Зведене інтеґралів еліптичних.

Написав

Еміліян Стефанович.

Зміст.

I.

Поділ інтеґралів абелевих.

§. 1.

Три роди інтеґралів абелевих.

Возьмім під увагу рівьане альґебраїчне незведиме

$$f_0(x)+f_1(x)y+f_2(x)y^2+\cdots\cdots+f_m(x)y^m=0$$

де сочинники при y є вимірими функциями свого арґументу, то тоги не тілько y, але також і кожда функция вимірима (xy), коротко $s=R(xy)$, є функциєю альґебраїчною, а інтеґрал такої функциї

$$I=\int R(xy)\,dx$$

дефініюємо яко інтеґрал Абеля.

Функция s визначує ся тим, що на кождім місци (xy) даного образу альґебраїчного єсть цїлком однозначно означена і дає ся передставити через одну пару функций

$$x=\varphi(t)$$
$$y=\psi(t)$$

єсли місце є для образу звичайне, або кількома парами

$$x=\varphi^{(s)}(t)$$
$$y=\psi^{(s)}(t)$$

єсли місце є особливе. В тім другім случаю мусимо подати, до якої пари маємо дане місце зачислити.

Функция s приймає кожду вартість на певнім означенім числї місць котре то число називаємо **степенем** функциї s.

Weierstraß перший доказав*), що функцю s можемо перемінити на дуже догідну форму при помочи 3 нових функций, званих вaєрштрасовими:

$$H(x_\nu y_\nu, xy)$$
$$H(xy)_\alpha$$
$$H'(xy)_\alpha$$

іменно:

$$R(x_t y_t)=\sum_{\nu=1}^{1} c_\nu H(x_\nu y_\nu x_t y_t)+\sum_{\alpha=1}^{\varrho}\left[g_\alpha H'(x_t y_t)_\alpha-g'_\alpha H(x_t y_t)_\alpha\right]$$
$$+\frac{d}{dt}\Phi(x_t y_t)$$

---

* Weierstraß. — Gesammelte Werke. Том 4.
Puzyna — Teorya funkcyj. Том. 2.

значок t вказує, що змінні xy виразилисьмо яко функції параметру t; $(x_\nu y_\nu)$ $\nu = 1, 2, 3, \cdots l$ є точки несущно особливі довільного степеня функції s; $(a_1 b_1)$ $(a_2 b_2)$ $(a_\varrho b_\varrho)$ є точки, на котрих H окрім точок $(x_\nu y_\nu)$ приймає безконечно велику вартість; сочинники c_ν g_α g'_α є числа сталі, сочинники при першій відємній степени розвинень після t; і так:

$$c_\nu = \left[R(x_t^\nu y_t^\nu) \frac{dx_t^\nu}{dt}\right] t^{-1}$$

$$g_\alpha = \left[H'(x_t^\nu y_t^\nu)_\alpha\right] t^{-1}$$

$$g'_\alpha = \left[H'(x_t^\nu y_t^\nu)_\alpha\right] t^{-1}$$

Інтеґрал перемінить ся на нову форму

$$I(xy) = \int R(xy)\, dx,$$

єсли $(x_t y_t)$ єсть парою, що окружає точку (ab) даного образу альґебраїчного; тоді:

$$I = \int R(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt} dt = I(t)$$

$$I = \int R(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt} = (-1) \sum_{\alpha=1}^{\varrho} g'_\alpha \int H(x_t y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt} dt + $$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\varrho} g_\alpha \int H'(x_t y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt} dt + $$

$$+ \sum_{\nu=1}^{l} c_\nu \int H(x_\nu y_\nu x_t y_t) \frac{dx_t}{dt} dt + \Phi(x_t y_t) + C.$$

Інтеґрали $\int H(xy)_\alpha dx$

$$\int H'(xy)_\alpha dx$$

$$\int H(x_\nu y_\nu xy)\, dx$$

називаємо інтеґралами Абеля 1, 2 і 3 роду.

З властностий функций інтеґрованих слідує, що інтеґрал 1 роду є скінчений в кождій точці образу альґебраїчного $f(xy) = 0$, інтеґрал 2 роду є нескінчений тілько в першім степени на точках $(a_\alpha b_\alpha)$, а інтеґрал ν-тий третого роду є льоґаритмічно безконечний на 2 місцях $(x_\nu y_\nu)$ $(a_0 b_0)$ $[a_0 b_0$ місце зерове функциї $H(x_\nu y_\nu xy)]$; в окруженю тих точок функцоя під інтеґралом розвиває ся на $t^{-1} + \mathfrak{P}(t)$.

§. 2.

В зависимости від степеня рівнаня $f(xy) = 0$ упорядкованого після y можемо говорити о **степени інтеґралів Абелевих.**

Найпростійший случай буде той, що $f(xy) = 0$ зводить ся до

$$f_0(x) + f_1(x)y = 0$$
$$y = R_1(x)$$
$$\int R(x, R_1(x))\,dx = \int R(x)\,dx.$$

Яко результат інтеґрованя дістанемо функциї виміримі, льоґаритм а з ф. лукових $\operatorname{arctg} x$ і $\arccos x$.

Перейдім до інтеґралів Абелевих другого степеня, то є таких, де y сповняє рівнане альґебраічне другого степеня:

$$f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 = 0$$
$$y = \frac{-f_1(x) + \sqrt{f_1^2(x) - 4f_0(x)f_2(x)}}{2f_2(x)}$$

Нехай $\qquad f_1^2(x) - 4f_0(x)f_2(x) = G_1^2(x)G(x)$

$$y = \frac{-f_1(x) + G_1(x)\sqrt{G(x)}}{2f_2(x)}, \quad \text{то}$$

через субституцию $\begin{cases} x = \xi \\ y = \dfrac{-f_1(x) + G_1(x)\eta}{2f_2(x)} \end{cases}$

дістанемо новий образ альґебраічний $f(\xi\eta) = 0$, а іменно

$$\eta = \pm\sqrt{c(\xi - \bar{a}_1)(\xi - \bar{a}_2)\cdots\cdots(\xi - \bar{a}_n)}$$
$$\eta^2 = G(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots\cdots + a_n\xi^n$$

В інтеґралі

$$\int R(xy)\,dx = \int R(\xi, \sqrt{a_0 + a_1\xi + \cdots\cdots + a_n\xi^n})\,d\xi$$

можуть зайти ріжні случаї, котрі залежать від числа n. Єсли число під корінем є степеня першого, то

$$\int R(\xi, \sqrt{a_0 + a_1\xi})\,d\xi$$

через підставлене $\qquad a_1\xi + a_0 = t^2$

$$d\xi = \frac{2tdt}{a_1} \qquad \xi = \frac{t^2 - a_0}{a_1}$$

впроваджуєм до виміримости

$$\int \bar{R}(t)\,dt.$$

Для $n = 2$ маємо

$$\int R(\xi, \sqrt{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2})\, d\xi$$

через підставлене $\xi = \frac{z}{\sqrt{a_2}}$ спроваджене до форми

$$\int R(z, \sqrt{z^2 + bz + a_0})\, dz$$

дальше

$$z^2 + bz + a_0 = (t \pm z)^2$$

$$z = \frac{t^2 - a_0}{2t - b}$$

$$\sqrt{z^2 + bz + a_0} = \frac{t^2 + bt + a_0}{2t + b}$$

$$dz = \frac{2(t^2 + bt + a)}{(2t + b)^2}\, dt$$

в результаті

$$\int R(\xi, \sqrt{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2})\, d\xi = \int R(t)\, dt.$$

Для $n = 3, 4$ інтеґрали називаємо *еліптичними*; результат інтеґрованя дає нові функциї переступні, не даючі ся виразити через ф. альґебраїчні, льоґаритмічні і лукові. Над інтеґралами еліптичними будемо застанавляти ся деґайлїчно, длятого тепер для докінченя перегляду перейдім до дальших родів інтеґралів Абелевих.

Для $n > 4$

маємо інтеґрали *гіпереліптичні*. Окажемо, що кождий інтеґрал Абеля 2. степеня дасть ся привести до форми

$$\int \frac{R(\xi)}{\eta}\, d\xi.$$

$$R(\xi\eta) = \frac{\sum_{\lambda=0}^{n} L_\lambda(\xi)\,\eta^\lambda}{\sum_{\lambda=0}^{m} M_\lambda(\xi)\,\eta^\lambda} \qquad L_\lambda,\ M_\lambda \text{ є } u_2.b.\text{ в } \xi.$$

$$\eta^{2n} = \bar{R}(\xi)$$

$$\eta^{2n+1} = \bar{\bar{R}}(\xi) \cdot \eta$$

$$R(\xi\eta) = \frac{g_1 + g_2\eta}{g_3 + g_4\eta} \qquad g_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu}\xi^\lambda.$$

Знаменник спроваджуєм до виміримости і дістанемо

$$R(\xi\eta) = R_1(\xi) + \overline{R}_2(\xi)\eta$$
$$= R_1(\xi) + \frac{R_2(\xi)}{\eta}$$
$$\int R(\xi\eta)d\xi = \int R_1(\xi)d\xi + \int \frac{R_2(\xi)d\xi}{\eta}.$$

Перша часть правої сторони дасть ся виразити через льоґаритми, функції альґебраїчні, і лукові, що будем означували для короткости [log. alg. cykl.]

$$\int R(\xi\eta)d\xi = \int \frac{R_2(\xi)d\xi}{\sqrt{a_0 + a_1\xi + \cdots + a_n\xi^n}} + [\text{log. alg. cykl.}]$$

В інтеґралах абелевих степеня висшого як 2 звертаємо увагу на оден случай, коли рівнанє $f(xy) = 0$ редукує ся до

$$f_0(x) + f_m(x)y^m = 0$$
$$y = \sqrt[m]{-\frac{f_0(x)}{f_m(x)}}$$
$$= \frac{\sqrt[m]{-f_0(x)f_m^{m-1}(x)}}{f_m(x)} = \frac{G_1\sqrt[m]{G(x)}}{f_m(x)}.$$

Через підставленє $\quad x = \xi$

$$y = \frac{G_1\eta}{f_m(x)}$$

дістаєм новий образ альґебраїчний $\eta^m = a_0 + a_1\xi + \cdots + a_n\xi^n$

$$\int R(xy)dx = \int R(\xi, \sqrt[m]{a_0 + a_1\xi + \cdots + a_n\xi^n})d\xi.$$

Ту можемо зачислити всї інтеґрали типу

$$I = \int z^\alpha(a + bz^\beta)^\gamma dz$$

$$\xi = z^{\frac{1}{m}} \qquad z = \xi^m$$
$$dz = m\xi^{m-1}d\xi$$

$$I = m\int \xi^{m\alpha+m-1}\sqrt[m]{(a + b\xi^{m\beta})^{m\gamma}}\,d\xi$$

де $\quad m\alpha + m - 1 \quad m\beta,\ m\gamma \quad$ суть числа цїлі.

II.

Зведенє інтеґралів еліптичних методами елементарними.

§. 1.

Полученє $\int R(\xi, \sqrt{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4})\, d\xi$ $a_4 \gtrless 0$ і $a_4 = 0$

в однiй формi $\int R(t, \sqrt{\pm(t^2+\mu)(t^2+\lambda)})\, dt$ *).

Положiм

$$\eta = \sqrt{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4} = \sqrt{(f - 2g\xi + \xi^2)(f' - 2g'\xi + \xi^2)a_4}$$

і пiдставмо

$$\xi = \frac{p + qt}{1 + t}$$

де p і q є сталі довільні, то через відповідний їх добір можемо постарати ся о то, щоби сочинники при t були рівні зеро:

$$f - 2g\xi + \xi^2 = \frac{F - 2Gt + Ht^2}{(1+t)^2}$$

$$f' - 2g'\xi + \xi^2 = \frac{F' - 2G't + H't^2}{(1+t)^2}$$

f, g, h, F, G, H, F', G', H', є сталі, в котрих приходить p і q.

Положiм

$$G = 0 = -f + g(p+q) - pq$$

$$G' = 0 = -f' + g'(p+q) \quad pq$$

то знайдем потрібні нам (p, q).

$$\eta = \frac{1}{(1+t)^2}\sqrt{(F + Ht^2)(F' + H't^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{a_4 H . H'}}{(1+t)^2}\sqrt{\pm\left(\frac{F}{H} + t^2\right)\left(\frac{F'}{H'} + t^2\right)}$$

$$= \frac{k}{(1+t)^2}\sqrt{\pm(t^2+\lambda)(t^2+\mu)} = \frac{k}{(1+t)^2}\,\mathrm{T}$$

$$\int R(\xi\eta)\, d\xi = \int \bar{R}(t, \mathrm{T})\, dt.$$

Єсли $a_4 = 0$, то поступаємо анальоґічно.

---

*) Serret. — Harnack. Lehrbuch der Diff. und Integralr. T. II. стор. 49. Durège. — Theorie der ellip. Functionen.

Положім

$$\eta = \sqrt{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_2\xi^3} = \sqrt{-\delta(a-\xi)(f-2g\xi+\xi^2)}$$

і підставмо

$$\xi = \frac{p+qt}{1+t}$$

$$a - \xi = \frac{F' - 2G't + H't^2}{(1+t)^2}$$

$$f - 2g\xi + \xi^2 = \frac{F - 2Gt + Ht^2}{(1+t)^2}$$

вартість на $p:q$ вибираєм з рівнань

$$G' = 0 = 2a - p - q$$

$$G = 0 = -f + g(p+q) - pq$$

через що сочинники при t^{+1} відпадають. η перейде на

$$\eta = \frac{k'}{(1+t)^2}\sqrt{\pm(t^2+\overline{\lambda})(t^2+\overline{\mu})}$$

і знову

$$R(\xi\eta)\,d\xi = \overline{R}(t, \top)\,dt$$

Дісталисьмо новий вид інтеґрала еліптичного спільний обом случаям

$$a_4 \lessgtr 0 \text{ і } a_4 = 0.$$

§. 2.

Загальний інтеґрал в формі $\dfrac{R(x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx.$

$$R(t, \top) = \frac{M_1 + M_2 t}{M_3 + M_4 t} \qquad M_\lambda = f_\lambda(t^2 \top)$$

$$= R_1 + R_2 t \qquad R_1, R_2 \text{ є } f(t^2 \top)$$

$$R(t, \top)\,dt = R_1\,dt + R_2\,t\,dt$$

$$t^2 = u$$

$$2t\,dt = du$$

$$\top = \sqrt{u^2 + au + b} = v$$

$$R_2\,t\,dt = \overline{R}(uv)\,du = [\text{log. alg. cykl.}]$$

$$R(t, \top)\,dt = R_2\,dt + [\text{log. alg. cykl.}]$$

$$R_1(t^2, \top) = R_3(t^2) + R_4(t^2)\frac{1}{\top}$$

$$\int R_3(t^2)\,dt = [\text{log. alg. cykl}]$$

$$\int R(t, \top)\,dt = \int \frac{R(t^2)}{\sqrt{\pm(t^2+\lambda)(t^2+\mu)}}\,dt + \text{і т. д.}$$

$\top = \sqrt{\pm(t^2+\lambda)(t^2+\mu)}$ під зглядом знаків може прийняти 6 форм, з котрих кожду припомочи субституції

$$t^2 = \frac{\alpha+\beta x^2}{\gamma+\delta x^2}$$

можемо звести до форми нормальної Legendre'a, так що в результаті

$$\int R(\xi, \sqrt{a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+a_4\xi^4})\,d\xi = \int \frac{R(x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx + [\text{log. alg. cykl.}].$$

§. 3.

Загальний інтеґрал еліптичний виражений через 3 роди інтеґралів еліптичних.

Загальний інтеграл еліптичний спровадили ми вже до нормальної форми Legendre'a і ставляємо собі завдане виразити той інтеґрал через 3 основні інтеґрали. Що такі інтеґрали мусимо знайти і що три вистарчать, то знаємо вже з загальної теориї інтеґралів абелевих, поданої нам через Weierstraß'a, котрої результати ми подали в першім. розділї.

$$\int \frac{R(x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx = \int \frac{\alpha_0+\alpha_1x^2+\alpha_2x^4+\cdots+\alpha_nx^{2n}}{(\beta_0+\beta_1x^2+\cdots+\beta_mx^{2m})\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx.$$

Щоби той інтеґрал розбити на инші менше скомплїковані, впроваджуєм два типи інтеґралів:

$$Y_\mu = \int \frac{x^{2\mu}dx}{X}$$

$$Z_\nu = \int \frac{dx}{(1+nx^2)^\nu X}.$$

Єсли знаменник редукує ся до числа сталого $\beta_0+\beta_1x^2+\cdots = \text{const}$, то інтеґрал розпадає ся на інтеґрали Y_μ, отже то дїє ся для $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0$.

Єсли того не закладаємо, то розкладаючи функцию виміриму $R(x^2)$ на дроби частні, дістанемо інтеґрали виду Z_ν. Вже з того розважаня бачимо, що $Y_\mu Z_\nu$ вистарчать до передставленя загального інтеґралу. Однак є їх за много, мусять поміж ними заходити якісь звязи і тих тепер пошукаємо. В тій цїли зріжничкуємо обі сторони рівнаня

$$X^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$$

зглядом змінної x, помножимо через $\frac{x^{2\mu-3}\,dx}{X}$ і зінтеґруємо, то дістанемо рівнанє

$$2k^2Y_\mu - (1+k^2)Y_{\mu-1} = \int x^{2\mu-3}\frac{dX}{dx}\,dx$$

$$= x^{2\mu-3}X - (2\mu-3)\int\frac{X}{X}\,X x^{2\mu-4}\,dx$$

$$= x^{2\mu-3}X - (2\mu-3)\left[Y_{\mu-2} - (1+k^2)Y_{\mu-1} + k^2Y_\mu\right].$$

Укладаючи після Y_μ маємо перше рівнанє, що дає звязь поміж Y_μ

(1) $(2\mu-1)k^2Y_\mu - (2\mu-2)(1+k^2)Y_{\mu-1} + (2\mu-3)Y_{\mu-2} = x^{2\mu-3}X$

для $\mu = 2, 3, 4, \cdots\cdots$

$Y_2, Y_3, Y_4 \cdots\cdots$ є лінїові ф. Y_0, Y_1

для $\mu = +1$

$Y_{-1} =$ ф. л. $Y_0 Y_1$

для $\mu = 0, -1, -2, \cdots\cdots$

$Y_{-2}, Y_{-3}, Y_{-4} \cdots\cdots$ є ф. л. Y_0, Y_1.

Перейдім по черзї до інтеґралів Z_ν.

$$Z_{-\nu} = \int\frac{(1+nx^2)^\nu}{X}\,dx = Y_0 + \nu nY_1 + \cdots\cdots + nY_n.$$

Позістають нам єще Z_ν. В тій цїли творимо собі до помочи функцию.

$$\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}$$

зріжничкуємо єї після x, потому вставимо за

$$X^2 \text{ і } \frac{x}{2}\frac{dX^2}{dx}$$

їх вартости упорядковані після степений двочлену $(1+nx^2)$, дістанемо в результатї

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}\right]=A\frac{dZ_\nu}{dx}+B\frac{dZ_{\nu-1}}{dx}+C\frac{dZ_{\nu-2}}{dx}+D\frac{dZ_{\nu-3}}{dx}$$

$$\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}=AZ_\nu+BZ_{\nu-1}+CZ_{\nu-2}+DZ_{\nu-3}+\text{const.}$$

для $\quad \nu = 2, 3, 4,$

$Z_2, Z_3, Z_4,\quad$ є ф. л. Z_1, Z_0, Z_{-1}.

Завважім, що $Z_0 = Y_0$

$Z_{-1} = Y_0 + n Y_1$

$Z_2, Z_3, Z_4\quad$ є ф. л. Y_0, Y_1, Z_1.

Єсли ті розважаня над $Y\mu$ $Z\nu$ зберем разом, то бачимо, що всї они виражають ся лїнїово через три основні інтеґрали, котрі ми будем називали інтеґралами 1, 2, 3 роду в нормальній формі Legendre'а.

§. 4.

Остаточний результат, до якого доходимо, є такий, що

$$\int R(xy)\,dx,$$

де y виняте з рівнаня альґебраічного, дає ся докладно виразити через три інтеґрали основні:

$$Y_0=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$Y_1=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$Z_1=\int\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

і то лїнїово, і через знані функциї = [з. ф.]

$$\int R(xy)\,dx = C_1Y_0+C_2Y_1+\sum_n \overset{(n)}{C_3}\overset{(n)}{Z_1} + [\text{з. ф.}] + \text{const.}$$

Три висше згадані*) роди інтеґралів еліптичних є специальним случайом інтеґралів Абелевих, длятого они мусять мати їх власности. І так справдї є. Поза точками ± 1 і $\pm\frac{1}{k}$, що є точками розгалуженя в образї альґебраїчнім

*) Petersen. — Funktionentheorie.

$$Y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$$

є інтеґрал Y_0 всюда скінчений, навіть в 0 і ∞; Y_1 стає ся безконечним в точці $x = \infty$, а Z_1 стає ся льоґаритмічно безконечним в точці $\pm i \sqrt{\frac{1}{n}}$.

III.

Зведенє інтеґралів еліптичних методами теориї ф. еліптичних.

§. 1.

Інтеґрал ф. еліптичної.

Приймаємо, що $\varphi(u)$ єсть ф. еліптичною о 2 периодах $2\omega_1$ $2\omega_2$ і бігунах a_λ, повтаряючих ся n_λ рази ($\lambda = 1, 2, \quad n$). З теориї ф. ел. відомо, що кожда ф. ел. дає ся виразити лінїово*) через $\zeta(u - a\lambda)$ і єї похідні, де

$$\zeta(u) = \frac{d}{du} \log \sigma(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$$

а

$$\sigma(u) = u\Pi'\left(1 - \frac{u}{\omega}\right)e^{\frac{u}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{\omega^2}}$$

додаєм ще дефініцию: $p(u) = -\dfrac{d}{du}\zeta(u)$

$$\varphi(u) = C + \sum_\nu\left[A_1^{(\nu)}\zeta(u - a_\nu) - \frac{A_2^{(\nu)}}{1!}\zeta'(u - a_\nu)\right] + \frac{A_3^{(\nu)}}{2!}\zeta''(u - a_\nu) - \cdots\cdots$$

$$\pm \frac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{(n_\nu - 1)!}\zeta^{(n_\nu - 1)}(u - a_\nu).$$

Для $\lambda > 1$ дає ся $\zeta^\lambda(u - a_\lambda)$ виразити виміримо через pu і $p'u$

$$\varphi(u) = c + \sum_\nu\left[A_1^{(\nu)}\zeta(u - a_\nu) - \frac{A_2^{(\nu)}}{1!}\zeta'(u - a_\nu)\right] + \frac{d}{du}\bar{R}(pu, p'u).$$

Тоді:

$$\int\varphi(u)du = cu + c' + \sum_\nu A_1{}^\nu\int\zeta(u - a_\nu)\,du - \sum_\nu A_2{}^{(\nu)}\int\zeta'(u - a_\nu)du + R(pu, p'u),$$

а узглядняючи звязь:

$$\zeta(u - a_\nu) = \zeta(u) - \zeta(a_\nu) + \frac{1}{2}\,\frac{p'u + p'a_\nu}{pu - pa_\nu}$$

*) Puzyna. Teorya funkcyj T. II. доказ ст. 525.

і $\sum_\nu A_1^\nu = 0$ яко умову дво-периодичности, дістаєм остаточний вислїд в формі:

$$\int \varphi(u)\,du = cu + c' - \Sigma A_2^\nu \zeta(u) + \frac{1}{2} \sum_\nu A_1^\nu \int \frac{p'u + p'a_\nu}{pu - pa_\nu} du + [\text{ф.з.}]$$

$$\zeta(u) = \int - pu\,du$$

з другої сторони кожда ф. ел. дає ся виразити вимірямо через довільну ф. ел. і єї похідну, отже

$$\varphi(u) = R(pu,\ p'u)$$

а тим самим

(1) $$\int R(pu, p'u)\,du = c\int du + c' + \Sigma A_2^\nu \int pu\,du +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_\nu A_1^\nu \int \frac{p'u + p'a_\nu}{pu - pa_\nu} du + [\text{з. ф.}].$$

§. 2.

Рівність (1) єсть анальоґічна до тої, яку подав Weierstraß (гляди ч. I.). І ту маємо по лївій сторонї інтеґровану виміриму функцию, а по правій розбиту на 3 основні інтеґрали. Єсли тілько довідаєм ся, що поміж pu і $p'u$ заходить альґебраічна звязь, то результат (1) буде вже інтеґралом Абеля.

Згадана звязь поміж pu і $p'u$ істнує фактично і є

$$p'u = -\sqrt{4p^3u - g_2\,pu - g_3}\,.$$

Положім $pu = s$, а

$$-\sqrt{4p^3u - g_2\,pu - g_3} = S,$$

то дістаєм образ альґебраічний

$$S^2 = 4s^3 \quad g_2 s - g_3$$

$$p'u\,du = ds$$

$$du = \frac{ds}{S}$$

$$\int R(s,S)\,ds = c\int \frac{ds}{S} + \sum_\nu A_2^{(\nu)} \int \frac{s\,ds}{S} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_\nu A_1^\nu \int \frac{S + S_\nu}{s - s_\nu} \frac{ds}{S} + [\text{ф. з.}] + \text{const.}$$

$$u = \int \frac{ds}{S}, \quad v = \int \frac{s\,ds}{S}, \quad \omega_\nu = \int \frac{S + S_\nu}{s - s_\nu} \frac{ds}{S}$$

u, v, ω_ν є три основні інтеґрали в формі поданій через Weierstraß'a.

Дійшли ми до результату, який ми вже мали, а іменно, що інтеґрал ф. альґ. належачої до образу

$$S^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

виражає ся лінїово через 3 основні інтеґрали в формі Weierstraß'a і знані функциї.

В попереднім случаю ми мали образ альґебраїчний

$$Y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$$

а форма інтеґралів була нормальна Legendre'a.

Brioschi (Sopra formole ellitiche) подав підставлене лїнїове

$$\xi = a + \frac{e}{s - m}$$

котре приводить загальну форму

$$(1) \qquad \int \frac{d\xi}{\sqrt{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3 + a_4\xi^4}} \qquad a_4 = 0 \quad a_4 \lesseqgtr 0$$

до форми нормальної Weierstraß'a

$$(2) \qquad \int \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

Узглянїм ще підставленя

$$\xi = \frac{p + qt}{1 + t}$$

$$t^2 = \frac{\alpha + \beta x^2}{\gamma + \delta x^2}$$

т і бачимо, що форми Legendre'a і Weierstraß'a 1. ряду ріжнять ся що найбільше сталим сочинником:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = C \int \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

У Львові дня 26. жовтня 1905.