Відношенє ґеометриї метричної до метової.

написав

Др. Володимир Левицкий.

1. В ґеометриї можливі є дві точки виходу; або опираємо ся на незмінности т. зв. *метричних* власностий фіґур (пр. незмінність віддаленя двох точок, постійність кута, замкненого двома простими і т. п.), або можемо станути на становиску загальнїйшім і оперти ся на незмінности т. зв. *метових* власностий фіґур (пр. постійність відношеня подвійного подїлу). Звичайно робять ся так, що вперед розслїджує ся власности метричні фіґур, а від них переходить ся до власностий метових; но та дорога не конче є потрібна. Можна здвигнути цїлу будівлю ґеометриї метової при помочи виключно її питомих аксіомів без відкликуваня ся до помочи ґеометриї метричної.[1])

В так построєній ґеометриї метовій остають без зміни усякі власности метові при якій-небудь колїнеациї (посвояченю), якої виразом є формули (в сорядних однородних):

$$\left.\begin{aligned}\varrho x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\ \varrho x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \\ \varrho x_3' &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \\ \varrho x_4' &= a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4\end{aligned}\right\} \quad 1).$$

Ту маєм 15 сочинників, значить ся маєм в трирозміровім просторі ∞^{15} посвоячень, отже *ґеометрия метова займаєсь такими відношенями фіґур, які остають без зміни для 15-частної ґрупи* G_{15}.

---

[1]) Пор. Enriques: Geometria projettiva. Bologna 1897.

2. Приймім отже, щосьмо здвигнули вже ґеометрию метову і спитаймо, як тепер на відворот від тої загальнїйшої ґеометриї перейти до специяльнїйшої т. є метричної ґеометриї.

В ґеометриї метовій не робить ся ніякої ріжницї між поодинокими площами, бо они всї є рівноважні, за се ґеометрия елементарна виріжняє площу безконечно далеку. Наколи отже хочем перейти від ґеометриї метової до елементарної, мусимо вперед долучити до неї площу безконечно далеку. Через се мусимо з поміж усїх ∞^{15} посвоячень вибрати такі, що площі безконечно далекої не нарушають, при яких отже площа та сама в себе переходить. Будуть се — в звичайних простокутних сорядних — посвояченя подібні:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \end{aligned}\right\} \quad 2).$$

Сочинників є тут 12, отже посвоячень маєм ∞^{12}, а ґрупа G_{15} спаде через долученє безконечно далекої площи на G_{12}.

Але через се ми не дійшли єще до ґеометриї елементарної, в якій фіґури уважаєм тодї за рівноважні, наколи они переходять в себе через рух (отже є пристайні), або через відбитє (пристайність відворотна), або через перетвореня подібні (подібність). Ті всї перетвореня дають ґрупу G_7 (т. є. ∞^6 рухів, ∞^1 відбить і перетворень подібних); наколи до неї хочемо дійти, щоби ся найти в царинї ґеометриї елементарної, мусимо долучити до ґеометриї метової попри площу безконечно далеку єще якийсь утвір з 5 сталими; сей утвір остати мусить без зміни при усяких колїнеациях. Твором з 5 сочинниками є крива другого степеня (переріз стіжковий; значити его будем через C_2). Понеже ми долучили до ґеометриї метової безконечно далеку площу, то і долучена крива C_2 лежати мусить в тій безконечно далекій площи і бути уявна (мнима). Таку криву C_2 називає Кляйн і Lie колом кулистим (Kugelkreis). Щоби его дістати, треба перерізати кулю, дану в сорядних однородних:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_{11}tx + 2a_{12}ty + 2a_{13}tz + a_{14}t^2 = 0$$

(t звичайно = 1, наколи берем сорядні неоднородні) площею безконечно далекою; дістанем тодї рівнанє кола кулистого:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \qquad t = 0. \qquad 3).$$

В сорядних Plückera (площи) u v w дістанемо — як Кляйн доказує — рівнанє сего утвору:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Наколи отже хочемо перейти від ґеометриї метової до елементарної, мусимо долучити до неї площу безконечно далеку і кулисте коло.

В ґеометриї на площи річ о стілько упрощує ся, що місто безконечної площи треба брати просту безконечно далеку $t = 0$ і утвір $x^2 + y^2 = 0$; оба они разом дають т. зв. мнимі точки колові; прості $x + iy = 0$ та $x - iy = 0$ перетинають ся проте в двох безконечно далеких точках колових. Ті точки колові відповідають кулистому колу в просторі.

[Ту мусимо додати, що сам утвір $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ є стіжком мінімальним (стіжок, що з него остав лиш вершок); его творячі є простими мінімальними. На площи є $x + iy = 0$ і $x - iy = 0$ простими мінімальними, а кут між двома простими на площи є рівний:

$$\varphi = \frac{1}{2} \log DV \qquad 4),$$

де DV є стосунок подвійного поділу між тими двома простими, а мінімальними, що ідуть з вершка сего кута — як се Laguerre[1]) доказав. Се вираженє на кут буде нам дальше потрібне].

Загальнїйше можна розвязати квестию переходу від ґеометриї метової до елементарної в площи, долучаючи не мнимі точки колові, але долучаючи після Cayley'a[2]) який небудь переріз стіжковий C_2, який назвем абсолютним перерізом стіжковим. Дістанемо тодї три ріжні евентуальности:

1) берем абсолютний C_2 мнимий.

2) „ „ C_2 дійсний.

3) „ мниму пару точок.

Ґеометрию з долученим мнимим C_2 назвем за Кляйном елїптичною, з долученим дійсним C_2 гіперболїчною, з долученою парою точок мнимих параболїчною. Та послїдна є, як се відразу видко, ідентична з ґеометриєю, що повстала з метової через долученє точок колових.

3. Побачимо тепер, яка заходить звязь між тими трома рядами ґеометриї Cayley'a а т. зв. ґеометриєю неевклїдовою; підем ту дорогою, вказаною через Кляйна в его викладах про ґеометрию метову в зимовім семестрі р. 1900/01 в Ґетінґен.

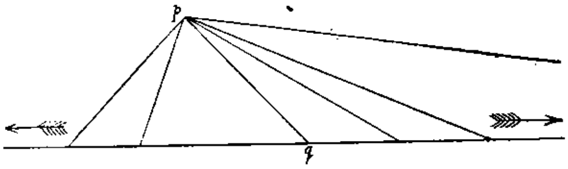
Як відомо, в ґеометриї евклїдовій на перший плян висувавсь т. зв. аксіом лїнїй рівнобіжних.

---

[1]) Пор. Nouvell. Annal. 1853.

[2]) Пор. Philos. Transact. 1859.

Возьмім якусь лїнїю і получім точку q на ній з якоюсь точкою p; най же та точка q посуваєсь постійно на право, то тодї граничне положенє луча pq назвем *положенем рівнобіжним*. Чи можливе є тільки одно таке положенє? В дійсности точка q може посуватись і на ліво до положеня граничного і тодї можливе є друге положенє рівнобіжне. Заходить отже квестия, чи оба ті положеня є одним і тим самим, чи нї, т. є. чи через точку p переходять дві, чи одна рівнобіжна. Ґеометрия евклїдова приймає лиш одну рівнобіжну; наколи однак приймем дві рівнобіжні ідучі через p, не станемо в суперечности з льоґікою, а дійдем до ґеометриї, якої вислїди будуть відмінні від вислїдів ґеометриї евклїдової. Тою дорогою пішли J. Bolyai[1]) і Лобачевский[2]) і сотворили *перший рід ґеометриї неевклїдової*, де через кожду точку переходять дві рівнобіжні.



Але можлива є еще і друга евентуальність, на яку звернув увагу Riemann[3]). Заложенє, що істнує граничне положенє для лїнїї, що іде через точку p, містить в собі заложенє, що дана лїнїя є безконечно довга. В дійсности (пр. в сьвітї фізичнім) не повинно ся говорити про лїнїю безконечно довгу; можна говорити, що лїнїя є необмежена, дуже, дуже довга, але не нескінчена (так пр. в ґеометриї метовій кожда проста є замкнена). В виду сего не може істнувати і положенє граничне, але що найбільше асимптотичне; нема отже і лїнїй рівнобіжних.

Приходим через се до *другого рода ґеометриї неевклїдової*, вповнї льоґічної, як і перша; ту в просторі нема зовсїм лїнїй рівнобіжних, а кожда проста є замкнена і скінчена. А що анальоґічний случай заходить на кулї, де кожда лїнїя вертає сама в себе, проте ґеометрия Riemann'а носить також назву *ґеометриї сферичної*; можемо собі з'уявити певну кулю о лучу R, де виступають анальоґічні відносини, як в ґеометриї Riemann'а; тодї є $\frac{1}{R^2}$ мірою кривини кулї, а разом мірою кривини простору

---

[1]) Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens etc. (пор. W. Bolyai: Tentamen 1832).

[2]) Exposition des principes de la géométrie, Kasan 1826. недруковане; опісля 1829.

[3]) Über die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen (Riemann's Werke) надруковане по смерти R.

Riemann'a. (В дїйсности є два роди сеї ґеометриї, на що увагу звернув доперва Klein[1]); один рід, де дві прості перетинають ся в однїй точцї, а через дві точки переходить одна проста; є се поєдиньча ґеометрия. Другий рід, де дві прості перетинають ся в двох точках, де отже через дві точки переходить безконечно много простих, є т. т. зв. подвійною ґеометриєю R. Та в се близше не входимо). Анальоґічно перший рід ґеометриї неевклїдової назвати можем ґеометриєю псевдосферичною; їй відповідає куля о лучу iR, отже мірою кривини сеї ґеометриї є $-\frac{1}{R^2}$; та о тім далї буде обширнїйше бесїда. — Очевидно для ґеометриї евклїдової є $R = \infty$, отже міра кривини виносить 0.

4. Вернїм тепер до ґеометриї метової, то побачимо, як тїсна звязь заходить між нею, а трома що-йно наведеними родами ґеометриї метричної. Покаже ся, що ґеометрия параболїчна відповідає звичайній ґеометриї евклїдовій, гіперболїчна ґеометриї Лобачевского, а елїптична ґеометриї Riemann'a. На се перший звернув увагу Кляйн[2]).

Переходу довершимо в слїдуючий спосіб. Наколи маєм два лучі о сорядних лінїових $(x_1\, x_2\, x_3)$ і $(x_1'\, x_2'\, x_3')$, то кут між ними виражує ся, як відомо, формулою:

$$\omega = \arc\cos \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}} \qquad 5),$$

а кут між двома площами о сорядних площи $(u_1\, u_2\, u_3)$ і $(u_1'\, u_2'\, u_3')$ виражує ся формулою:

$$\varphi = \arc\cos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,\sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2}} \qquad 6),$$

де $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ представляє в сорядних лінїйних, а $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$ в сорядних площ рівнанє стіжка мінімального.

Місто мінімального стіжка приймім за підставу після теориї Cayley'a абсолютний переріз стіжка C_2 в сорядних однородних; через се обмежимо ся до площи.

Наколи сорядні $x_1 : x_2 : x_3$ представляють в площи точку, або в точцї луч, а сорядні $u_1 \; u_2 : u_3$ на площи просту, або в точцї площу, то рівнанє безглядної кривої C_2 буде:

$\Omega(x_1\, x_2\, x_3) = 0$ в сорядних точкових, а

$\Phi(u_1\, u_2\, u_3) = 0$ в сорядних лїнї простої.

---

[1]) Math. Annal. 4. p. 604.

[2]) Math. Annal. 4. 6.

Узагальняючи за Кляйном рівнаня 5) та 6) дістанемо на відступ двох точок $(x_1\, x_2\, x_3)$ і $(x_1'\, x_2'\, x_3')$ форму:

$$\omega = c.\arccos \frac{1}{2}\, \frac{x_1' \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_1} + x_2' \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_2} + x_3' \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_3}}{\sqrt{\Omega(x_1\, x_2\, x_3)}\, \sqrt{\Omega(x_1'\, x_2'\, x_3')}} \qquad 7),$$

де в чисельнику виступає пів бігунової; стала c є довільна, бо від нас зависить вибір одиниць мірничих. Кут між двома простими означімо рівнанєм:

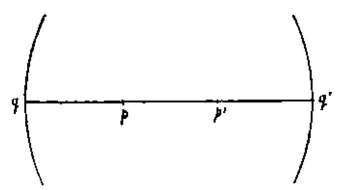
$$\varphi = \arccos \frac{1}{2}\, \frac{u_1' \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1} + u_2' \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_2} + u_3' \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_3}}{\sqrt{\Phi(u_1\, u_2\, u_3)}\, \sqrt{\Phi(u_1'\, u_2'\, u_3')}} \qquad 8).$$

Місто формул триґонометричних впровадимо форми Lagnerre'a:

$$\omega = c\, \frac{i}{2} \log DV, \qquad \varphi = \frac{i}{2} \log D_1V,$$

де DV є відношенє подвійного поділу. Се відношенє означимо в слідуючий спосіб:

$$DV = \frac{pq \cdot p'q'}{pq' \cdot p'q}$$

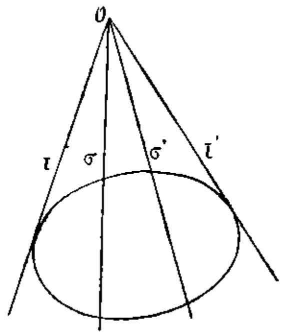


де $p(x_1\, x_2\, x_3)$ і $p'(x_1'\, x_2'\, x_3')$ є точки дані, що їх відступу шукаємо, а q і q' точки, де лінія pp' перетинає безглядну криву C_2.

Анальоґічно є:

$$D_1V = \frac{(\sigma\tau)(\sigma'\tau')}{(\sigma\tau')(\sigma'\tau)},$$

де σ і σ' є дані прості, а τ і τ' стичні, поведені до C_2 з точки, з якої ідуть прості σ та σ'. Очевидно значать $(\sigma\tau)$, sinus'и відповідних кутів.



Перейдім тепер до поодиноких случаїв.

5. Най крива C_2 буде мнима, отже маєм случай ґеометриї еліптичної.

Наколи криву C_2 віднесемо до трикутника спряженого з самим собою, дістанемо:

$$\Omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$\Phi = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

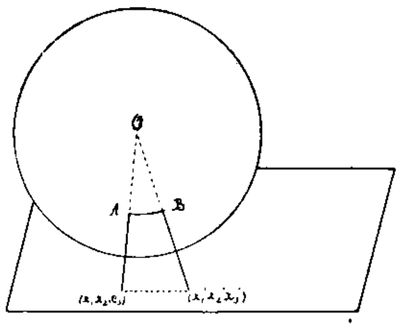
(сорядні однородні). Тоді дістанемо після формул 7) і 8) на відступ двох точок:

$$\omega = c \arccos \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}}$$

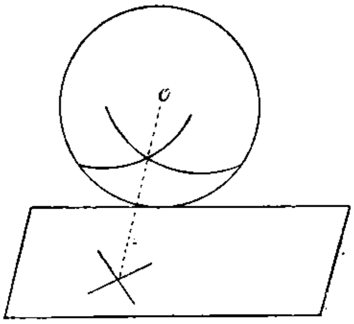
а на кут між двома простими:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2}}.$$

В порівнаню з формулою 5) бачимо, що відступ двох точок є c рази так великий, як кут між простими, що ідуть через точку O, а кут між двома лучами є рівний кутови між двома площами, що ідуть через O. Наколи отже з O (поза площею Cayley'а) зачеркнемо кулю лучом $R = c$ і з O поведемо лучі до даних точок $(x_1 x_2 x_3)$ і $(x_1' x_2' x_3')$, то відступ точок, в яких лучі ті перебивають кулю, є c рази так великий, як кут середоточний, що ті лучі его замикають. Можна проте сказати: Відступ двох точок на площи Cayley'а є рівний елементарному відступови їх образів A і B на кулї о лучу c.



Друга формула порівнана з 6) каже нам, що кут Cayley'а між двома простими на площи є рівний кутови, який творять відповідні найбільші кола на кулї о лучу c, зачеркненої довкола точки O.



В загалї можна сказати: Відношеня метричні ґеометриї елїптичної є впрост метом відповідних відношень, які істнують на кулї, зачеркненої з точки O. Тямити при тім треба, що відношенє метове між кулею а площою є дво-однократне, бо два кінцї проміру дають все на мет лиш одну точку.

Проста в ґеометриї елїптичній є **скінчена**, бо їй відповідає на кулї найбільше коло, а се має довготу $2R\pi = 2\pi c$; проста має проте довготу о половину меньшу, т. є. $\pi c = \pi R$. Як з сего бачимо, R є сталою характеристичнею, стисло звязаною з одиницею довготи (c).

Понеже проста є скінчена, тому в ґеометриї еліптичній нема граничного положеня, нема проте рівнобіжної. — Як з сего видко, ґеометрия еліптична Cayley'а веде просто до ґеометриї неевклідової Riemann'а о просторі необмеженім, але не нескінченім.

6. Возьмім случай другий, т. є. криву безглядну C_2 дїйсну; через се маєм ґеометрию гіперболїчну.

Наколи і ту рівнанє кривої C_2 віднесемо до трикутника спряженого з самим собою, дістанемо:

$$\Omega = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

$$\Phi = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2.$$

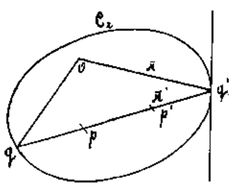
Відступ двох точок є ту:

$$\omega = c \arccos \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' - x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2}}$$

а кут між двома простими:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' - u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 - u_3^2}\sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 - u_3'^2}}.$$

C_2 є дїйсне, можна проте єї нарисувати; тодї всї наші операциї відбувати ся будуть в серединї C_2. Що дотикає кута φ між двома простими, то і ту остає то само, що передше, бо стичні, що ідуть з точки перетинаня ся обох простих (а прості берем в внутрі кривої) до кривої C_2, є мнимі. — Иньша річ є з відступом обох простих.



$k(k')$

Понеже:

$$\omega = c\,\frac{1}{2}\log DV,$$

а

$$DV = \frac{pq \cdot p'q'}{pq' \cdot p'q}$$

має дїйсну вартість, а кромі сего відступ обох точок має бути дїйсний, то мусить бути конче:

$$c = -iR,$$

де $-\frac{1}{R^2}$ буде мірою кривини ґеометриї гіперболїчної.

Що ся дїє в безконечности? Покажемо, що обвід кривої C_2 представляє безконечно далеке, що проте проста має дві безконечно далекі точки, або що через одну точку ідуть дві відїльні рівнобіжні.

І справді в внутрі C_2 є $DV = \frac{pq' . p'q'}{pq' . p'q}$, а $\omega = \frac{R}{2} \log DV$. Як довго находить ся p' в внутрі C_2, так довго є DV дійсне. Наколи p' паде в q або q' (отже на C_2), то DV станесь рівне 0 або ∞, $DV = \pm \infty$, отже віддалене $pp' = \pm \infty$. Наколи p' вийде поза C_2, то $DV < 0$, отже відступ pp' стане мнимий. Кожда проста має проте дві дійсні безконечно далекі точки, а се точки пересїчи єї з C_2. Наколи возьмемо в C_2 точку O і получимо єї з p', то наколи p' стремить до q і q', дістанемо дві рівнобіжні Oq і Oq' до pp'. В ґеометриї гіперболїчній називаємо проте рівнобіжними такі лїниї, які ся перетинають в точках обводу кривої безглядної C_2.

Бачимо проте, що ґеометрия гіперболїчна вяже ся з ґеометриєю Лобачевского.

Який кут замикають дві рівнобіжні?

Наколи тї рівнобіжні є π і π', а через їх точку пересїчи поведем стичні k і k' до C_2, то тї стичні спадають разом ($k = k'$). Тоді:

$$DV = \frac{\sin \pi k . \sin \pi' k'}{\sin \pi k' . \sin \pi' k} = 1, \quad \log DV = 0,$$

отже: дві рівнобіжні перетинають ся в точках безглядної кривої C_2 під кутом зеро.

З сего слїдує дуже цїкаве свійство трикутників вписаних в криву C_2; в кождім такім трикутнику всї кути рівнають ся зеру, а боки є до себе рівнобіжні.

Бачили ми, що ґеометрию еліптичну можна інтерпретувати на кулї, або в загалї на поверхні о сталій додатній кривинї в звичайнім нашім просторі. Завважити треба, що і ґеометрию гіперболїчну можна інтерпретувати в звичайнім просторі на певних поверхнях псевдосферичних зі сталою кривиною відємною. Поверхнї такі розслїджував перший Minding[1]), на їх значінє для ґеометрії неевклїдової звернув однак увагу доперва Beltrami[2]). Він доказав, що ґеометрия на таких поверхнях зовсім згоджує ся з ґеометриєю Лобачевского. Вже Minding[3]) постеріг, що наколи на таких

[1]) Crelle's Journal Bd. 19. 20. 1839. 1840.

[2]) Saggio di Interpretazione della Geometría non-Euclidea (Giorn. di Matem VI. 1868). Иньші праці про тї поверхнї є: Dini: Comptes rendus I. 1865, Enneper: Götting. Nachr. 1868. Bianchi: Dissertat. (Pisa 1879). Lie: Nouv. Archiv für Math. Bd. 4—5. 1879—1880. Backlund: Math. Annal. 19. (1882). Bianchi: Lezioni di Geomet. differenziale (1886).

[3]) loc. cit.

поверхнях уважати будем трикутники утворені через лінії ґеодетичні, то в тих трикутниках будуть мали значінє усї форми триґонометриї сферичної, наколи в них місто луча R вставимо — iR. Такі форми дістав сучасний до Minding'a Лобачевский в своїй ґеометриї, але схожість їх з ґеометриєю на поверхнях псевдосферичних постеріґ доперва Beltrami.

7. Возьмім тепер третий случай ґеометриї Cayley'a т. є. ґеометрию параболїчну, де абсолютна крива C_2 деґенерує ся в мниму пару точок.

Пара точок колових є:

$$u_1^2 + u_2^2 = 0,$$

но ми ідучи за Кляйном, напишемо се рівнанє в загальнїйшім виді:

$$u_1^2 + u_2^2 + \lambda u_3^2 = 0,$$

де λ може принимати вартости додатні, відємні та зеро. Для $\lambda > 0$ є абсолютна крива C_2 мнима (случай ґеометриї еліптичної), для $\lambda < 0$ є C_2 дійсна (ґеометрия гіперболїчна); $\lambda = 0$ дає случай граничний, який тепер розбираємо.

В сорядних точок напишім рівнанє загальне абсолютної кривої C_2 в видї:

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = 0.$$

Для $\lambda = 0$ є $x_3^2 = 0$, т. є. маємо подвійну безконечно далеку площу.

Кут між двома простими в розуміню Cayley'a буде тепер:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' + \lambda u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \lambda u_3^2}\,\sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + \lambda u_3'^2}};$$

з відси випаде для $\lambda = 0$:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u'_1 + u_2 u_2'^2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,\sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}}$$

т. є. дістаєм відразу виражене на кут таке саме, як в ґеометриї евклїдовій.

Розслїдїм, чи і на відступ двох точок випаде для $\lambda = 0$ таке саме виражене, як в ґеометриї евклїдовій.

Для $\lambda = 0$ випаде на віддалене двох точок:

$$\omega = c \arccos \frac{u_3 u_3'}{u_3 u_3'} = c \arccos 1 = 0;$$

то само дає і $\log DV$. Но побачимо, що річ випаде інакше, наколи в иньший спосіб перейдем до границї. Возьмім іменно: місто arc cos arc sin на основі рівнаня:

$$\arcsin = \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{1 - \cos^2}\right);$$

тоді дістанемо на відступ двох точок взагалї:

$$\omega = c \arcsin \sqrt{\frac{(\lambda x_1^{\,2}+\lambda x_2^{\,2}+x_3^{\,2})(\lambda x_1'^2+\lambda x_2'^2+x_3'^2)-(\lambda x_1 x_1'+\lambda x_2 x_2'+x_3 x_3')^2}{(\lambda x_1^{\,2}+\lambda x_2^{\,2}+x_3^{\,2})(\lambda x_1'^2+\lambda x_2'^2+x_3'^2)}}.$$

Приймім λ дуже мале і розвиньмо повисшу форму після степений λ; дістанемо:

$$\omega = c \arcsin \sqrt{\frac{\lambda(x_1^{\,2}x_3'^2+x_2^{\,2}x_3'^2+x_1'^2x_3^{\,2}+x_2'^2x_3^{\,2}-2x_1x_1'x_3x_3'-2x_2x_2'x_3x_3'+\lambda^2(\cdots)}{x_3^{\,2}x_3'^2+\lambda(\cdots\cdots)}}.$$

Наколи пропустимо вирази з λ^2 в чисельнику, а з λ в знаменнику, дістанемо:

$$\omega = c \arcsin \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{(x_1 x_3'-x_1' x_3)^2+(x_2 x_3'-x_2' x_3)^2}{x_3^{\,2} x_3'^2}}.$$

Перейдїм до сорядних неоднородних, отже положім:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = x_3' = 1,$$

то дістанемо:

$$\omega = c \arcsin \sqrt{\lambda} \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$

Для $\lambda = 0$ перейшов би сей вираз в зеро, наколиб не стала c, якої вибір лежить в наших руках. Виберім проте c так, щоби все $c\sqrt{\lambda} = 1$, а кромі сего положім за sinus сам лук (се можливе з огляду на безконечно мале λ); тодї дістанемо:

$$\omega = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

а се є відступ двох точок, виражений взором ґеометрії аналїтичної.

Бачимо проте, що ґеометрия параболїчна Cayley'а відповідає ґеометриї евклїдовій.

З причини висше подачих відношень між ґеометриями Cayley'а а трома родами ґеометриї елементарної перенїс Кляйн назви: ґеометрия параболїчна, гіперболїчна і елїптична на ґеометрию Евклїда, Лобачевского і Riemann'a.[1])

Тернопіль, в лютім 1903.

---

[1]) Пор лїтературу (крім висше поданої): W. Killing: Die nichteuklidischen Raumformen 2 Bde (Paderborn); Clebsch-Lindemann: Geometrie Bd. 2. 1 Leipzig 1891. F. Klein: Nichteuklidische Geometrie (автоґрафоване) Göttingen 1893 (I. II). F. Klein: Projective Geometrie (в манускрипті в бібліотеці семінара математичного в Göttingen) 1901.