# Ґеометрия метова в оптиці ґеометричній.

**Після теориї Ф. Кляйна**

представив

**Др. Володимир Левицкий.**

В тамторічних викладах ґеометриї метової (зимовий семестр р. 1900/1) подав професор математики в Ґетінґен, Ф. Кляйн, цїлий ряд інтересних питань, в яких находить примінене ґеометрия метова. Ідучи за ним хочу ту навести кілька інтересних квестий оптичних, які Кляйн в своїх викладах розібрав, тим більше, що деякі з них що-йно оголосив він друком в „Zeitschrift für Mathematik u. Physik" том 46. Ті квестиї є: теория горонтеру та теория оптичних знарядів.

## I. Гороптер.

Гороптером називаєсь в фізиольоґічній оптиці ґеометричне місце усїх просторних точок, які при якім-небудь положеню обох очий кидають свої образи на відповідаючі собі місця сїтчанки[1]). На гороптері лежать проте точки, які обома очима бачимо поєдинчо, а не подвійно. (Всї иньші точки бачимо подвійно). Отже Кляйн завдає собі питанє, яким способом найти виключно при помочи т. зв. посвояченя (колїнеациї), що є основою метової ґеометриї, положенє гороптеру. Квестию сю розвязує він ось-так.

Як звісно, в оці істнує т. зв. точка узлова K, через яку переходять лучі сьвітла незаломані; якась точка поза оком дає на сїтчанцї образ, який буде слїдом луча, що з даної точки виходить

[1]) Пор. Helmholtz: Wissenschaftliche Abhlgn. Hermann: Lehrbuch der Physiologie.

і переходить через точку узлову. Наколи отже лишаєм на боці сферичну та хроматичну аберацию і акомодацию ока, то можем сказати, що око відбиває образ внїшного сьвіта на сітчанці яко малярску перспективу, якої основою є точка K.

Наколи возьмем пару очий з точками узловими $K_1$ і $K_2$, то при помічаню простору несьвідомо послугуємо ся — як в ґеометриї начерковій — системом двох таблиць (начерк поземий і прямовісний — Grundriss und Aufriss), бо при помочи двох очий означуєм не лиш вид, але і положенє предмету просторного, тому, що в нас є вже заздалегідь даний сталий відступ $K_1 K_2$. (Фіґ. I).

Наколи обома очима дивимо ся в перед себе, отже на точку безконечно далеку, то оба лучі, що доходять до наших очий, є рівнобіжні і трафляють відповідаючі собі точки сїтчанок. Такі два враженя сьвітляні, що падають на відповідаючі собі точки сїтчанки, відбираєм в дїйсности яко одно враженє.

Иньших точок фіксацийних (Fixationspunkt) (попри точку безконечно далеку), на які ми можемо звернути очи, є в просторі $\infty^3$, а тим самим є також $\infty^3$ ріжних зглядних положень обох очий. Одно око є лиш спосібне до $\infty^2$ ріжних положень, бо его положенє є вповнї означене, наколи є звісний напрям оси очної. Після засади Listing'a, який ввів понятє точок узлових, рух поодинокого ока сим способом виходить, що нове положенє повстає з положеня природного, наколи око яко цїлість обернемо довкола відповідної лїнїї рівникової (рівникова площа є прямовісна до оси очної).

Наколи тепер дамо очам одно з тих $\infty^3$ положень зглядом певної точки фіксацийної, то деж лежить гороптер, себ-то, які точки простору кидають образи на відповідаючі собі точки сїтчанок? Се питанє змінити можна в сей спосіб, що місто говорити про точки сїтчанок говорити будем про жмутки лучів, які виходять з точок $K_1$ і $K_2$, бо ті жмутки є через відповідаючі точки сїтчанок з собою пристайно спряжені (congruent auf einander bezogen). Питаєм проте, де лежать точки просторні, в яких ся перетинають відповідаючі собі лучі обох жмутків.

На се питанє дає відразу відповідь метова ґеометрия, що на місце ґеометричних точок пересїчи двох метових жмутків випадає в загалї крива третого степеня, яка переходить через осередки (центра) обох жмутків. Отже гороптер є в загалї кривою третого ряду, яка переходить через точки узлові обох очий. Специяльно коли обі оси очні, отже і відповідаючі собі лучі, є рівнобіжні, є гороптером цїла безконечно далека площа.

Гороптер є через се виспециялїзований, що він утворений через два пристайні жмутки лучів, і буде тому перетинав безконечно далеку площу в таких трох точках, що є спільні двом пристайним безконечно далеким полям точок (Punktfeld). Ті три точки будуть (після Кляйна) точки R $R_1$ $R_2$ такі, що усякий рух безконечно далекої площи є оборотом довкола точки R, а $R_1$ і $R_2$ є точки стиканя ся стичних, що виходять з точки R до кулистого кола[1]) остають все неподвижні. З тих точок є лиш точка R дїйсна, $R_1$ і $R_2$ мнимі (як і кулисте коло), отже гороптер мусить мати в безконечности дві точки мнимі; такою лїнїєю є еліпса кубічна, отже гороптер є кубічною елїпсою. Точки мнимі $R_1$ $R_2$ є точками коловими площи прямовісної до дїйсної асимптоти гороптера, яка іде через R. — Ту можемо мати три случаї (пор. фіґ. II): або гороптер є еліпсою кубічною скрученою в право, або в ліво, або звиріdненою кривою стіжковою з простою, що єї трафляє. Тою кривою стіжковою в гороптері мусить бути коло, а простою проста до кола прямовісна.

Понеже точок фіксацийних є $\infty^3$, то і гороптерів є $\infty^3$; отже як визначити положенє їх всїх? Наколи точка фіксацийна лежить в площі медіяльній с. є. по середині обох очий, то все, отже і гороптер, мусить бути симетрично положене. То само ся дїє, наколи точка фіксацийна находить ся в площі поземій, яка іде через точки узлові $K_1$ і $K_2$; тодї она є площею симетриї, бо в тім случаю після засади Listinga кожде око обернуло ся лиш довкола лїнїї прямовісної. В обох тих случаях прибирає гороптер конечно вид третий (звиріднена крива). Тодї маємо три підслучаї (фіґ. III).

a) точка фіксацийна A лежить на лїнїї пересїчи площи медіяльної і поземої; гороптер розпадає ся на коло, яке іде через точки $K_1$ і $K_2$, і на просту прямовісну в A.

---

[1]) Кулисте коло (Kugelkreis), яке в усїх теориях метової ґеометриї, а специяльно у Кляйна і Lie, відгриває первостепенну ролю, є крива 2. степеня, яка новстає, наколи кулю перетнемо безконечно далекою площею $t = 0$. Єго рівнанє є проте в сорядних точкових $t = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, а в сорядних Plückera $u^2 + v^2 + w^2 = 0$ В площі відгривають точки колові ту саму ролю, що кулисте коло в просторі. Рівнанє $x^2 + y^2 + z^2 \triangleq 0$ представляє т. зв. стіжок мінімальний, а єго творячі є мінімальними простими. Їх рівнанє є очевидно $x \pm iy = 0$. Кут, який творять дві які-небудь прості, є після Laguerre'a (Nouvel. Annal. 1853) рівний:

$$\varphi = \frac{i}{2} \log(DV),$$

де (DV) є після означеня Кляйна відношенє подвійне обох простих і обох мінімальних, які з їх точки пересїчи виходять.

б) точка А лежить лиш в площі медіяльній; горептер є тоді колом (через точки $K_1$ і $K_2$) і прямовісною через А; саме коло є скісно положене.

в) точки $K_1$, $K_2$, А лежать в тій самій площи поземій; горептер розпадає ся на коло і яку-небудь прямовісну просту; но она не доконче мусить іти через точку А.

Обі площі (медіяльна і позема) розділять простор на чотири великі чвертки. Наколи точку фіксацийну виберем тепер денебудь, то гороптери являють ся кубічними елїпсами; в двох (пр. першій і третій) є они в право, в двох других в лїво скрученими; але в котрих чвертках є ті криві в право, а в котрих в лїво скручені, сего не маєм спроможности рішити.

## II. Теория оптичних знарядів.

Кляйн розбирає ту чотири квестиї: звязь оптики геометричної з геометриєю лїнїйною (або з теориєю посвояченя)[1], далї чи можливі є т. зв. абсолютні оптичні знаряди, дальше розсліджує заломанє сьвітла яко проблєм вариацийний в відношеню до т. зв. характеристичної функциї Hamilton'a, а в кінци розбирає умови, на яких можливо построїти абсолютну астрономічну камеру, при чім показує звязь між функциєю Hamilton'a а т. зв. айконалем (Eikonal) Брунса. Перейдем по черзї усї ті квестиї.

### а) Звязь оптики геометричної з геометриєю лїнїйною, а абсолютні знаряди оптичні.

1. Луч впадаючий, що може мати в просторони $\infty^4$ положень, заломлює ся в цілім системі сочок і виходить яко луч простолїнїйний, при чім може мати знова $\infty^4$ положень. Подібнож один з $\infty^2$ жмутів, які можуть істновати в просторі, виходить з систему сочок яко якийсь жмут лучів сьвітла і обводить т. зв. поверхню огнищеву або кавстичну.

Приймім, що лучі, які лежать в просторі предметовім (Objectraum) в одній площи, остають в одній площи і в просторі образовім (Bildraum), заложенє, яке має місце в знарядах оптичних, де все довкола оси є симетрично розміщене, то сим способом сходимо до геометриї лїнїйної площи, зглядно до дуалїстичної з нею геометриї точкової.

---

[1]) Се питанє в части розбирав Czapski: Opt. Instrumente 1893.

Наколи точка в просторі предметовім є $(xy)$, то відповідна точка $(x'y')$ в просторі образовім повстає через якесь відтворене:

$$x' = \varphi(xy), \quad y' = \psi(xy),$$

де $\varphi$ і $\psi$ є якісь аналїтичні функциї.

Наколи возьмем точку $(x_0 y_0)$ в однім, а точку $(x_0' y_0')$ в другім просторі, то їх найблизше окружене є:

$$x' = x_0' + \delta x_0' = \varphi(x_0 + \delta x_0, \ y_0 + \delta y_0) = \varphi(x_0 y_0) + a\delta x_0 + b\delta y_0 + \cdots$$
$$y' = y_0' + \delta y_0' = \psi(x_0 + \delta x_0, \ y_0 + \delta y_0) = \psi(x_0 y_0) + c\delta x_0 + d\delta y_0 + \cdots$$

а задержуючи лиш перші степенї $\delta x_0$ і $\delta y_0$ дістанем з огляду на се, що $x' = \varphi(x_0 y_0)$, $y' = \psi(x_0 y_0)$:

$$\left.\begin{aligned} \delta x_0' &= a\delta x_0 + b\delta y_0 \\ \delta y_0' &= c\delta x_0 + d\delta y_0 \end{aligned}\right\},$$

а се є посвоячене перетворене, значить ся, що окружене точки $(x_0' y_0')$ є посвоячено відтворене (affin abgebildet) на окружене точки $(x_0 y_0)$.

З сего слїдує, що проста, яка іде через окружене точки $(x_0 y_0)$, дасть просту в окруженю точки $(x_0' y_0')$; криві дадуть криві. Криві, що ідуть через точку $(x_0 y_0)$ і мають в тій точцї спільну стичну, переходять в криві, які в точцї $(x_0' y_0')$ мають також спільну стичну, себ-то в точцї $(x_0' y_0')$ стикають ся. Наше перетворене є проте одним з т. зв. перетворень стичних (як се назвав Lie).

А що:

$$\frac{\delta x_0'}{\delta y_0'} = \frac{a\delta x_0 + b\delta y_0}{c\delta x_0 + d\delta y_0},$$

то напрями зміняють ся метовó, отже оба жмутки лучів, що ідуть через $(x_0 y_0)$ і $(x_0' y_0')$, остають до себе в відношеню метовім.

Возьмім тепер сорядні лїнїйні площи, то в однім просторі маєм просту $(u_0 v_0)$, в другім просту $(u_0' v_0')$; тоді всї криві, що сталий луч $(u_0 v_0)$ дотикають в якійсь означеній точцї, переходять в криві, які так само дотикають луч $(u_0' v_0')$ в відповідній точцї; значить ся і тепер оба простори переходять в себе через перетворене стичне. Наколи на лучу $(u_0 v_0)$ возьмем ряд точок стичних, то на лучу $(u_0' v_0')$ дістанем також ряд точок стичних, які є з тамтими метовó спряжені.

В знарядах оптичних спадають звичайно напрями $(u_0 v_0)$ і $(u_0' v_0')$ в одну лїнїю, а то в вісь знаряду, на якій дістаєм сим способом два метові ряди точок. Крива, яка в просторі предметовім дотикає ту вісь в якійсь точці, переходить в криву, яка дотикає вісь в відповідній точці простору образового.

В оптиці елементарній бересь в просторі предметовім звичайно лучі, що переходять через одну сталу точку оси; в просторі образовім обводять відповідні лучі криву кавстичну, яка є симетрична та якої вершком є відповідна точка стичности (фіґ. IV). В просторі образовім відповідні лучі є отже стичними сеї кривої кавстичної. З цїлої сеї лінії кавстичної задержуєсь в оптиці елементарній лиш вершок і він називає ся образом. Наколи отже в просторі предметовім порушаєсь точка по оси знаряду, то єї образ описує на оси в просторі образовім ряд метовий точок. — Як бачимо наші дослїди оперли ся лиш на припущеню, що право заломаня (наше перетворене) є функциєю аналїтичною; вигляд сего права зовсїм ту не має значіня, все остає звязь метова між точками оси знаряду.

2. Возьмім тепер під увагу т. зв. абсолютний знаряд оптичний, т. є. знаряд, де всї лучі, які ідуть через якусь точку (abc), по заломаню точно ся збирають в відповідній, але тій самій точці (a'b'c') і огляньмо, чи такий знаряд є можливий. Тодї кождій простій відповідає одна проста, значить ся оба простори, предметовий і образовий, є злучені через посвоячене.

Бачилисьмо в горі, що вигляд права заломаня не має на звязь метову ніякого впливу, коли лиш она є функциєю аналїтичною; в оптиці обходить нас звісне право заломаня:

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = n,$$

де n є сочинник заломаня, тому погляньмо, що нам се право скаже. Наколи на лучу впадаючім возьмемо якусь точку (pq), а на заломанім (p'q'), то тодї буде:

$$\varrho p' = np$$
$$\varrho q' = \sqrt{q^2 + (1 - n^2)p^2},$$

де $\varrho$ є сочинник пропорциональности. З відси слїдує:

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{p'}{n}$$
$$\frac{q}{\varrho} = \pm \sqrt{q'^2 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) p'^2},$$

отже в огляду на корінь не є відношенє обох жмутків лїнїйне, але дво-двозначне, отже відношенє се є незведиме, бо маємо до дїла з двома знаками.

Возьмім тепер під увагу мінімальні прості т. є. положім $q = ip$; тоді буде:

$$\varrho p' = np$$
$$\varrho q' = \pm \sqrt{-n^2p^2} = \pm nip$$

отже:

$$\frac{p'}{q'} = \pm i,$$

т. є. проста мінімальна остає мінімальною. Наколи така мінімальна проста трафить середовище ломляче, то — після знаку — або переходить незаломана, або перетворює ся в другу мінімальну. — Наколи маєм n таких ломлячих середовищ, то кожда проста розділяє ся — як звісно — на $2^n$ простих, але проста мінімальна переходить все лиш в просту мінімальну. В абсолютнім знаряді оптичнім, де маєм колінеацию (посвоячене), кождий луч, що йде з якоїсь точки (xyz), розпадає ся — правда — на $2^n$ лучів, але з тих один мусить переходити через відповідну точку $(x'y'z')$ і лиш сей луч берем під увагу. Коли через точку (xyz) возьмем луч мінімальний, то відповідний луч, що іде через точку $(x'y'z')$, мусить також бути мінімальний; тоді кулисте коло в просторі предметовім дасть кулисте коло в просторі образовім. Значить ся колінеация, яка лучить обі простори, є перетворенем подібности (Aehnlichkeitstransformation). Наколи предмет і образ находять ся в тім самім середовищи, пр. в воздусї, тоді се перетворене дістає на відношене $\pm 1$, отже стає ся перетворенем пристайним; предмет і образ є тоді пристайні, так як колиб зайшло пару разів відбите. Предмет є тоді заступлений через образ відбитий; отже абсолютний знаряд оптичний не мігби служити яко мікроскоп або телескоп.

### б) Функция характеристична Hamilton'а і абсолютна астрономічна камера.

1. Наколи маєм систем точок, де $c_i$ є скоростями в поодиноких середовищах, а $l_i$ дорогами, які переходить луч заломаний, що виходить з точки впадання (xyz) та іде до точки виходу $(x'y'z')$, в тих всїх середовищах, тоді є сума

$$\sum_{(xyz)}^{(x'y'z')} \frac{l_i}{c_i}$$

міні-максімум т. є. луч сьвітляний переходить (після теориї Bernouilli) таку дорогу від точки (xyz) до (x'y'z'), що та сума є мінімаксімум, отже еї варияция є:

$$\delta \sum \frac{l_i}{c_i} = 0.$$

Для середовища, яке, як пр. наша атмосфера, зміняє ся способом тяглим, буде очевидно:

$$\delta \int_{(xyz)}^{(x'y'z')} \frac{l_i}{c_i} = 0.$$

Hamilton[1]) називає ту суму так означену, що є вже мінімаксімум, характеристичною функциєю знаряду оптичного і значить еї:

$$\sum \frac{l_i}{c_i} = X(xyz|x'y'z').$$

А що $\frac{l_i}{c_i}$ є часом на перебуте одного середовища, то ся функция означає час, якого потребує сьвітло, щоби з початкової точки предмета дійти до образа.

Возьмім:

$$X(xyz|x'y'z') = \text{Const.},$$

де (xyz) є точка стала, а (x'y'z') біжучі сорядні, то ся стала означає якийсь даний час. X = Const. означає проте филї, що виходячи зі сталої точки (xyz) проникають що раз дальше в простор образовий і там ся розходять зі скоростию сьвітла. Наколи середовища є рівноподобні, то лучі сьвітла, що виходять з (xyz), стоять все в просторі образовім нормально до филь.

Возьмім на однім з лучів, що виходять з точки (xyz), точку $(x+p, y+q, z+r)$ таку, що відступ $p^2+q^2+r^2 = \frac{1}{c^2}$, де c є скоростию сьвітла, а так само в просторі образа возьмім точку $(x'y'z')$ і точку $(x'+p', y'+q', z'+r')$, де $p'^2+q'^2+r'^2 = \frac{1}{c'^2}$.

---

[1]) The theory of system of rays (Irish Transactions 1828).

Наколи знаемо функцию $X(xyz|x'y'z')$, то після Hamiltona є:

$$p' = \frac{\partial X}{\partial x'} \qquad p = \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$q' = \frac{\partial X}{\partial y'} \qquad q = \frac{\partial X}{\partial y}$$

$$r' = \frac{\partial X}{\partial x'} \qquad r = \frac{\partial X}{\partial z}$$

а що: $p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{c^2}$, то є:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{c^2}.$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial z'}\right)^2 = \frac{1}{c'^2}.$$

Маємо отже шість формул, які жадають, щоби X сповняло два частні рівнаня ріжничкові. Наколи точка виходу є дана, тодї можна при помочи наших формул винайти чотири істотні сталі луча в просторі образовім.

2. В абсолютнім оптичнім знаряді малисьмо між точкою (xyz) а (x'y'z') відношене подібности, т. є.

$$x' = \lambda x$$
$$y' = \lambda y$$
$$z' = \lambda z$$

Тодї час, якого потребує луч, щоби перейти від (xyz) до (x'y'z'), є независимий від дороги (після засади міні-максімальної) і є якоюсь функциєю F(xyz).

Зміняймо тепер положене сталої точки (xyz). Наколи луч перейде (в просторі предметовім) дорогу r від точки (xyz) до точки $(x_1y_1z_1)$, то луч мусить перейти (в просторі образа) дорогу від точки (x'y'z') до точки $(x'_1\, y'_1\, z'_1)$, т. є. дорогу $\lambda r$. Час потрібний на перебуте дороги $(x_1\, y_1\, z_1)$ ——— $(x'_1\, y'_1\, z'_1)$ є очевидно:

$$F(x_1\, y_1\, z_1) = F(xyz) + \frac{\lambda r}{c} - \frac{r}{c} = F(xyz) + \frac{(\lambda - 1) r}{c},$$

де c є скоростию сьвітла.

Для дороги r, яка відповідає пересуненю точки (xyz) до точки $(x_2\, y_2\, z_2)$, дістанемо відповідну дорогу $\lambda r$, рівну пересуненю $(x'\, y'\, z')$ ——— $(x'_2\, y'_2\, z'_2)$, а час на се пересунене, є очевидно:

$$F(x_2\, y_2\, z_2) = F(x\, y\, z) + \frac{(\lambda - 1) r}{c};$$

т. з. дві точки $(x_1 y_1 z_1)$ і $(x_2 y_2 z_2)$ простору предметового, віддалені рівно від третої точки, мають той сам час сьвітла F.

А що $(x_1 y_1 z_1)$ і $(x_2 y_2 z_2)$ не підлягають нїяким обмеженям, проте всї точки простору предметового мають той сам час сьвітла; отже $F(xyz)$ мусить бути стала. Тодї мусить відпасти $\frac{(\lambda-1)r}{c}$, т. є. $\lambda = 1$, отже образ і предмет є — як се вже знаєм — пристайні, т. є. $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$.

Як же виглядає тепер функция X? Филї сьвітла ідуть з точки $(xyz)$ і ідуть до відповідної точки, яка також є $(xyz)$. Від точки $(xyz)$ до $(xyz)$ є та функция стала, отже щоби дійти від $(xyz)$ в просторі предметовім до точки $(xyz)$, а з відси до $(x'y'z')$ в просторі образовім, треба часу:

$$X(xyz|x'y'z') = \text{Const} \pm \frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}{c}$$

(корінь представляє віддалене). Знак $\pm$ походить звідси, що филя іде або від $(xyz)$ до $(x'y'z')$, або $(x'y'z')$ до $(xyz)$ в просторі образовім. Очевидно приняли ми ту сорядні прямокутні.

3. В дальшім тягу розбирає Кляйн квестию можливости т. зв. абсолютної камери астрономічної; се бувби знаряд, де всї лучі впадаючі в тім самім напрямі $(pqr)$ рівнобіжно зовсїм точно всї по заломаню збирають ся в однїй і тій самій точцї. Образ є тодї малярскою перспективою предмету, а щоби єго найти, треба взяти точку узлову K; луч, що іде через K, визначає точку образа. Жадаєм проте, щоби рівнобіжні лучі о напрямі $(pqr)$ в такій точцї камери (пр. плити фотоґрафічної) точно ся зійшли, яка випаде при конструкциї малярскої перспективи з точки узлової K, та питаєм, чи можливо найти таку функцию характеристичну X, щоби ту умову сповняла. В який спосіб опісля, коли знайдем X, утворити відповідну комбінацию сочок, се лишаєм зовсїм на боцї.

До рішеня сего питаня послугуєсь Кляйн функциєю, яку до оптики впровадив Bruns[1]) під назвою айкональ (Eikonal), при чім виказує звязь між сею функциєю, а функциєю Hamilton'a, що війшло уваги Bruns'a.

Як в горі подано, функция $X(xyz|x'y'z')$ сповняла шість рівнань і два частні рівнаня ріжничкові так, що луч сьвітляний о напрямі

[1]) Sächs. Abhlgn. Bd. 21. 1895 Leipzig.

(pqr), який переходить через точку (xyz), переміняє ся на основі тих рівнань на луч о напрямі (p'q'r'), який іде через точку (x'y'z').

Впровадьмо місто (xyz) і (x'y'z') иньші сорядні. Най ($\xi$, $\eta$, 0) буде точка, де луч сьвітляний трафляє площу $z = 0$, а ($\xi'$, $\eta'$, 0) точка, де луч трафляє площу $z' = 0$; $\varrho$ най буде віддалене точки (xyz) від ($\xi\eta 0$), а $\varrho'$ віддалене точки (x'y'z') від ($\xi'\eta'0$). Ті ($\xi\eta\varrho$) і ($\xi'\eta'\varrho'$) берем за сорядні; а що cosinus'и кутів, які луч сьвітляний творить з осию x, y, z є cp, cq і cr, то дістанемо:

$$x = \xi + c\varrho p$$
$$y = \eta + c\varrho q$$
$$z = 0 + c\varrho r$$

та анальоґічно:

$$x' = \xi' + c'\varrho' p'$$
$$x' = \eta' + c'\varrho' q'$$
$$z' = 0 + c'\varrho' r'.$$

Впровадьмо се в функцию $X(xyz|x'y'z')$; повна ріжничка сеї функциї є:

$$dX = -(pdx + qdy + rdz) + (p'd'x' + q'd'y' + r'd'z').$$

А що:

$$dx = d\xi + cpd\varrho + c\varrho dp$$
$$dz = d\eta + cqd\varrho + c\varrho dq$$
$$dz = 0 + crd\varrho + c\varrho dr$$

то з огляду на: $p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{c^2} = \text{const.}$

буде:

$$pdx + qdy + rdz = pd\xi + qd\eta + d\varrho$$

отже:

$$dX = -(d\varrho + pd\xi + qd\eta) + (d\varrho' + p'd\xi' + q'd\eta')$$

або:

$$dX = d\varrho' - d\varrho + (p'd\xi' + q'd\eta' - pd\xi - qd\eta);$$

а звідси:

$$X = \varrho' - \varrho + \int (p'd\xi' + q'd\eta' - pd\xi - qd\eta) = \varrho' - \varrho + E(\xi\eta|\xi'\eta').$$

Такий є новий вид функциї Hamilton'a.

По обчисленю дістанемо тепер на частні рівнаня ріжничкові для X слїдуючі рівнаня:

$$\frac{\partial X}{\partial \varrho'} = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial \varrho} = -1.$$

Звідси слїдує, що функция E є зовсїм независима і не звязана нїяким частним рівнанем ріжничковим. Ту функцию E назвемо після Bruns'а **айкональом**. З огляду на єї вид є:

$$p' = \frac{\partial E}{\partial \xi'}, \quad p = -\frac{\partial E}{\partial \xi}$$
$$q' = \frac{\partial E}{\partial \eta'}, \quad q = -\frac{\partial E}{\partial \eta} \qquad 1)$$

В сей спосіб виражають ся сталі напрямні луча впадаючого та луча виходячого. До тих самих формул доходить Bruns зовсїм иньшим способом дорогою чисто-аналїтичною.

Возьмім тепер площу $z' = 0$ поземо (як пр. фотоґрафічну плиту), і на ній точку образову $(\xi'\eta')$; з точки узлової K попровадьмо прямовісну f. Най луч впадаючий іде точно через точку K до $(\xi'\eta')$ (фіґ. V). Тодї є:

$$\xi' : \eta' : -f = p : q : r = p : q : \sqrt{\frac{1}{c^2} - p^2 - q^2}.$$

А з того:

$$p = -\frac{\xi'}{c\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + f^2}}, \quad q = -\frac{\eta'}{c\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + f^2}}. \qquad 2)$$

**Наколи камера астрономічна має бути абсолютна, то мусять заходити повисші рівнаня.**

Щоби тепер згоджували ся рівнаня 1) і 2) мусить айкональ мати форму:

$$E(\xi\eta|\xi'\eta') = \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{c\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + f^2}} + \varphi(\xi'\eta'),$$

де $\varphi(\xi'\eta')$ є яка-небудь функция.

Наколи отже хочем построїти абсолютну камеру астрономічну, мусимо старати ся, щоби айкональ мав висше подану форму.

*Тернопіль в мартї 1902.*