nu 1}, & x_{\nu 2}, & & x_{\nu m}, \end{array} \qquad (2)$$

так, що субституції ґрупи G будуть або тільки пересувати елементи в кождім рядку, або рядки поміж собою. Возьмім тепер за резольвенту яку небудь симетричну функцію корінів першого рядка; під впливом ґрупи G перейде вона в симетричні функції всїх инших рядків. Тих всїх симетричних функцій буде рівно ν:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= S(x_{11}, x_{12} \quad x_{1m}),\\
y_2 &= S(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2m}), \qquad (3)\\
&\\
y_\nu &= S(x_{\nu_1}, x_{\nu_2} \ldots, x_{\nu m});
\end{aligned}
$$

вони є корінями рівнаня степеня ν:

$$\varphi(y) = 0, \tag{4}$$

якого сочинники є незмінні для ґрупи G, отже можна їх представити вимірно. Розвязавши рівнане (4), знаємо симетричні функції $y_1, y_2, \quad ., y_\nu$, а також і всї инші симетричні функції, утворені з поодиноких рядків (2). Нехай

$$\sigma_1(x_\alpha),\ \sigma_2(x_\alpha), \qquad \sigma_m(x_\alpha)$$

будуть основними симетричними функціями α-того рядка, то з них маємо рівнане

$$\psi_\alpha = x^m - \sigma_1(x_\alpha)x^{m-1} + \sigma_2(x_\alpha)\,x^{m-2} - \ldots \pm \sigma_m(x_\alpha) = 0, \tag{5}$$

яке дає всї корінї α-того рядка. Отже рівнане (1) одержимо, коли виелїмінуємо величину y з (4) і (5), т. є з:

$$f(x) = \prod_{\alpha=1}^{\nu} \psi_\alpha = 0 \tag{6}$$

Звідси слїджує

Твердженє. Коли рівнане (1) можемо одержати через елїмінацію величини y з рівнань (4) і (5), то ґрупа даного рівнаня буде непервісна, і навпаки: непервісне рівнане можемо вважати результатом такої елїмінації.

З того виходить, що рівнаня, яких ґрупа є непервісна, можна все редукувати; отже в загальній теориї рівнань займаємо ся тільки первісними рівнанями.

§. 91. Займім ся тепер дальшими прикметами ґрупи даного рівнаня (1).

Коли утворимо резольвенту Galois загального рівнаня,

$$\xi_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n, \tag{7}$$

яка має $n!$ вартостий, то ґрупа рівнаня і ґрупа рівнаня ресольвенти

$$F(\xi_1) = 0 \qquad (8)$$

будуть **ізоморфні**. Коли рівнане (1) загальне (т. зн. нерішиме), отже його ґрупа симетрична, то ґрупа рівнаня (8) має порядок рівний степеневи, і всї корінї рівнаня (8) можна представити вимірно одним з поміж них, т. зн, розвязка рівнаня (1) є рівнозначна з розвязкою рівнаня (8).

Спеціяльне рівнане ріжнить ся від загального тим, що між його корінями панує реляція

$$\varphi(x_1, x_2, \qquad x_n) = 0; \qquad (9)$$

нехай ґрупа функції φ буде G, порядку r, тодї корінї рівнаня (1) позволяють тільки на субституції ґрупи G, бо кожда инша субституція перевела би φ в відмінну функцію φ', а та функція змінила би вже характер рівнаня (1).

Виконаймо субституції ґрупи G на ресольвенті (7); через те одержимо r ріжних вартостий $\xi_1, \xi_2, \qquad \xi_\nu$, які творять рівнане

$$F_1(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \qquad (\xi - \xi_r) = 0. \qquad (10)$$

До того самого результату дійдемо, коли до обсягу рівнаня (8) долучимо реляцію (9); тодї рівнане $F(\xi) = 0$ стане зведиме і розпадеть ся на незведимі чинники степеня r; одним з тих чинників буде (10). Ґрупи тих всїх чинників будуть одностепенно ізоморфні до ґрупи G.

Звідси слїдує

I. Твердженє. **За долученем функції $\varphi = 0$ рівнане ресольвенти розпадаеть ся на $\varrho = \frac{n!}{r}$ чинників степеня r. Всї корінї кождого з чинників можна представити вимірно одним з них, а ними можна представити корінї рівнаня (1).**

Коли два рівнаня $f_1(x) = 0$ і $f_2(x) = 0$, схарактеризовані реляціями $\varphi_1 = 0$ і $\varphi_2 = 0$, які належать до тої самої ґрупи, то розвязка одного рівнаня подає заразом і розвязку другого рівнаня.

§. 92. Функція, яку треба долучити до обсягу рівнаня (1), дана звичайно в такій формі, що якась її степень,

$$\psi_\nu^m = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (11$$

належить до обсягу рівнаня (1), т. зн., ми долучуємо не величину

ψ впрост, тільки корінь иншого рівнаня, яке вважаємо рішимим. В такім разї долучуємо всї корінї рівнаня (11):

$$\psi_1,\ \psi_2, \ldots, \psi_m$$

т. зн. всі вартости функції ψ, які вона може в обсягу R приймати. Робимо се тому, що для вишуканя рівнаня

$$\psi^m = A \qquad (11a)$$

мусимо знати всї вартости функциї ψ, які вона приймає під впливом ґрупи G. Тодї маємо:

$$g(\psi) = (\psi - \psi_1)(\psi - \psi_2) \ldots (\psi - \psi_m) = 0 \qquad (12)$$

є бажаним помічним рівнанєм.

Ґрупа G — зглядно функція φ, яка до неї належить — характеризує дане рівнанє (1).

§. 93. Долучім до рівнаня (1) з ґрупою G всї корінї рівнаня (12) і утворім яку небудь функцію тих коріниїв, $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)$. Ґрупа, яка тепер буде належати до рівнаня (1), буде підґрупою ґрупи G, а заразом і перекроєм ґруп

$$H_1,\ H_2, \ldots, H_m, \qquad (13)$$

які належать до функцій

$$\psi_1,\ \psi_2, \ldots, \psi_m. \qquad (14)$$

Назвім той перекрій K, тоді знаємо, що K належить до функції $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)$.

Ґрупа G, виконувана на рядї функцій (14), може тільки пересувати їх поміж собою, бо ті вартости одержали ми, виконуючи субституції ґрупи G на функції ψ_1. З того слїдує, що K не змінить ся, коли його будемо трансформувати ґрупою G:

$$G^{-1}KG = K,$$

або

$$KG = GK.$$

Утворім тепер з тих субституцій, які є спільні ґрупам G і K, підґрупу Γ, то Γ буде так само перемінне з G, отже буде її визначною підґрупою.

Коли G не є зложеною ґрупою, то Γ мусить бути ідентичною ґрупою, отже за долученєм функцій ψ одержимо з G ґрупу 1, т. зн. рівнанє (1) буде розвязане. Коли-ж G є зложене, то Γ може бути або 1, або ґрупою висшою від 1; тодї рівнанє ресольвенти (8) розпадеть ся, що правда на чинники низших степенїв, але неконечно на лінїйні.

§. 94. Порядок ґрупи K рівний степеневи рівнаня, яке має коріні:

$$\chi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_m\psi_m\,; \qquad (15)$$

коли будемо вважати χ функцією величин $x_1, x_2, \qquad x_m$, то ґрупою тої функції буде K, а Γ буде перекроєм ґруп G і K. Всі вартости χ одержимо, коли до тої функції приміними ґрупу G; звідси слідує, що порядок ґрупи K є

$$\nu = \frac{r}{r'},$$

де r і r' є порядками ґрупи G і Γ. — Коли G є поодинокою ґрупою, є $r' = 1$, отже $\Gamma = 1$, а $\nu = r$, т. зн., що таке долучене не посуне розвязки рівнаня вперед.

Ґрупа К не може мати r субституцій, бо не всї вартости ψ є ріжні між собою; ті субституції, які творять ґрупу Γ, не змінюють їх, отже порядок ґрупи K є $\frac{r}{r'}$.

Виберім на ресольвенту таку функцію ξ, яка належить до ґрупи Γ, отже вона буде залежати від рівнаня степеня ν, а всї її коріні буде можна виразити вимірно одним з поміж них, бо всї вони будуть належати до тої самої ґрупи Γ.

Коли Γ є **найбільшою (визначною) підґрупою** ґрупи G, то ґрупа рівнаня

$$\lambda(\xi) = (\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_\nu) = 0 \qquad (16)$$

буде поодинока*), перехідна. Тодї можна рівнане (16) розвязати вже за одним долученем, отже тільки тоді можемо мати користь з долученя ресольвенти, коли ґрупа рівнаня ресольвенти буде проста, т. зн., **коли ґрупа Γ буде найбільшою підґрупою первісної ґрупи.** В такім разї ґрупа G редукуєть ся на Γ.

Тепер вважаємо Γ ґрупою рівнаня (1) і поступаємо з нею зовсїм так само, аж врештї дійдемо до ідентичної ґрупи. Отже розвязку рівнаня (1) можна повести такою дорогою:

Ґрупу G розкладаємо на ряд зложеня

$$G,\ G_1,\ G_2, \ldots,\ G_\nu,\ 1, \qquad (17)$$

т. зн., **кождий слїдуючий член є найбільшою підґрупою попереднього. Порядки членів того ряду є**

$$r\ r_1,\ r_2, \ldots,\ r_\nu,\ 1. \qquad (18)$$

---

*) Netto, Substitutionentheorie, стр. 268.

До обсягу R рівнаня
$$f(x) = 0 \qquad (1)$$
долучуємо чергою корінї рівнань степенїв
$$\varrho_1 = \frac{r}{r_1},\ \varrho_2 = \frac{r_1}{r_2}, \ldots,\ \varrho_{\nu+1} = r_\nu; \qquad (19)$$
сочинники кождого з тих рівнань належать до обсягу попереднього рівнаня. Кожде з тих рівнань є незведиме, і корінї кождого з них можна представити вимірно одним котрим небудь. Порядки ґруп, які належать до тих рівнань, є числами з ряду (19).

Рівнане ресольвенти, яке зразу було незведиме і степеня r, розпадаєть ся чергою на
$$\varrho_1,\ \varrho_1\varrho_2,\ \varrho_1\varrho_2\varrho_3, \ldots,\ \varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_\nu = r$$
чинників. З остатньою операцією є рівнане (1) розвязане.

§. 95. Шукаймо тепер дальше умов рішимости рівнаня 1). Назвім долучені рівнаня
$$\chi_1 = 0,\ \chi_2 = 0, \ldots,\ \chi_{\nu+1} = 0; \qquad (20)$$
вони мають ту прикмету, що всї їх корінї можна представлювати одним з них, отже се циклїчні рівнаня.

Степенї тих рівнань мусять бути первими числами. Се конечна й достаточна вимога для рішимости рівнаня, отже:

II. Твердженє. Конечною і достаточною умовою для рішимости рівнаня (1) є те, щоби ряд чинників зложеня ґрупи G, т. є ряд (19), складав ся з самих первих чисел.

Та умова є конечна, бо тільки тодї можна розвязати рівнанє (1), коли рівнаня (20) будуть рішимі, а се можливе тільки тоді, коли вони є циклїчними первого степеня, — а заразом і достаточна, бо тодї дїйсно ґрупа G буде редукувати ся в згаданий спосіб.

§. 96. **III. Твердженє.** Другою конечною і достаточною умовою рішимости рівнаня (1) є, щоби ґрупа G складала ся з таких субституцій, що в рядї її зложеня

1. субституції кождої ґрупи G_1 є з собою перемінні аж по субституції слїдуючої ґрупи G_λ;

2. найнизша степень кождої субституції з G_λ, яка приходить в $G_{\lambda-1}$, має первий виложник.

Доказ. 1. Перша умова сповнена вже самою дефініцією ряду зложеня. Нехай в рядї зложеня по G слїдує G_1; назвім s субституції з G t з G_1, а σ нехай буде такою субституцією з G, якої нема в G_1; тоді є (§. 24).

$$s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha \cdot t_\mu$$

2. Приймім, що m-та степень субституції σ приходить вже в G_1, отже $\sigma^m = t_a$; таке m істнує все; в найгіршім разї буде m порядком субституції σ. Коли m є зложеним числом, $m = pq$, напишім $\sigma^p = \tau$, отже τ^q буде містити ся в G_1

$$\tau^q = \sigma^{pq} = t_a.$$

Трансформуймо τ всїми субституціями з G_1; через те одержимо ряд субституцій $\tau_1, \tau_2, \quad \tau_\lambda$, з яких нї одної нема в G_1. Утворім ґрупу Γ з G_1 і з $\tau_1, \tau_2, \quad \tau_\lambda$; Γ є перемінне з G, бо

$$s^{-1}\Gamma s = s^{-1}\{G_1 . \tau_1^{\alpha_1}\tau_2^{\alpha_2}\ldots\}s = s^{-1}G_1 s . s^{-1}\tau_1^{\alpha_1}s . s^{-1}\tau_2^{\alpha_2}s \ldots$$
$$= G_1 . \tau_1'^{\delta}\tau_2'^{\delta}\ldots = \Gamma.$$

З того слїдує, що G_1 не може бути найбільшою підґрупою для G, бо Γ є висшою визначною підґрупою. Неможливе отже, щоби m було зложеним числом; наше тверджене доказане посередно.

§. 97. **IV. Тверджене.** Коли степень незведимого, рішимого рівняня $f(x) = 0$ є зложеним числом, $n = i.m$ (де i і m є зглядно перві), то по долученю коріньв одного рівняня степеня m рівнане (1) розпадеть ся на m рівнань степеня i

$$f_\lambda(x) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \quad m),$$

яких сочинники належать до обсягу, розширеног коріньми згаданого рівняня степеня m. Ґрупа рівняня (1) є непервісна.

Доказ. Виходить се звідси, що ґрупа рівняня зложеного степеня не може бути первісна. Поміж субституціями ґрупи G можна буде знайти такі, які будуть змінювати елементи тільки серед тої самої кляси, або будуть пересувати цїлі кляси, нерозриваючи їх. Коли-ж рівнане непервісне, то його можна представити як результат елїмінациї величини y з рівнань

$$y^i - k_1 y^{i-1} + \ldots \pm k_i = 0,$$

де кождий сочинник є величиною з розширеного обсягу.

Отся редукція показує, що коли маємо розвязувати рівнане зложеного степеня, то той проблєм зводить ся до розвязки ряду рівнань степенів p^λ, де всї p є первими числами.