Д. ГІЛЬБЕРТА ОСНОВИ ҐЕОМЕТРИЇ.

написав

Др. Володимир Левицкий.

Математика XIX. століття поклала собі за завдане розслїдити стійність аксіомів, на яких оперла ся наука ґеометриї. Се змаганє привело через відкинене т. зв. аксіому рівнобіжних лїний Евклїда до сотвореня ґеометриї неевклїдової, метаґеометриї [1]), здвигненої через Bolyai та Лобачевского з одної, а Рімана з другої сторони. Сим робом повстала ґеометрия з кривиною зеро, додатною та відємною, а кожда з тих трох ґеометрий є вповні льоґічно узасаднена і не противить ся ніяким правилам математичного розумованя, а се тим більше, що емпірично рішити ся не дасть, яка з тих трох родів ґеометриї відповідає дійсности. Яко продукт стислого людского розумованя всї ті три роди ґеометриї є собі вповні рівноважні, і так само як і ґеометрия многорозмірна є математично зовсїм стислі.

В послїдних лїтах основно зайняв ся підставами ґеометриї Д. Гільберт, проф. математики в Ґетінґен. В своїх викладах: „Grundlagen der euklidischen Geometrie", які писані находять ся в бібліотецї математичній університету в Ґетінґен, та які оголосив п. з. Grundlagen der Geometrie, Липск 1899., розбирає Гільберт дуже основно пять аксіомів, на яких оперла ся т. зв. елементарна евклїдова ґеометрия (четвертий з них є славний аксіом Евклїда про лїнії рівнобіжні, пятий та послїдний аксіом тяглости (Stetigkeitsaxiom) Архімеда). Аксіоми ті піддає Г. ґрунтовній критицї, розбирає, чи кождий слїдуючий є льоґічним вислїдом попередних, та чи не дало

[1]) Пор. пр. мою популярну розвідку: »Кілька слів про т. зв. метаґеометрию та ґеометрию загальну«. (Привіт І. Франку).

би ся збудувати ґеометрий, де поодинокі з тих аксіомів не істнують. До своїх дослідів втягає Г. звісні твердженя Pascala та Desargues'а з ґеометриї метової, які є через се цікаві, що хотяй заходять на площи, дають ся лиш при помочи метод просторних доказати; змаганя сї твореня ґеометриї без поодиноких аксіомів є вельми інтересні.

Та недавно пішов Гільберт в своїх розслїдах еще дальше; цїлу ґеометрию змагає ся оперти лиш на трох аксіомах, при чім аксіом тяглости, що в попередних розслїдах займав пяте місце, стаєсь у него точкою вихідною. При помочи своїх трох аксіомів творить Г. ґеометрию загальнїйшу, так що ґеометрия евклїдова та Bolyai-Лобачевского то лиш її парости. Правда, вже передше змагав Lie оперти ґеометрию на загальнїйшій основі, а се на теориї ґруп та заложеню, що функциї, що дефініюють ґрупи, дають ся ріжничкувати; але годі ту рішити, чи заложенє, що функциї дають ся ріжничкувати, є в квестиї аксіомів ґеометриї конечне, та чи скорше спроможність ріжничкованя функций не є висл<u>і</u>дом понятя ґрупи та иньших аксіомів ґеометричних. Гільберт іде иньшою дорогою, бо опирає ся на теориї множіний Cantor'а та твердженю C. Jordan'а, що кожда плоска замкнена крива без точок подвійних дїлить площу на царину вніїшну та внутрішну. А хотя розслїди Гільберта дотикають лиш ґеометриї плоскої, то однак він не має сумніву, що буде їх легко можна перевести і в просторі. Гадки свої нашкіцував Г. первісно в нотї, поміщеній в „Nachrichten der könig. Gesellschaft der Wissensch. in Göttingen (math. phys. Klasse) 1902. Зошит 4. ст. 223". а обширно розвинув їх в „Mathemat. Annalen" т. 56. зош. 3. 1902. ст. 381—422 під заголовком: „Über die Grundlagen der Geometrie". Ідеї сего визначного ґеометра сучасного хочу в короткім перегляді ту подати.

1. Теорию свою починає Гільберт поясненями та дефініциями, а іменно:

а) Площа чисельна (Zahlebene) се у него звичайна площа з сорядними прямокутними x, y.

б) Кривою Jordan'а називає він криву без точок подвійних, тяглу (також і в кінцевих точках), яка лежить в тій площи чисельній: наколи она є замкнена, то царина нею обмежена є цариною Jordan'а.

Дефініций є також дві: дефініция площи та руху.

а) Площа є се (після Гільберта) двоࣿрозмірна множінь, систем точок, які можна відтворити однозначно (і на оборот) на точки площи чисельної, що лежать в скінчености, або на певну її частину.

(Площу ту будем в дальшім тягу називати коротко площею Гільберта). До кождої точки А сеї площи належать царини Jordan'a, в яких находить ся образ точки А, та яких усї точки представляють також точки площи Гільберта. Кожда царина Jordan'a, яка находить ся в окруженю точки А та яка ту точку замикає, є знова окруженєм точки А. Наколи в окруженю А находить ся якась точка В, то се окруженє є окруженєм і для В. Наколи А і В є якісь дві точки площи Гільберта, то все найде ся окруженє, яке є рівночасно окруженєм для А і В.

б) Рух є се однозначне тягле перетворенє образів (Bildpunkte) площи чисельної в собі, таке, що напрям, в якім перебігаєм певну замкнену криву Jordan'a (Umlaufssinn), все остає той сам. Рух, при якім точка М остає без зміни, є оборотом довкола точки М.

По сих дефініциях ставить Гільберт три основні аксіоми:

I. Наколи довершимо два рухи один по другім, то вислїдне з сего перетворенє площи Гільберта є знов рухом; с. є рухи творять ґрупу.

II. Наколи маєм в площи Г. які небудь дві точки А і М, то все можна точку А через оборот довкола М перевести в безконечно много положень. А наколи збір тих точок, що вийшли з всїх тих оборотів точки А довкола М, назвемо правдивим колом (wahrer Kreis), то маєм аксіом: Кожде правдиве коло складає ся з безконечно много точок.

III. Наколи істнують рухи, що трійку точок, яка находить ся в сусїдстві трійки А В С, переводять в сусїдство трійки А' В' С', то все найде ся такий рух, через який трійка А В С зовсім точно перейде в трійку А' В' С'; значить ся: рухи творять в скінчености систем замкнений.

З тих трох аксіомів слїдує безпосередно, що ґеометрия плоска, де аксіоми I–III істнують, є або ґеометриєю евклїдовою або ґеометриєю Bolyai-Лобачевского; се доказує Гільберт тим, що всї твердженя ґеометриї о пристайности, визначенє простої через дві точки і т. и. остають при заложеню аксіомів I—III; чи однак ґеометрия буде евклїдовою чи Bolyai-Лобачевского, рішає приняте аксіому рівнобіжности або нї.

2. На основі тих аксіомів та при помочи перетворень розбирає Гільберт цїлий ряд свійств правдивого кола в відношеню до т. зв. кола чисельного (Zahlenkreis, звичайне коло в площи чисельній). З тих розслїдів виходять ось-які свойства того кола:

Правдиве коло є се замкнена в собі густа та совершенна (perfect) множінь точок; точки ті є уложені циклїчно, т. зн. що наколи точки K_3 K_4 переділяють точки K_1 K_2, то на оборот точки K_1 K_2 переділяють точки K_3 K_4; наколи точки K_1 K_4 є переділені точками K_2 K_5, а точки K_2 K_4 точками K_3 K_5, то точки K_1 K_4 є переділені точками K_3 K_5. Се уґруповане точок остає незмінне при усяких оборотах довкола точки M, що є осередком правдивого кола. Наколи се уґруповане задержимо, то точки правдивого кола можна всегда відтворити однозначно на точки обводу звичайного кола чисельного з лучом 1 (і на оборот).

Правдиве коло, наколи єго берем в площи чисельній, є все кривою Jordan'a. З сего слідує, що осередок M сего кола лежить всегда в єго внутрі; а наколи в внутрі такого правдивого кола возьмем якусь точку P і через еї поведем друге коло правдиве довкола точки M, то се друге коло є також кривою Jordan'a і замикає в собі точку M.

Дальше занимає ся Гільберт ґрупою рухів, яким підлягає правдиве коло при оборотах площи довкола осередка M. Слідує з відси, що кожду дану точку O того кола можна через відповідний оборот довкола M перевести в иньшу точку S того кола. Ті обороти довкола M творять ґрупу всїх рухів правдивого кола, яка є гольоедрично-ізоморфна до ґрупи звичайних оборотів кола чисельного довкола M.

З сего слідує дальше, що кожде правдиве коло є замкненою кривою Jordan'a, а систем всїх таких колес, виведених довкола даної точки M, виповняє без перерви цілу площу Гільберта, так, що правдиве коло довкола точки M або обнимає або ся містить в кождім иньшім такім колї.

Всї обороти $\Delta(\omega)$ площи Гільберта довкола точки M можем з огляду на площу чисельну виразити через перетвореня:

$$x' = f(x\ y\ \omega)$$
$$y' = g(x\ y\ \omega)$$

де x y, x' y' є сорядні в площі чисельній, ω параметр, який можна назвати кутом в площі Гільберта, а f і g однозначні тяглі функциї. Наколи ω перебігає вартости $0 \ldots 2\pi$, то дістанемо кожду точку правдивого кола через точку (xy) раз і тілько раз, при тім є очевидно все:

$$\Delta(\omega)\Delta(\omega') = \Delta(\omega+\omega')$$

Наколи при якімсь руху площи остають дві точки неподвижні, то остають всї точки, значить ся рух є тотожностю (ідентичностю). В иньшім разї можна кожду точку площи перевести через відповідний рух в иньшу точку сеї площи.

3. По тих вислїдах приступає Гільберт до понятя т. зв. **правдивої простої**. Наколи маєм дві пари точок (А В) і (А' В') такі, що через якийсь рух А перейде в А', а рівночасно В в В', то кажемо, що (**правдива**) довжина АВ є **пристайна** (знак на се є $\equiv$) до (правдивої) довжини А'В'. (Анальоґічно два кола пристають до себе, наколи при певнім обротї переходять в себе і они і їх осередки).

Назвім **півоборотом** оборот о кут π, т. є. оборот, що еще раз довершений дає тотожність; то коли маєм три точки А В С такі, що через півоборот довкола В А перейде в С, а С в А, тодї точка В є **осередком** довжини АС. Правдива довжина АС має лиш оден осередок, тому то, коли дві довжини є пристайні, то пристайні є і їх половини.

4. По сїм та по деяких еще свойствах оборотів кола правдивого переходить Гільберт до **точок скуплення** (Häufigungsstelle) точок площи. І ту дістаєм ось такі вислїди:

Берем означену достаточно малу довжину за довжину одиничну і з неї творимо через безпреривне дїлене та півобороти систем точок того рода, що до кождої точки того системи належить означене число а додатне та виміриме, якого знаменником є степень числа 2. Наколи маєм точку, що належить до такого числа а, та наколи $a < \frac{1}{2^m}$, то довжина (0, а) є всегда меньша від довжини $\left(0, \frac{1}{2^m}\right)$. Точки площи, що відповідають числам $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, стремлять до точки скупленя 0; але так само стремлять до зера точки, що відповідають додатним вимірним числам a_1 a_2 a_3...... (яких знаменник є степенню 2), наколи a_1 a_2 a_3...... стремлять до зера. Колиж a_1 a_2 a_3...... стремлять не до зера, але до якогось дїйсного числа а, то так само відповідаючі їм точки стремлять до якоїсь означеної точки.

З відси слїдує понятє **правдивої простої**; є се систем точок, що повстає з двох основних точок О і Е, наколи будемо брали осередки, довершували півобороти і долучали до сего точки скуплення всїх одержаних точок. Всї системи, які одержимо з сеї простої через рух, є знов правдивою простою. Точка О дїлить просту на дві півпрості. Проста правдива є кривою тяглою, не має нїякої точки подвійної та не може сама в себе вертати.

Дві прості мають що найбільше одну точку спільну, а кожда проста правдива перетинає коло, поведене довкола одної з еї точок.

Дві якінебудь точки площи Гільберта можна все получити правдивою простою.

В так утвореній ґеометриї (з правдивих колес та правдивих простих) остають і правила пристайности. Наколи в двох трикутниках заходять пристайности:

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

то мусять заходити і пристайности:

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C',\ \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$$

$$BC \equiv B'C'.$$

При тім однак треба, щоби напрям, в яких перебігаєм оба трикутники, був для обох однакий.

5. Наколи маєм вже дефініцию правдивої простої, то треба розріжнити два случаї: або приймаєм аксіом рівнобіжности, або нї.

В першім разї істнує лиш одна проста, що іде через одну точку і не перетинає даної простої; тоді для площи Гільберта мають значінє всї 5 аксіомів ґеометриї евклїдової і через се доходимо до сеї ґеометриї.

В другім случаю ідуть через одну точку дві півпрості ріжні, які даної простої не перетинають, а за ее кожда иньша проста, що іде з даної точки, ту просту перетинає. І на оборот слїдує з тяглости, що тоді до кождої даної простої належать дві ріжні півпрості, що ідуть через одну точку, але єї не перетинають; значить ся, маєм дві рівнобіжні лінії, а наша ґеометрия стаєсь ґеометриєю Bolyai-Лобачевского.

Вже з висше наведеного начерку можна набрати погляду на ідеї та змаганя Гільберта. Та хотя може декому видасть ся неприродним та задалеко йдучим втягати до основ ґеометриї так доволї скомплїковані квестиї, як теорию ґруп, відтворень та рухів, то однак не улягає сумнївам, що ся дорога є вповні рацыональна. Бо ґеометрия, яко наука погляду, мусить доконче опиратись на певних заложенях, аксіомах; но число тих аксіомів мусить бути обмежене до minimum, а з другого боку мусять, о скілько се можливе, они бути того рода, щоби могли устоятись супроти критики людского ума, одним словом, щоби були необходимо конечні та не дались оспорювати. Таким аксіомом, що попав під сильну критику, є славний аксіом рівнобіжности Евклїда; квестия, чи він є льоґічно необходимий, чи нї, дала почин до утвореня ґеометриї загальнїйшої, о меньше аксіомах, якої лиш специяльним случаєм є ґеометрия евклідова. Тому-то треба шукати таких аксіомів, які є як найзагальнійші та при нинішнім погляді науки зовсім певні. Таких аксіомів шукають як раз Lie та Hilbert (хотяй зовсім иньшим способом) в теориї перетворень; і ся дорога видасть ся зовсім рациональна, коли зважимо, що субстрат розслідів ґеометричних, се є площа, остає очевидно незмінна при певних рухах та оборотах, які всї єї точки переводять в иньші точки однозначно. З незмінности того субстрату та з заложеня апріористичного єго тяглости виходить безпосередно то мале число аксіомів Гільберта. Через дефініцию своєї площи зискав в кінци Гільберт се, що хотя она не має обмеженя, то однак дає ся порівнувати з скінченою частиною площи чисельної. Впроваджене кола правдивого (зглядно кривої Jordan'a, бо такою се коло є), кидає в кінци сьвітло на будову площи Гільберта; вдаряє ту мимохіть схожість основ сеї ґеометриї з теориєю Кляйна функций автоморфних, де т. зв. коло головне і поділ площи на райони, які ся взаїмно не перетинають, відгриває перворядну ролю. Гільберт вчинив проте один крок дальше до звязаня ґеометриї елементарної з теориєю функций і тому-то єго ідеї здаєсь містять в собі засновок до далеко йдучих узагальнень, засновок до глубшого вникненя в основи та аксіоми, на яких почиває наш погляд ґеометричний.

Берлїн, в жовтни 1902.