Математика теоретична а практична.

(Погляди проф. Ф. Кляйна).

РОЗІБРАВ

Др. Володимир Левицкий.

Сего року показалась книжка, що має перворядне значінє для математики чистої та приміненої; се книжка, а радше автографовані виклади проф. Кляйна під заголовком „F. Klein. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien“. Leipzig 1902. B. G. Teubner стор. 468. Книжка ся обнимає виклади, які тримав проф. Кляйн в Ґетінґен в літнім семестрі р. 1901. Хто лиш коли небудь мав до дїла з творами сего може нинї найвизначнїйшого математика нїмецкого, сей знає добре, що Кляйн стремить все до усуненя сеї прогалини, яка з природи річи витворилась між математикою чистою а математикою практичного житя. Між математикою абстрактною а приміненою витворюєсь що раз більша пропасть, а причина сего така, що в природї не виступають ніколи твори абстрактні, які є витвором чистого льоґічного мисленя; в природї нема анї абсолютних точок анї абсолютних ліній і т. п. Тож нинїшну книжку з великим заінтересованєм прийме кождий, для кого математика по при чисто формальну сторону має еще і з огляду на практичне примінене свою велику вартість, тим більше, що великаньский розвій наук природописних та технїчних в XIX. ст. довершив ся головно при помочи метод та доріг, які вказала математика. Нинїшна книжка — се квінтесенция поглядів та змагань великого математика нїмецкого, се мовби заповіт для дальшого поколїня математичного, се виклад фільозофії математики, тим цїкавійший, що автор сам звісний яко великий теоретик. Погляди зібрані в тій книжцї хочу бодай в начерку ту представити.

Книжка складає ся з трох частий та вступу; часть перша (5 розділів) займаєсь функциями одної змінної і представленем єї в системі сорядних, часть друга (4 розділи) обнимає т. зв. свобідну ґеометрию, часть трета займаєсь представленем ідеальних творів через рисунки та моделї.

Почнім від вступу; ту на кількох сторонах характеризує автор сей глубокий роздїл, що дїлить теоретиків від практиків, та пояснює, чому як раз за предмет своїх викладів взяв собі ґеометрию та рахунок ріжничковий та інтеґральний; а в кінци подає короткий перегляд літератури в квестиї навязаня зносин між теоретиками та практиками.

I. В першій части займаєсь автор вперед независимою змінною x, та виказує, що наколи вартости змінної независимої аритметично дають ся представити в ідеальній царинї аритметики майже з безконечною точностию, то в царинї емпіричній та в усїх царинах практичних, чи то в аритметицї, чи то в означеню довжини, чи то в нашім виображіню про простір, находить ся певна вартість гранична (Schwellenwert), по за яку практика піти не в силї. Та ріжниця приневолює нас перевести подїл математики на дві великі части: на математику прецизийну (числене абсолютно точними числами) та математику приближень (Approximationsmathematik, числене числами з обмеженою точностию). І як раз та математика приближень є ipso facto математикою практичною, бо ми в практицї можем з причини вартостий граничних осягнути лиш приближену точність. Та наколи сей роздїл являє ся конечним в аритметицї, де між числом абстрактним невиміримим а єго приближеною вартостию в практицї заходить ріжниця, то о скількож більше виступає ріжниця та в ґеометриї, де нашим понятям абстрактним (точка не має розміру, лїнїя має лиш довжину etc.) не відповідає в практицї дїйсність. Сю ріжницю ілюструє автор на примірах; пр. квестия конструкций ґеометричних при помочи лїнїї та циркля належить до ґеометриї прецизийної і в многих случаях в теориї не є можлива (пр. трисекция кута, подвоєнє шестистїнника, квадратура кола), в практицї однак дає ся з меньшим або більшим приближенем довершити. Так пр. понятє вимірних та невимірних величин належить виключно до математики прецизийної. Навязуючи до понятя змінної независимої дефініює автор горішну границю множіни точок (при помочи „тятя" Dedekind'a) та місце скупленя (після Веєрштрасса).

a) Опісля переходить Кляйн до дефініциї функциї $y = f(x)$; і ту показуєсь знов ріжниця між теориєю а емпириєю, бо крива емпірична, що ту функцию представляє, дефінїює y, що належить до x, лиш в приближеню точно; та крива емпірична дефінїює радше т. з. „пасок функцийний“ (Functionsstreifen):

$$y = f(x) \pm \varepsilon \qquad \text{(є відповідно мале).}$$

Сим способом крива емпірична має лиш обмежену точність і не відповідає стислому понятю функциї математики прецизийної, а лиш понятю паска функцийного.

По дуже інтереснім екскурсї про фільозофію натури (стислість і приближність права спаданя тїл, захованя маси, енерґії та права ґравітациї, при чім знова виступає ріжниця між абстрактним а практичним поглядом), переходить Кляйн до атрибутів, які має крива емпірична а крива ідеальна. К р и в а е м п і р и ч н а мусить бути 1) тягла, 2) ограничати певну поверхню в укладї сорядних, 3) мусить мати в скінченім інтервалї скінчену скількість maxim'ів та minim'ів, 4) мусить мати в кождій точцї напрям, означений через квот ріжницевий $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 5) та мусить мати кривину. Сї свойства має крива емпірична вже з гори. Противно к р и в а і д е а л ь н а, що відповідає понятю функций математики прецизийної, не має зовсїм вже à priori повисших власностий. Щоби она була анальоґічна до кривої емпіричної, мусимо вже з гори в и р а з н о єї приписати власности: 1) тяглість, 2) скінчене число maxim'ів та minim'ів в скінченім інтервалї, 3) першу походну, другу походну і т. д. (очевидно лиш ті походні, які їй припишемо). Такі функциї вже Jacobi назвав р о з у м н и м и (vernünftig); они є загальнїйші, як аналїтичні, де жадає ся всїх походних. Що повисших власностий крива ідеальна не має вже à priori, що функция навіть усюди тягла не потребує мати усюди означеної походної та не всегда мусить ся дати інтеґрувати (як се давнїйше приписувано усїм функциям), сю квестию основно розбирає Кляйн на славній функциї Веєрштрасса:

$$y = \sum_{0}^{\infty} b^n \cos (a^n x \pi)$$

де $0 \angle b \angle 1$, а a чисте непаристе; функция та є усюди тягла, а однак не має походної, значить ся крива ідеальна, яку она представляє, в жадній точцї не має напряму та стичної. Слїдує з сего, що функциї розумні то не правильний вид функций, як давнїйше думано, але лиш невелика часть усїх функций.

б) По тих розслідах приступає Кляйн до питаня: як далеко можна криву емпіричну приближити через прості аналітичні функциї. Ту подає Кляйн методу до осягненя сеї цїли; коли пр. хочемо означити функцию розумну, що дає ся два рази ріжничкувати, так, щоби не лиш представляла рядну даної кривої емпіричної, але також єї напрям та кривину в відповідних границях точности, то рисуємо до даної кривої першу, а опісля другу походну криву (очевидно емпіричну), ту другу походну криву заступаєм через прямолїнійний многокутник і дефінїюєм через се функцию $f_2(x)$, яка через двократне інтеґроване дає ту функцию $f(x)$, що нам дану емпіричну криву приближує. — Очевидно можна творити много таких практичних метод.

Тепер розбирає автор квестию приближеня розумної функциї при помочи простих аналітичних виражень.

Сего приближеня можна довершити або через скінчені многочлени або через скінчені ряди триґонометричні, при чім можна ті вираженя долучати лиш на поодиноких місцях до функциї згл. до єї походних.

в) Наколи поставимо задачу: до даної функциї $y = f(x)$ найти многочлен, що на n даних місцях $x = \alpha, \beta, \cdots \nu$ має точно представляти рядну функциї, то до сего уживаємо звісної інтерполяцийної форми Lagrange'a:

$$Y = f(\alpha) \frac{(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-\nu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\cdots(\alpha-\nu)} + \cdots\cdots + f(\nu) \frac{(x-\alpha)(x-\beta)\cdots\cdots}{(\nu-\alpha)(\nu-\beta)\cdots\cdots} = \Theta(x).$$

Наколи однак та форма має функцию $f(x)$ і на иньших місцях приближно предствляти, то треба покласти дану функцию:

$$y = \Theta(x) + \text{решта } R(x)$$

та старати ся ту решту оцїнити.

Наколи положимо:

$$y = \Theta(x) + r(x)\varphi(x),$$

де:

$$\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\cdots\cdots(x-\nu),$$

отже:

$$\Theta(x) = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \frac{\varphi(x)}{x-\alpha} + \cdots\cdots + \frac{f(\nu)}{\varphi'(\nu)} \frac{\varphi(x)}{x-\nu}$$

та наколи $\alpha = \beta = \cdots\cdots = \nu$, то дістанемо формулу Taylor'a:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha) \frac{x-\alpha}{1!} + \cdots\cdots + f^{(n-1)}(\alpha) \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + r(x)(x-\alpha)^n.$$

При помочи сеї форми покаже ся, що форма Lagrange'a надає ся до приближеня функциї f(x) (через $\Theta(x)$), наколи вираженє $\varphi(x) \cdot \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ для всїх ξ в інтервалї $\alpha, \beta, \cdots \nu$, x є достаточно малим числом.

Сю теорию стосує Кляйн до примірів (таблицї льоґаритмічні, приближенє інтеґралів через прямолїнїйну інтерполяцию, через параболю, через параболю кубічну, правило Simpson'a); що до лїтератури, покликуєсь головно на росийского математика Маркова.

Слїдує passus про функциї аналїтичні, їх дефінїция та математичні прикмети; дефінїцию функций аналїтичних подає автор за Вейерштрассом. Велику прикмету математичну тих функций добачує автор в тім, що елемент такої функциї є зовсїм точно означений через кусник, хотяйби і достаточно малий, кривої y = f(x). При тім поборює детереміністичні погляди J. Boussinesqa про т. зв. місця розгалуженя функциї, уважаної за функцию параметру t (отже часу в механїцї).

г) Другий спосіб приближеня довершує інтерполяция через ряди триґонометричні; отже (за x пишемо ω) пишемо:

$$f(\omega) = \left.\begin{matrix} \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega + \cdots + a_n \cos n\omega + \\ + b_1 \sin\omega + \cdots + b_n \sin n\omega \end{matrix}\right\} + R \text{ (решта)} = \Theta(\omega) + R,$$

форма, яку легко звести на форму Lagrange'a.

Наколи дамо собі т. зв. рівновіддалені (aequidistant) місця $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = \alpha + \frac{2\pi}{2n+1}$, $\alpha_2 = \alpha + 2 \cdot \frac{2\pi}{2n+1}$ і т. д. та положимо:

$$A_i = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\alpha_i + \cdots + b_1 \sin\alpha_i + \cdots + b_n \sin n\alpha_i,$$

то $\quad f(\omega) = \Theta(\omega)$, де:

$$\sum\nolimits^{i} A_i \cos k\alpha_i = a_k \cdot \frac{2n+1}{2}$$

$$\sum\nolimits^{i} A_i \sin k\alpha_i = b_k \cdot \frac{2n+1}{2}.$$

В тій формі уживає ся сего приближеня в ріжних науках, пр. в астрономії, метеорольоґії etc. (формула Bessel'a). Коли однак виберем наші місця так густо, що $n = \infty$, іде і наш ряд $(\Theta\omega)$ в безконечність і дістаєм звісний ряд Fourier'a з сочинниками:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\, d\alpha$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha$$

Сим способом дістаєм приближенє функциї через ряд безконечний. З клясичної роботи P. L. Dirichtet'a виходить, що наколи возьмем $(2n+1)$ перших членів сего ряду, яких сума дасть ся представити в формі:

$$\underset{2n+1}{S(\omega)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega+\varphi)\,\frac{\sin\frac{2\nu+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\,d\varphi$$

то сей інтеґрал для $n=\infty$ представляє функцию $f(\omega)$, наколи $f(\omega)$ є функциєю розумною (т. є. тяглою зі скінченим числом maxim'ів та minim'ів — т. зв. умовами Dirichtet'a).

Але що цікавше, беручи який небудь член скінченого ряду Fourier'a або аґреґат таких членів та спроваджуючи (після теориї найменьших квадратів) інтеґрал:

$$\int_0^{2\pi}(f(\omega) - S(\omega))^2\, d\omega$$

($S(\omega)$ оден член або аґреґат членів) до mininum, дістанем також дуже добре приближенє функциї $f(\omega)$.

В практиці таке приближенє функциї через ряди триґонометричні довершує ся механїчно при помочи з. зв. гармонічних аналїзаторів, як се автор дальше на примірах демонструє (аналїзатор Henrici—Coradi).

В кінци сего уступу займаєсь автор збіжностию безконечного ряду Fourier'a та показує, що такий ряд є збіжний для всїх x, а навіть на місцях, де тратить тяглість; але степень збіжности стає тим гірший, чим ближше і ближше підходимо до такої точки нетяглости.

А врештї звертає він при кінци сего розділу увагу на великі заслуги для математики приближень другого росийского математика Чебишова.

д) **Перейдім тепер до функциї двох змінних $z = f(xy)$. Така функция є тоді тягла в якійсь точці (x_0y_0), наколи**

$$|f(xy) - f(x_0y_0)| < \delta \text{ (достаточно мале).}$$

Та вже на простім виміримім вираженю:

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

(є се поверхня „циліндроід") виступає многозначна тяглість, де вже з гори зазначити треба, по якій дорозї треба зближати ся до якоїсь точки (прим. до $x = 0$, $y = 0$; найлїпше се пізнати, коли положимо $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, отже $z = \sin 2\varphi$).

Коли собі дальше поставимо питанє, коли функция $f(xy)$ дасть ся ріжничкувати без нїякого застереженя та дасть ся розвинути в ряд Taylor'а, та назначимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = s', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t,$$

то покаже ся, що не все $s = s'$, але противно в поверхнях, які в житю найчастійше приходять (як се автор на примірах показує), є $s \lesseqgtr s'$; щоби $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, мусять не лиш істнувати, але і бути тяглими p, q, s і s'.

Се були теоретичні вислїди; наколи хочемо тепер функцию $f(xy)$ представити приближно, мусимо до помочи ужити функций кулї.

Функция кулї є се однородний многочлен n-ого степеня що до x, y, z, який сповняє рівнанє ріжничкове:

$$\triangle F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

Найзагальнїйша функция кулї n-ого степеня має еще $(2n+1)$ неозначених параметрів, які в F виступають лїнїйно.

(Для анальоґії з рядом Fourier'а кладем $x = \sin\vartheta\cos\varphi$, $y = \sin\vartheta\sin\varphi$, $z = \cos\vartheta$ (з відси назва функциї кулї) та дістанем місто $f(xy)$ функцию $f(\vartheta,\varphi)$).

Хочемо тепер $f(\vartheta,\varphi)$ представити через функциї кулї:

$$f(\vartheta,\varphi) = F_0 + F_1 + \cdots + F_h + \cdots$$

Автор робить се для чотирох перших функций:

$$f(\vartheta,\varphi) = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \text{решта}$$

(отже до обчисленя маєм 25 сочинників), а робить се в той спосіб, що спроваджує до minimum (після теориї найменьших квадратів) інтеґрал:

$$\int(f - F_0 - F_1 - F_2 - F_3 - F_4)^2 d\omega$$

($d\omega$ елемент поверхні кулї).

Наколи обчислимо з відси функциї кулї $F_0, \cdots F_4$ (як се автор дїйсно робить) і назначимо їх через $P_n(\cos\vartheta)$ для зазначеня, що в них входять функциї триґонометричні, дістанемо:

$$f(\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{4}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(a_{n,\nu}\sin\vartheta^{\nu}\cos\nu\varphi + b_{n,\nu}\sin\vartheta^{\nu}\sin\nu\varphi\right)P_n^{(\nu)}(\cos\vartheta)$$

або коротше:

$$f(\vartheta,\varphi) = \sum\sum\left(a_{n,\nu}\Phi_{n,\nu} + b_{n,\nu}\Psi_{n,\nu}\right),$$

при чім з рахунку випаде, що:

$$a_{n,\nu} = \frac{\int f\Phi_{n,\nu}\,d\omega}{\int \Phi_{n,\nu}^2\,d\omega}, \quad b_{n,\nu} = \frac{\int f.\Psi_{n,\nu}\,d\omega}{\int \Psi_{n,\nu}^2\,d\omega}.$$

В сей спосіб проблем наш є розвязаний.

Погляд загальний на функциї кулї (пр. подїл на функциї пояса (zonal), вирізка (sectoriell), та табличок (tesseral)) та деякі уваги історичні кінчать сей розділ, а разом і часть першу книжки.

II. Часть д р у г а обнимає т. зв. с в о б і д н у ґ е о м е т р и ю (кривих плоских), свобідну, бо не звязану з нїяким системом сорядних. І ту зарисовує ся звязь між прецизиєю а емпіриєю, а відношенє аналїзи і ґеометриї є ту таке, що Кляйн прецизує ідеї ґеометричні при помочи розвинень аналїтичних, а дослїди аналїзи лучить з поглядом на фіґури ґеометричні.

a) Автор починає від значіня т. зв. м н о ж і н и т о ч о к (Punktmenge), та старає ся єї власности аритметичні ілюстровати ґеометрично. До сего служить єму метода л у ч і в в і д в о р о т н и х, яка так важну ролю відграває в теориї функций автоморфних. Піддаючи точки площи інверзиям (відбитям) в трох та двох колах (при помочи ґрупи перетворень) та випроваджуючи сим робом подїл площи на рівноважні колеса, які що раз стають густїйші та стремлять до т. зв. т о ч о к г р а н и ч н и х (особливих), показує автор, що множінь тих точок особливих нїде не є густа та що она є точна (perfect, значить ся кожда точка особлива є точкою скупленя безконечного числа точок особливих). Очевидно характеристична сторона сего представленя (відбиванє колес що раз дальше і дальше) в математицї приближень не є можлива.

б) З понятя і власностий **двоpозмірного continuum** точок слідуе дальше дефініция **кривої**; се е така **множінь точок площи, яка дасть ся в тяглий спосіб відбити на кусник лінії простої.**

Ту слідуе дальше цікавий уступ, в якім автор ілюструе досліди Peano і Hilbert'a, що крива, яка ся дасть представити при помочи параметру t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

може виповнити зовсім докладно кусник площи. Криву таку називае автор **кривою Peano.** Се заповнене площи відбувае ся через поділ площи на що раз дрібнїйші квадратики, яких скількість стае в кінци безконечною.

Щось анальоґічного до сеї ідеальної кривої Peano зробив C. **Jordan** для емпіричної математики; жадае він від кривої:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

щоби в інтервалї:

$$a \leqq t \leqq b$$

не мала нїякої точки подвійної, т. е. щоби не істнували дві вартости t_1 t_2 такі:

$$a \angle t_1 \angle b, \quad a \angle t_2 \angle b,$$

для яких:

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2), \quad \psi(t_1) = \psi(t_2).$$

Закладаючи, що $\varphi(a) = \varphi(b)$, $\psi(a) = \psi(b)$, дістаем замкнену **криву Jordan'a, що площу ділить на дві части** (внутрішну та вні́шну). Властиво сказавши повинні ми назвати еї (в математиці прецезийній) не кривою, а множінию точок, яка сповняе умови Jordan'a. Лиш тодї можна еї назвати **кривою** (в змислї кривої емпіричної), наколи е:

1) φ і ψ в інтервалї тяглі,

2) без точок подвійних,

3) та давалиб ся ν-рази ріжничкувати.

Тодї справдї наша множінь точок мае в кождім місци стичну і кривину.

На оборот можна до кривої емпіричної все подумати собі правильну ідеальну криву, що в всіх сущних власностях, які приписуем кривим $y = f(x)$, згоджуе ся з кривою емпіричною. Математичні розслїди, якими обнимаем царини ідеальні, оживляе погляд просторний (Raumanschauung), але розслїди ті опирають ся все на правильности вказаній формами $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ та на аксіомах.

в) Криві ідеальні можуть далї бути аналїтичні або альґебраічні. Аналїтичні є они тодї, коли x і y дають ся представити через збіжні ряди степенні; наколи такі аналїтичні криві: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ мають ту власність, що φ і ψ сповняють ідентично рівнане $F(\varphi,\psi) = 0$, то криві є альґебраічні.

Та знов наступає дослїд автора, як представити криві альґебраічні зі становиска функцийно-теоретичного та ґеометричного. Ґеометрично робить се автор при помочи методи Ґрассманна т. зв. лїнїйного механїзма (се є рухомий систем простих лїній та точок, при чім прості лїнїї мусять переходити через означені точки, а точки знова мусять порушати ся по означених лїнїях). Показує ся, що крива є альґебраічною, наколи повстає через лїнїйний механїзм.

Коли в кінци спитаєм, яке значінє мають криві ідеальні (отже виміримі (де φ і ψ виміриме), аналїтичні та альґебраічні) в математицї приміненій, то відповідь на се така, що в дійсности найпростійші криві, які знаєм та яких уживаєм до емпіричного представленя емпіричних дат, є як раз криві аналїтичні, альґебраічні та виміримі.

г) З черги приходить автор до кривих аналїтичних, які будує на дорозї чисто-ґеометричній (без помочи аналїтичної ґеометриї). І ту вихідною методою є у него інверзия площи в кількох колах; показуєсь, що множінь граничних (особливих) точок творить криву Jordan'а, яка в загалї не є кривою аналїтичною. (При твореню тих точок граничних відгриває у автора велику ролю звісне з теориї функций автоморфних ортоґональне коло). Така крива Jordan'а дає ся одно- і одно-значно та тягло відбити на обвід кола.

Сей уступ кінчать уваги Кляйна про подвійний проґрам ґеометриї та механїки. Після него ґеометрия має цїль подвійну: 1) взяти під увагу математику приближень та єї дальше розвивати, 2) з другої сторони не лякати ся нїякого ідеалїзованя (в змислї математики прецизийної). Так само механїка мусить бути і феноменольоґічною т. є. обнимати царину примінень, та ідеалїстичною.

Ту полємізує автор з поглядами математиків італїйских Veronese'а та T. Levi-Civitá.

д) Та наколи вже теоретично важні є ріжницї між обома частями математики, то ріжниця та виступає тим сильнїйше в ґеометриї практичній т. є. в ґеодезиї та ґеометриї начерковій.

Ґ е о д е з и я є та часть ґеометриї, в якій ідея ґеометриї приближень найшла найяснійше та найконсеквентнійше приміненє. Ту все розбирає ся та дискутує з одного боку точність обсервацийй, з другого боку точність одержаних вислідів.

В ґ е о м е т р и ї н а ч е р к о в і й, де вже з природи річи мусить виступати неточність, треба все тямити на висказ Finsterwalder'a:

„Рисуй так точно, як лиш потрафиш, але довіряй результатови як найменьше".

В ґеодезиї н и с ш і й, де іде о просточертні поміри трикутників та многокутників, всї поміри, оперті о мірене основи та кутів, мусять мати певну недокладність; се ілюструє автор на т. зв. з а в д а н ю P o t h e n o t'a. Тому-то в практиці мірять ся більше величин, як треба до означеня вислїду, і дивить ся, о скілько ті помірки, що ся взаїмно контролюють, згоджують ся, та означує ся границї, в яких імовірно вислїд лежить; до того служить метода найменьших квадратів.

В ґеодезиї в и с ш і й надаєм в приближеню землї вид кулї або елїпсоіда. На елїпсоіді виступають л і н ї ї ґ е о д е т и ч н і, які — як звісно — мають се свойство, що їх лук

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

між двома точками має бути „minimum". Крива така має єще друге свійство, що єї площа двократностична (Osculationsebene) стоїть прямовісно до площи стичної даної поверхнї. При прецизній дефініциї лїнїй ґеодетичних мусимо мати стисло здефініовану поверхню ідеальну, де dx, dy, dz є б е з к о н е ч н о малі величини. А в практицї, де порівнуєм поверхню земску з елїпсоідом, ті прирости навіть не є дуже малими р і ж н и ц я м и (не то вже ріжничками), лиш мусимо тим приростам приписати певний степень величини. Там Δx, Δy, Δz можуть мати вартість і кількох кільометрів.

Се тичить ся також і виду ґ е о і д а, т. є. поверхнї позему сили тяжести; теоретичний вивід а практичний ріжнять ся між собою. Однак мимо сего можна сказати, що ґеодезия дає нам красний примір на се, що можна зробити з математикою в приміненю, і як се можна зробити. Правда, випаде все обчислене лиш в приближеню, але за се там, де дослїди доведено до кінця, означено також і міру приближеня.

e) Єще некористнійше представляє ся справа в ґ е о м е т р и ї р и с у н к о в і й (т. є. ґеометриї начерковій та рахунку ґрафічнім), бо ту не розвинено до тепер теориї блудів, як се зроблено в ґеодезиї. Один Lemoine намагав ся таку теорию блудів, оперту на рахунку імовірности, подати. Та хотяйби навіть вдалось перевести таку теорию блудів для конструкций ґеометричних, то одно є певне, що така теория ніколи не буде могла оперти ся на абстрактних твердженях математики прецизийної, лиш буде потребувати рівнобіжних до них тверджень математики приближень. Сю гадку переводить Кляйн на загальнозвіснім твердженю Pascal'a (шестибік Pascal'a); попри прецизийне твердженє ставить Кляйн твердженє приближене: „Наколи маєм 6 точок, що меньше більше лежать на однім перерізї стіжковім і наколи получимо їх меньше більше лініями простими, а прості ті перетинають ся (меньше більше) в точках a, b, c, то ті точки лежать в приближеню на одній простій".

Дальше ставить Кляйн питанє, чи зі знаних відношень емпіричної кривої, яку маєм перед очима, можна заключати на анальоґічні свойства кривої ідеальної. На се дістаєм відповідь, що фіґура емпірична служить лиш до глубшого ор'єнтованя ся; для точнїйших розслїдів має она вправдї також вартість гевристичну, но в переведеню доказів мусимо все удаватись до понять та аксіомів ґеометриї прецизийної.

Слїдує тепер екскурз про дїйсні точки звороту плоских кривих альґебраічних, квестия, яку Кляйн вже давнїйше розбирав (Math. Annal. 10). Альґебраічна крива C_n n-ого степеня може мати що найбільше $3n(n-2)$ точок звороту, а з того, як автор доказує, що найбільше $\frac{1}{3}$-та часть може бути дїйсна.

Наколи нам C_n представляє збір всїх кривих з виріжником $D=0$ (отже мусить бути бодай одна особливість), то $D=0$ яко рівнанє альґебраічне витинає нам з простору $\frac{n}{2}(n+3)$-розмірового (крива альґ. має тілько сочинників) поверхню $\left[\frac{n}{2}(n+3)-1\right]$ — розмірову; поверхня така переходить через простор в скінченім числї „стїн" та передїляє его на скінчене число комірок, стикаючих ся з собою, розміру о 1 меньше як сам простор. Наколи інтерпретуєм тих $\frac{n}{2}(n+3)$ сочинників яко сорядні, отже яко точку репрезентуючу криву C_n, в тім просторі, то ті точки тих кривих, що мають більше особливостий, творять на поверхнї $D=0$ що найбільше „криві альґебраічні" в скінченім числї, розміру о 2 меньше, як $\frac{n}{2}(n+3)$. Від кождої кривої без особливостий можна перейти до и ныл ої такої кривої в тяглий спобіб, так що по дорозі натраФить ся лиш скінчене число разів на криву з одною звичайною точкою подвійною; значить се інакше, що від одної кривої альґебраїчної без точок подвійних можна через тяглу зміну сочйнників перейти до кривої з одною точкою подвійною (яка отже клясу кривої лиш о 2 зменьшав), а опісля знов до кривої без точки особливої. — К^яйн вияснює сей перехід в сей спосіб, що точка подвійна абсорбує в хвилї повставаня два дійсні вввороти кривої, а в хвилї заниканя віддав їх назад; то абсорбоване слідув однак лиш тоді, коли галузи повстаючої точки подвійної е дійсні; коли они в мнимі, абсорбция не мав місця.

Щоби довершити дійсно той перехід в практиці, треба зробити емпіричну ФІґуру та з'орентувати ся, як з відси вивести точні твердженя для кривої альґебраїчної. Як се автор робить, не хочу ту розводити, бо се завелоби нас за далеко; подам лиш коротко его висліди. Берем вперед під увагу певні емпіричні ФІґури. Наколи пр, якийсь тяг кривої, що не іде через безконечність, мав стичну подвійну, то конче між обома точками дотиканя мусять що найменьше находити ся дві точки звороту ; і на оборот. Ті твердженя перенесем на правильні ідеальні криві; наколи тяг кривої мав стичну подвійну, то за вісь x берем рівнобіжну до сеї стичної, а кавалок кривої між обома точками дотиканя представляем в, Формі

x = ***q>(***t), ^(t). Тоді в в точках дотиканя: = = 0. За се
QX ^ #

y мусить в тім інтервалі мати одно „maximum" або „minimum", де в також dy ΔX == -t-j- Ф4 9 = 0.~ З ^того заключаем, що в тім інтервалі
d²y

наименьше два рази ставсь зером, а сим способом твердження перенесли ми з кривої емпіричної на ідеальну.

Подав я ту лиш в великім скороченю другу часть поглядів Кляйна, особливо ті місця, де він говорить про представлене кривих альґебраїчних; та годі се було зробити обширнійше та основнійше, бо інакше прийшлоб ся цілу книжку перевести. А менї розходить ся в тім начерку лиіп про головні моменти.

ПІ. Слїдув тепер часть трет а, найкоротша, про представлене ідеальних утворів через рисунки та моделі. І ту виходить Кляйн з заложеня, що обі царини математики можна дуже легко получити в звязь, наколи лиш здДмо собі справу з їх ріжниць; з тої причини він все$_a$ був і є за тим, щби абстрактні відношеня — о скілько можна — ілюстровати на моделях.

І дійсно представляє автор (се робив він в часї своїх викладів) криву просторну без точок особливих, і то головно криві 3.-ого степеня, та займає ся квестиєю, як они ся представляють з ріжної точки погляду; в дальшій части свого викладу звертає ся автор до представленя поверхний і то альґебраічних, при чім лучить також теоретичні твердженя про вигляд та спосіб представленя таких поверхний та кривих. Уступ сей кінчить автор крестиєю т. зв. пятикутника Sylvester'а для поверхний F_3.

Та годї подати основний зміст сеї части викладів Кляйна без помочи моделів, на яких Кляйн свої погляди демонстрував.

От і дійшов я до кінця сеї книжки; вже з того короткого перегляду міг кождий пізнати, яке богацтво глубоких, інтересних та нових гадок ту зібрано, і тому не можу ліпше закінчити мого начерку, як подати ту слова самого автора:

„В тих викладах я виложив усе, чого звичайно в підручниках про сї справи нема, що однак творить тихе заложенє звичайного представленя річи. Сим хотїв я Вас приневолити, щобисьте з свобідним поглядом і независимим судом обняли річ саму.' Памятайте от хоть би про се, що я казав про емпіричну криву або поверхню, та про конвенциональне обмеженє дослїдів на утвори аналїтичні.

З математикою є справа така сама, як зі штуками красними. Є не лиш користне, але і конечне вчити ся від своїх попередників. Наколи обмежимо ся виключно на се, що до нас прийшло, та лиш на тім дальше будуємо, що читаємо в книжках, то повстає се, що я називаю системом схолястичним. З сего слїдує пересторога: Назад до власного живого погляду, назад до натури, що є найблизшою учителькою!"

Берлин, в падолистї 1902.