Додаток до теориї дробів тяглих та ґрупи модулової.

(Друга нота.)

Написав

Володимир Левицький.

1. В першій розвідці[1]) розслїджував я трансформациї модулові форми:

$$Uz = -\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cdots - \cfrac{1}{a+z}}}} = TS^a TS^a T \cdots TS^a z$$

де основні трансформациї мають вид:

$$Sz = z + 1, \quad Tz = -\frac{1}{z} \quad (z = x + iy)$$

і показав, як можна безпосередно обчислити таку n-кратну ітерацию без звиваня дроба тяглого. Взір, який я подав, дає спроможність повисший тяглий дроб обчислити без знаня вартостий приближених.

Тепер маю намір піддати розслїдам зовсім загальний случай модулових трансформаций:

$$Uz = TS^{a_n} TS^{a_{n-1}} TS^{a_{n-2}} T \cdots TS^{a_1} z \qquad 1)$$

і

$$Uz = S^{a_n} TS^{a_{n-1}} TS^{a_{n-2}} T \cdots TS^{a_1} z \qquad 2)$$

---

[1]) Збірник мат.-природ. т. IV. зош. 2.; також Monatshefte für Math. u. Phys. p. XI. ст. 118 sqts. (Wien).

(a_n, a_{n-1}, ... числа цїлі дійсні), отже розслїдити дроби тяглі форми:

$$Uz = -\cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \cdots - \cfrac{1}{a_1 + z}}}}$$

і

$$Uz = a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \cdots - \cfrac{1}{a_1 + z}}}$$

Ті розслїди дадуть нам вигідні форми до обчисленя повисше наведених дробів тяглих, зглядно дадуть нам можність найти місце, до якого загальна модулова трансформация переносить точку z півплощі.

2. Наколи означимо дроб тяглий:

$$\cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \cdots - \cfrac{1}{a_1 + z}}}}$$

через $\varphi_n(z)$, дістанемо, як се очевидно, слїдуючу реляцию:

$$a_{n+1} - \varphi_n = \frac{1}{\varphi_{n+1}} \qquad 3)$$

Впровадьмо вираженє:

$$\frac{1}{\varphi_n \varphi_{n-1} \varphi_{n-2} \cdots \varphi_1} = F_n(z) \qquad 4)$$

то після 3) дістанемо:

$$\frac{a_{n+1} - \varphi_n}{\varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1} = F_{n+1}(z)$$

або, що на одно виходить,

$$a_{n+1} F_n - F_{n-1} = F_{n+1}(z) \qquad 5).$$

На основі сеї реляциї можем виписати слїдуючі рівнаня в числї $(n-2)$:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \; F_{n-1} - F_{n-2} = F_n \\ a_{n-1} F_{n-2} - F_{n-3} = F_{n-1} \\ a_{n-2} F_{n-3} - F_{n-4} = F_{n-2} \\ a_{n-3} F_{n-4} - F_{n-5} = F_{n-3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_3 \; F_2 - F_1 = F_3 \end{array}\right\} \qquad 6).$$

3. Щоби з сих рівнань виелїмінувати величини F_{n-1}, F_{n-2}, F_{n-3}, ⋯, творимо слїдуючі вираженя:

$$a_n = C_n^{(0)}, \quad C_n^{(-1)} = 1$$

$$a_{n-1}\, a_n - 1 = C_{n-1}^{(0)}\, C_n^{(0)} - C_n^{(-1)} = C_n^{(1)}$$

$$a_{n-2}\, C_n^{(1)} - a_n = C_{n-2}^{(0)}\, C_n^{(1)} - C_n^{(0)} = C_n^{(2)}$$

$$a_{n-3}\, C_n^{(2)} - C_n^{(1)} = C_{n-3}^{(0)}\, C_n^{(2)} - C_n^{(1)} = C_n^{(3)}$$

$$a_{n-t}\, C_n^{(t-1)} - C_n^{(t-2)} = C_{n-t}^{(0)}\, C_n^{(t-1)} - C_n^{(t-2)} = C_n^{(t)}$$

при чім треба покласти $n > t$; $n = 0$, 1 треба відкинути, бо в тім разї приходилоб в повисших вираженях a_0, отже член, якого в дробі тяглім нема.

Для $t = 0$ дістанемо з послїдного рівнаня:

$$C_n^{(0)} = C_n^{(0)}\, C_n^{(-1)} - C_n^{(-2)},$$

отже $C_n^{(-2)} = 0$;

для $t = -1$ дістанемо:

$$C_n^{(-1)} = C_{n+1}^{(0)}\, C_n^{(-2)} - C_n^{(-3)},$$

отже:

$$C_n^{(-3)} = -C_n^{(-1)} = -1$$

і т. д.; загально дістанемо:

$$C_n^{(-2s)} = 0, \quad C_n^{(-(4s+1))} = 1, \quad C_n^{(-(4s+3))} = -1 \qquad (n > 1).$$

Очевидно: $C_{-n}^{(t)} = 0$.

Наколи помножимо рівнаня 6) постепенно через:

$$1$$

$$C_n^{(0)}$$

$$C_n^{(1)}$$

$$C_n^{(2)}$$

$$C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(0)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(-1)}$$

$$C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(1)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(0)}$$

$$C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(2)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(1)}$$

$$C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(3)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(2)}$$

$$C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(n-8)}$$

і додамо, то дістанемо сейчас:

$$F_n = (a_3 F_2 - F_1)\left(C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}\right) - \left(C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-9)}\right) F_2 \quad 7)$$

а що:

$$\varphi_n = \frac{F_{n-1}(z)}{F_n(z)},$$

то дістанемо *форму, якої шукаємо:*

$$\varphi_n(z) = \frac{(a_3 F_2 - F_1)\left(C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-9)}\right) - \left(C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-9)} - C_n^{(1)} C_{n-5}^{(n-10)}\right) F_2}{(a_3 F_2 - F_1)\left(C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}\right) - \left(C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-9)}\right) F_2} \quad 8).$$

Ся форма має однак лиш значінє для $n > 5$, бо на случай $n = 5$ виступає C_0, що ми виключили; що так є, слїдує з відси, що ми доперва пяте рівнанє помножили через такий чинник, як прочі, підчас коли $\varphi_5 = \frac{F_4}{F_5}$.

Для $n \leqq 5$, де отже скількість членів є дуже мала, можем від разу виписати слїдуючі очевидні форми:

$$\varphi_3 = \frac{F_2}{a_3 F_2 - F_1}, \quad \varphi_4 = \frac{a_3 F_2 - F_1}{(a_3 F_2 - F_1) C_4^{(0)} - F_2}, \quad \varphi_5 = \frac{(a_3 F_2 - F_1) C_4^{(0)} - F_2}{(a_3 F_2 - F_1) C_5^{(1)} - C_5^{(0)} F_2}.$$

На случай $n = 6$ виступають в загальній формі чинники $C_1^{(-4)}$ і $C_1^{(-3)}$, які ми висше вилучили. Наколи однак розважимо, що:

$$\varphi_6 = \frac{F_5}{F_6}$$

та порівнаємо виражене:

$$F_5 = (a_3 F_2 - F_1) C_5^{(1)} - C_5^{(0)} F_2$$

з чисельником форми 8), то дістанемо сейчас:

$$C_1^{(-3)} = -1, \quad C_1^{(-4)} = -\frac{C_5^{(0)} + C_5^{(2)}}{C_5^{(1)}}$$

так що форма 8) дає ся застосувати для всїх тяглих дробів, де $n \geqq 6$. Форма та є особливо догідна для висших n, як се сейчас на примірах побачимо.

Наколи в $\varphi_n(z)$ змінимо знак, дістанемо трансформацию модулову 1), наколи обчислимо $\varphi_{n-1}(z)$ та утворимо виражене $a_n - \varphi_{n-1}(z)$, дістанемо трансформацию 3).

4) Тепер випробуєм вірність форми 8) на примірах.

а) Най:

$$\varphi_6(z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1+z}}}}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1+z}{z}}}}} =$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{z}{2z-1}}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{2z-1}{3z-2}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{3z-2}{4z-3}} = \frac{4z-3}{z-1}.$$

Рахунок є отже досить довгий, як бачимо; а тимчасом на основі форми 8) дістанемо:

$$F_1 = 1 + z, \ F_2 = z$$

$$\varphi_6 = \frac{(2z-1)\left(C_5^{(2)} C_2^{(-2)} - C_5^{(1)} C_1^{(-3)}\right) - \left(C_5^{(2)} C_2^{(-3)} - C_5^{(1)} C_1^{(-4)}\right) F_2}{(2z-1)\left(C_6^{(2)} C_3^{(-1)} - C_6^{(1)} C_2^{(-2)}\right) - \left(C_6^{(2)} C_3^{(-2)} - C_6^{(1)} C_2^{(-3)}\right) F_2}.$$

А що:

$$C_2^{(-2)} = 0, \ C_2^{(-3)} = -1, \ C_5^{(1)} = 3, \ C_5^{(2)} = 7, \ C_6^{(1)} = 1, \ C_6^{(2)} = 1, \ C_3^{(-1)} = 1,$$
$$C_1^{(-3)} = -1, \ C_1^{(-4)} = -3,$$

то вийде сейчас:

$$\varphi_6 = \frac{(2z-1)\,3 - (-7+9)\,z}{(2z-1) - z} = \frac{4z-3}{z \quad 1}.$$

Інакше: трансформация:

$$TSTS^2TS^2TS^3TSTSz$$

переносить точку z півплощі в точку $\frac{3-4z}{z-1}$ тоїже.

б)

$$\varphi_6 = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2+z}}}}}} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{2+z}{3+2z}}}}} =$$

$$= \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 \quad \cfrac{3+2z}{10+7z}}}} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{10+7z}{27+19z}}} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{27+19z}{17+12z}} = \frac{17+12z}{7+5z};$$

а на основі 8) дістанемо:

$$F_1 = 2 + z, \quad F_2 = 3 + 2z$$

$$\varphi_6 = \frac{(10 + 7z)\left(C_5^{(2)} C_2^{(-2)} - C_5^{(1)} C_1^{(-3)}\right) - \left(C_5^{(2)} C_2^{(-3)} - C_5^{(1)} C_1^{(-4)}\right) F_2}{(10 + 7z)\left(C_6^{(2)} C_3^{(-1)} - C_6^{(1)} C_2^{(-2)}\right) - \left(C_6^{(2)} C_3^{(-2)} - C_6^{(1)} C_2^{(-3)}\right) F_2}.$$

А що:

$$C_2^{(-2)} = 0,\; C_2^{(-3)} = -1,\; C_3^{(-1)} = 1,\; C_5^{(1)} = 2,\; C_5^{(2)} = 4,\; C_6^{(1)} = 1,\; C_6^{(2)} = 1,$$

$$C_1^{(-3)} = 1,\; C_1^{(-4)} = -\frac{7}{2},$$

то дістанемо:

$$\varphi_6 = \frac{(10 + 7z)\,2 - (3 + 2z)}{(10 + 7z) - (3 + 2z)} = \frac{17 + 12z}{7 + 5z}.$$

в) Возьмім:

$$\varphi_9 = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 + z}}}}}}}}},$$

то обчислене через досить довгий рахунок дає на вислїд:

$$\frac{18 + 41z}{7 + 16z}.$$

Тимчасом після нашої форми в:

$$F_1 = 1 + z, \quad F_2 = 1 + 2z, \quad a_3 = 2.$$

$$\varphi_9 = \frac{(a_3 F_2 - F_1)\left(C_8^{(2)} C_5^{(1)} - C_8^{(1)} C_4^{(0)}\right) - \left(C_8^{(2)} C_5^{(0)} - C_8^{(1)} C_4^{(-1)}\right) F_2}{(a_3 F_2 - F_1)\left(C_9^{(2)} C_6^{(2)} - C_9^{(1)} C_5^{(1)}\right) - \left(C_9^{(2)} C_6^{(1)} - C_9^{(1)} C_5^{(0)}\right) F_2}.$$

А що:

$$C_8^{(1)} = 5,\; C_8^{(2)} = 18,\; C_5^{(0)} = 1,\; C_5^{(1)} = 0,\; C_4^{(0)} = 1,\; C_4^{(-1)} = 1,\; C_9^{(1)} = 1,$$

$$C_9^{(2)} = 2,\; C_6^{(1)} = 3,\; C_6^{(2)} = -1,$$

то дістанемо:

$$\varphi_9 = \frac{-(1 + 3z)\,5 - (18 - 5)(1 + 2z)}{-(1 + 3z)\,2 - (6 - 1)(1 + 2z)} = \frac{18 + 41z}{7 + 16z}.$$

г) Най:

$$\varphi_{10} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{5 + z}}}}}}}}}} = \frac{23 + 5z}{32 + 7z},$$

вислїд одержаний через довгий рахунок.

Тимчасом після форми 8) є:

$$a_3 = 2, \ F_1 = 5 + z, \ F_2 = 14 + 3z,$$

$$\varphi_{10} = \frac{(23 + 5z)\left(C_9^{(2)} C_6^{(2)} - C_9^{(1)} C_5^{(1)}\right) - \left(C_9^{(2)} C_6^{(1)} - C_9^{(1)} C_5^{(0)}\right) F_2}{(23 + 5z)\left(C_{10}^{(2)} C_7^{(3)} - C_{10}^{(1)} C_6^{(2)}\right) - \left(C_{10}^{(2)} C_7^{(2)} - C_{10}^{(1)} C_6^{(1)}\right) F_2}.$$

Ту є:

$$C_9^{(1)} = 0, \ C_9^{(2)} = -1, \ C_5^{(1)} = 1, \ C_5^{(0)} = 1, \ C_6^{(1)} = 0, \ C_6^{(2)} = -1, \ C_{10}^{(1)} = 1,$$

$$C_{10}^{(2)} = -1, \ C_7^{(1)} = 0, \ C_7^{(2)} = -1, \ C_7^{(3)} = -2;$$

отже:

$$\varphi_{10} = \frac{23 + 5z}{(23 + 5z)\,2 - (14 + 3z)} = \frac{23 + 5z}{32 + 7z}.$$

Значить ся: трансформация $TSTSTSTSTSTSTS^2TS^2TS^3TSz$ переносить точку z півплощі в точку $-\dfrac{23 + 5z}{32 + 7z}$.

Наколи всї члени $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_1 = a$ є рівні, маєм до дїла з специяльним случайом, який я вже в першій розвідцї розібрав.

5. Хочемо тепер розслїдити граничний случай $\lim n = \infty$, с. є. безконечно-многократну ітерацию трансформациї модулової. В тій цїли напишім реляцию 8) в слїдуючім видї:

$$\frac{a_3 F_2 C_{n-1}^{(2)}\left(C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-4}^{(n-9)}\right) - C_{n-1}^{(1)}\left(C_{n-5}^{(n-10)} - C_{n-5}^{(n-9)}\right) F_2 - F_1\left(C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-9)}\right)}{a_3 F_2 C_n^{(2)}\left(C_{n-3}^{(n-7)} - C_{n-3}^{(n-8)}\right) - C_n^{(1)}\left(C_{n-4}^{(n-9)} - C_{n-4}^{(n-8)}\right) F_2 - F_1\left(C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}\right)}.$$

А що для $\lim n = \infty$ можна покласти:

$$\lim_{n=\infty}\left(C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-4}^{(n-9)}\right) = 0.$$

$$\lim_{n=\infty}\left(C_{n-5}^{(n-10)} - C_{n-5}^{(n-9)}\right) = 0.$$

$$\lim_{n=\infty}\left(C_{n-3}^{(n-7)} - C_{n-3}^{(n-8)}\right) = 0.$$

$$\lim_{n=\infty}\left(C_{n-4}^{(n-9)} - C_{n-4}^{(n-8)}\right) = 0.$$

проте дістанемо:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = \frac{C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-9)}}{C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}},$$

а се вираженє дає, наколи в границї положимо:

$$\lim_{n=\infty} C_{n-4}^{(n-8)} = \lim_{n=\infty} C_{n-3}^{(n-8)} = \lim C_{n-5}^{(n-9)},$$

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = \frac{C_{n-1}^{(2)} - C_{n-1}^{(1)}}{C_n^{(2)} - C_n^{(1)}} = \lim_{n=\infty} \frac{(a_{n-1} a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1) - a_{n-1}}{(a_n a_{n-1} - 1)(a_{n-2} - 1) - a_n},$$

отже на всякий случай дїйсну величину; безконечно многократна ітерация Uz дасть проте:

$$\lim_{n=\infty} Uz = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n-1} - (a_{n-1} a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1)}{a_n - (a_n a_{n-1} - 1)(a_{n-2} \quad 1)}$$

для трансформациї 1), а:

$$\lim_{n=\infty} Uz = \lim_{n=\infty} \left(a_n - \frac{a_{n-2} - (a_{n-2} a_{n-3} - 1)(a_{n-4} - 1)}{a_{n-1} - (a_{n-1} a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1)} \right)$$

для трансформациї 2).

С. 6. Кожда зовсїм загальна модулова трансформация, зложена з безконечно многих ітераций основних трансформаций $S^n z$ і Tz (n цїлковите яке-небудь число), переносить *кожду* точку додатної півплощі z в безконечно близьке окруженє одної з обох точок граничних, які все є дїйсні та лежать на перворяднїй оси. В тих точках тратить отже ґрупа модулова свою нетяглість; а що a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... є які-небудь дїйсні числа, то з того слїдує, що ґрупа модулова на цїлій дїйсній оси є нетягла, що вповнї годить ся з звісним свойством сеї ґрупи.

Берлїн, в червнї 1901.