Найновійші праці з теориї функций аналїтичних

подав

Володимир Левицкий.

Найновійші праці в теориї рядів степенних обнимають головно три проблеми: значінє рядів розбіжних, узагальненє ряду Taylora та захованє ся ряду на обсягу збіжности. В послїдних двох роках появило ся дуже много цїнних праць, що обнимають згадані проблеми; найважнїйші є праці Borel'a, Fabry, Phragmén'a, Painlevé, Mittag-Leffler'a, Pringsheim'a та много иньших. З праць тих хочу звернути увагу головно на праці Mittag-Leffler'a та Pringsheim'a, що появились в р. 1900; но не можу нїяк поминути славної конкурсової роботи Borel'a: Mémoire sur les séries divergentes (Annales de l'École normale 1899. ст. 1—136), де сей знаменитий ґеометр займає ся значінєм рядів розбіжних і їх численними застосованями, особливо в теориї рівнань ріжничкових. Не беру ся зовсім подавати змісту сеї праці, зверну однак увагу на дуже красне твердженє з теориї функций аналїтичних, до якого Borel дійшов в сїй роботї. Є оно таке:

Наколи $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$

є функциєю аналїтичною, а єї долученою функциєю є функция

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \cdots + \frac{a_n z^n}{n!} +$$

то доконечною і достаточною условиною, щоби функцию $f(z)$ можна було перевести по за лук $\alpha\beta$ кола збіжности, є, щоби істнувало число додатне $\varrho > 1$ таке, що для $|z| = \varrho$ добуток

$$e^{-a} F(az)$$

стремить одностайно до зера, наколи a росте in inf. Очевидно:

$$F(az) = a_0 + \frac{a_1 za}{1!} + \frac{a_2 z^2 a^2}{2!} + \text{———}$$

1. Mittag-Leffler впроваджує в своїй праці: „Sur la représentation analytique d' une branche uniforme d' une fonction monogène" (Acta matem. т. XXIII. ст. 43—62 і т. XXIV. ст. 183—204 і ст. 205—244) нове поняте т. зв. **звізди**. На площі x маєм сталу точку a; з неї поведім луч (пів-луч) l і обернім єго раз довкола a та на кождім положеню луча зазначім однозначним способом таку точку a_1, що $|a_1 - a|$ є більше, як певне число додатне; $|a_1 - a|$ може бути навіть безконечно велике. Наколи $|a_1 - a|$ є скінчене, то з площі x вилучимо ту часть луча, яка іде від a_1 до безконечности. Той засяг, який остане, наколи поведемо всї тятя на пл. x, називає Mittag-Leffler **звіздою**; точка a є єї **середоточкою**, a_1 **вершками**. Одна звізда є **вписана** в другу, наколи єї всї точки лежать в другій, а вершки обох є спільні. Наколи маєм числа сталі: $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, ..., що підлягають правилу Cauchy т. є. що границя $\left| \sqrt[\mu]{\frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)} \right|$ є скінчена, то згадана звізда A є їх **звіздою основною**.

З даної звізди E можемо дістати нові звізди $E^{(n)}$, де n є якесь дане число додатне, слїдуючим способом. Возьмім число додатне r достаточно мале і на лучу l, що виходить з a, відмірмо $(n-1)r$; кожде коло зачеркнене з якої небудь точки того луча, заключає в собі часть звізди E. Наколи горішна границя для r є ϱ і наколи на l відміримо довгість $n\varrho$ і обернемо l раз довкола a, дістанемо звізду $E^{(n)}$. Звізда $E^{(1)}$ є колом, звізда $E^{(n+1)}$ обнимає звізду $E^{(n)}$, а всї звізди $E^{(1)}$, $E^{(2)}$,......... творять часть звізди E.

До $E^{(n)}$ долучимо n иньших звізд $E^{(n)}_{\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots n)$ в сей спосіб, що положимо $\varrho_\mu = \alpha^\mu \varrho$, де $o < \alpha < 1$; конструкция є така, як в горі. Звізда $E^{(n)}_{\mu}$ лежить в $E^{(n)}_{\mu-1}$; $E^{(n)}_{0} = E^{(n)}$

Подібно як $E^{(n)}$, так само будуємо звізди $E^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ із звізди E о середоточці a. На лучу l будуєм систем n колес о середоточках a η_1 η_2 η_{n-1}; кожде коло переходить через середоточку попередного; їх лучі є r, r_1,.....r_{n-1}. Середоточки η_1 η_2 ..... η_{n-1} вибираєм в сей спосіб, щоби кожде коло перетинало попередне в точках стичности стичних ідучих з a, та щоби $|\eta_1 - a| = r_1 = r$. Наколи r є достаточно мале, то наш систем колес творить все часть звізди E;

наколи на l відміримо довгість $|\eta_{n-1} - a| + r_{n-1}$ і підставимо за r горішну границю ϱ та обернемо l раз довкола a, дістанемо звізду

$$E^{\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Наколи F(x) є функция аналїтична, то она є схарактеризована через елементи F(a), $F^{(1)}(a), \ldots\ldots F^{(\mu)}(a), \ldots\ldots$, до яких стосує ся правило Cauchy, що границя $\left| \sqrt[\mu]{\frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)} \right|$ є скінчена. Галузь функциї F(x) є представлена через ряд степенний $\mathfrak{P}(x|a)$, а єї переведеня є в звіздї A одностайні і правильні. Галузь ту значить Mittag-Leffler для звізди A через FA(x) і випроваджує цїлий ряд важних теоремів, які ми низше подамо (без довгих та глубоких доказів M. Lefflera).

a) Галузь FA(x) можна всюда представити рядом $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$, де $G_\mu(x)$ є функциєю цїлою:

$$G_\mu(x) = \sum_\nu c_\nu^{(\mu)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

сочинники $c_\nu^{(\mu)}$ є д а н і à p r i o r i н е з а в и с и м о в і д в и б о р у a і $F^{(\nu)}\big(\nu = 0,\ 1, \quad \infty;\ F^{(0)}(a) = F(a)\big)$.

Ряд $\Sigma G_\mu(x)$ є збіжний в кождій точцї звізди A, а **о д н о с т а й н о** збіжний в кождім обсягу в серединї звізди A. Сочинники $c_\nu^{(\mu)}$ мають ту вид:

$$c_\nu^{(\mu)} = \frac{1}{\mu^\nu} \sum_\lambda \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2! \cdots \lambda_n!}\ ,$$

а:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x) = \lim_{n=\infty} G_n(x|a)\,,$$

де:

$$G_n(x|a) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2! \ldots \lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

Сей ряд $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x)$ не є однак одностайно збіжний в continuum, яке обнимає в собі один з вершків звізди A. В внутрі звізди A галузь FA(x), здефініована тим рядом, є правильна кромі вершків звізди і має власність:

$$\left(\frac{d^{\mu}FA(x)}{dx^{\mu}}\right)_{x=a} = F^{(\mu)}(a) \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots$$

Повисший ряд можна уважати за узагальнене ряду Taylor'a.

б) Ряд $G_n(x|a)$, де $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ... є величини, що підлягають праву Cauchy, інакше ся поводить для $n = 1, 2, 3$, а інакше для $n > 3$. В першім случаю істнує такий обсяг збіжности K — який одержимо через конструкцию звізди $E^{(n)}$ з огляду на A — що ряд є одностайно збіжний в кождім обсягу в внутрі K, но перестає бути збіжний для кождої точки вні K. Для $n > 3$ ряд не має такого обсягу K. В тім случаю можна через вибір величин $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, зробити, що ряд буде збіжний в точці x', а не є збіжний в точці x'', що лежить на лучу, сполучаючім a з x'.

в) Наколи возьмем ряд:

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\,(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} = FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x),$$

де сочинники $c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ не є залежні від F, a і x, то можна ті сочинники так вибрати, що ряд сей буде збіжний в певній звізді $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ і представляє там галузь $FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x)$, а вні тої звізди є розбіжний. Та звізда є вписана в звізду основну величин $F(a)$, $F^{(1)}(a)$,

і для $n \geqq \overline{n}$, де $\overline{n}$ є число додатне достаточно велике, замикає сама в своїм внутрі обсяг скінчений, що належить до внутра звізди A. Звізда $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ є кромі сего вписана в звізду $A^{\left(\frac{1}{n'}\right)}$ для $n < n'$.— Висше наведений ряд стаєсь для $n = 1$ рядом Taylor'a.

г) Возьмім ряд:

$$G_m^{(n)}(x|a) = \sum_{\lambda_1=0}^{m}\sum_{\lambda_2=0}^{m^2}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m^n}\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_n!}\,F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n},$$

то істнує звізда A_n вписана в A — одержимо єї так, як $E^{(n)}$ для

E — така, що $\lim\limits_{m=\infty} G_m^{(n)}(x|a)$ є одностайно збіжна для кождого обсягу в внутрі A_n і представляє там галузь $FA_n(x)$.

д) Найже функция $f_\alpha(x, y, z, ...)$ змінних x, y, z, буде для безконечного числа вартостий α означена однозначно в обсягу K_α, так що кождий обсяг K_α стає ся тою самою частию обсягу K, наколи α зближає ся безконечно до границї α_0. Найже $(x, y, z, ...)$ представляє якусь точку в внутрі K і най кожде число додатне σ відповідає иньшому числу додатному δ такому, що функциї $f_{\alpha'}(x\ y\ z,...)$ і $f_{\alpha''}(x\ y\ z,...)$ мають значінє і що $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$, наколи $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$. Тодї $\lim\limits_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x\ y\ z...)$ має точне значінє для кождої точки в внутрі, значить ся, є одностайно збіжне в точцї $(x\ y\ z...)$.

Наколи $\alpha_0 = \infty$, то $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$ заступаємо через $\left|\frac{1}{\alpha'}\right| < \delta$, $\left|\frac{1}{\alpha''}\right| < \delta$.

Наколи $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$ в обсягу X, то кажемо, що $\lim\limits_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x\ y\ z...)$ є в тім обсягу одностайно збіжне.

е) Возьмім під увагу звізду A з середоточкою a і звізду $A^{(\alpha)}$ співосередну з нею і вписану в ню $(o < \alpha < 1)$, та най звізда $A^{(\alpha)}$ буде утворена через функцию творячу:

$$f(u|\alpha) = K\ u\ e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right] du}$$

де $\alpha = 1 - \beta$, $o < \alpha \leqq 1$, а K стала независима від u.

Можна ту функцию f все так вибрати, що при достаточно малім α звізда $A^{(\alpha)}$ заключає в своїм внутрі обсяг даний уміщений в A, так що для $\alpha = 1$ звізда $A^{(1)}$ переходить в коло співосереднє з A і вписане в A.

Ту функцию $f(u|\alpha)$ можна далї вибрати так, що, коли A є основною звіздою для величин $F(a)$, $F^{(1)}(a)$.......... ряд

$$S_\alpha(x|a) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a),$$

де:

$$G_\nu(x-a) = \frac{h^{(1)}_{\nu-1}}{1!(\nu-1)!} \overset{(1)}{F}(a)(x-a) + \frac{h^{(2)}_{\nu-2}}{2!(\nu-2)!} \overset{(2)}{F}(a)(x-a)^2 + \cdots\cdots +$$

$$+ \frac{h^{(\nu-1)}}{(\nu-1)!\,1!} \overset{(\nu-1)}{F(a)} (x-a)^{\nu-1} + \frac{h_0^{(\nu)}}{\nu!\,a!} \overset{(\nu)}{F}(a)(x-a)^\nu$$

і де $h_{\nu-\mu}^{(\mu)}$ $\begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \ldots \nu \\ \nu = 1, 2, \cdots \infty\end{pmatrix}$ є сталі додатні означені, зависимі тілько від функциї творячої — ряд $S_\alpha(x|a)$ має звізду збіжности ідентичну з $A^{(\alpha)}$, так що в внутрі $A^{(\alpha)}$ є:

$$FA(x) = S_\alpha(x|a),$$

а для $\alpha=1$ S_α переходить в ряд Taylor'a.

$\lim\limits_{\alpha=0} S_\alpha(x|a)$ має звізду ідентичну зі звіздою A, а рівність

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} S_\alpha(x|a)$$

істнує всюди в внутрі A.

Дальше можна ту функцию $f(u|a)$ так вибрати, що:

1) Наколи α є дане, границя горішна вартостий

$\left|\sqrt[n]{G_\nu(x-a)}\right|$ $(\nu = 1, 2, \cdots \infty)$ рівнає ся 1 для x в внутрі $A^{(\alpha)}$, а є більша як 1, коли x лежить вні звізди $A^{(\alpha)}$.

2) Наколи x лежить в основній звізді A, істнує все таке число $\alpha_0 < 1$, що для $\alpha < \alpha_0$ границя горішна $\left|\sqrt[n]{G_\nu(x-a)}\right| = 1$, а наколи x лежить вні A, границя та є більша як 1.

ж) Наколи E є звізда співосередна, гомотетична і в внутрі звізди $A^{(\alpha)}$, а x є точка на контурі E, a g границя горішна функций $|FA^{(\alpha)}(x)|$, коли x біжить по контурі, та наколи:

$$FA^{(\alpha)}(x) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a),$$

то:

$$|G_\nu(x-a)| < g \quad (\nu = 1, 2, \cdots \infty)$$

Най $\alpha = 1$, то наколи Θ є коло збіжности, а r число додатне меньше як обсяг збіжности ряду Taylor'a:

$$F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \overset{(\alpha)}{F}(a)(x-a)^\nu,$$

та наколи g є границя горішна для $|F(x)|$ на колї о лучу r, а о середоточцї a, а точка x є на колі, то:

$$\left|\frac{1}{\nu!} \overset{(\nu)}{F}(a)(x-a)^\nu\right| < g \qquad \nu = 1, 2, \quad \infty.$$

2. E. Phragmén в ноті: „Sur une extension d'un théorème de Mittag-Leffler" (Comptes rendus CXXVIII 1899. 1. ст. 1434) розширяє початкові теореми Mittag-Leffler'а слїдуючим способом:

Маєм дану криву C правильну або утворену з кусників кривих правильних, яка не переходить анї через початок анї через безконечність, замкнену або нї; тятем є луч від початку до одної якоїсь точки. Найже f(x) буде функция аналїтична правильна в всїх точках кривої C. Phragmén дефінїює обсяг B (анальоґічний до звізди M. Leffler'а). На кождім лучу, що іде з початку та перетинає криву C, відтинаєм по обох сторонах точки перетятя части тяглі, на яких функция f(x) остає правильна і то части можливо великі. Ті части луча задержуємо, решту відкидаємо; ті задержані части творять обсяг B.

Приймім, що по всїх дорогах в внутрі B f(x) дає ся інтеґрувати. Возьмім сталі:

$$c_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z^{\lambda+1}} \qquad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

і многочлени $G_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) такі, що $\lim G_\nu(x)$ стремить до границї $\frac{1}{1-x}$ в цїлім обсягу, в якім не ма точки, лежачої на оси дїйсній між 1 і ∞ (incl. 1 і ∞).

Утворім символїчне вираженє:

$$G_\nu(xc) + \frac{1}{xc}\, G_\nu\left(\frac{1}{xc}\right),$$

де степені c^λ треба заступити виражениями c_α; тодї

$$\lim \left[G_\nu(xc) + \frac{1}{xc}\, G_\nu\left(\frac{1}{xc}\right)\right]$$

представляє функцию f(x) в цїлім обсягу B і є одностайно збіжний в кождім обсягу в внутрі B.

2. Досліди A. Pringsheima, поміщені в розправі: „Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise" (Sitz. Berichte der k. bayr. Akad. der Wissensch. in München 1900. ст. 37--100) займають ся захованєм ряду степенного на обводї кола збіжности, т. є. ряду:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\, x^\nu \qquad (a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu\, i)$$

для $X = Re^{\vartheta i}$, де R є луч кола збіжности.

Розсліди ті коротко зреасумуємо, а іменно наведемо висліди, до яких Pringsheim доходить.

а. Наколи Σa_ν є властиво розбіжне, то границя $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X) = \infty$, де ϱ є дійсне додатне число меньше як 1. Властиву розбіжність ряду $\Sigma a_\nu = \Sigma (\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ розуміти треба в. сей спосіб, що що найменьше один з рядів $\Sigma\alpha_\nu$ і $\Sigma\beta_\nu$ є розбіжний до $\pm\infty$.

Наколи $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ для якогось місця X має означену вартість, то ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ мусить бути або збіжний або невластиво розбіжний.

Сума $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{\nu\vartheta i}$ є тоді збіжна, наколи границя $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho e^{\vartheta i})$ має означену вартість для якогось місця $e^{\vartheta i}$, а члени $(\alpha_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta)$ мають для себе (що найменьше для $\nu \leqq n$) рівні знаки, а так само члени $(\alpha_\nu \sin\nu\vartheta + \beta_\nu \cos\nu\vartheta)$.

б. Наколи ряд $\mathfrak{P}(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} a_\nu x_\nu$ є збіжний для $|x| < r \leqq 1$, то істнують слідуючі дві трансформациї:

$$\mathfrak{P}(x) = (1-x) \sum_{1}^{\infty} s^\nu x^\nu$$

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} s'_\nu x^\nu + (1-x) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} s'_\nu x^\nu$$

де:

$$s_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\nu} a_\lambda, \qquad s'_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \lambda a_\lambda.$$

Наколи границя $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 0$, де $s_n = \sum\limits_{\kappa=1}^{n} a_\lambda$, то тоді є також:

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varrho^\nu = 0.$$

в. Конечною і достаточною условиною, щоби $\sum\limits_{1}^{\infty} a_\nu$ була збіжна, є условини:

$$\lim_{\varrho=1} \sum^{\infty} a_\nu \varrho^\nu = A \text{ (означене число)}$$

і:
$$\lim \frac{s'_n}{n} = 0\,, \qquad \text{де } s'_n = \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda\, a_\lambda.$$

Обі ті умови подав вже давнїйше Tauber (Monatshefte für Math. i Phys. 1897.) Можна їх розширити і виповісти дуже важний теорем.

Щоби ряд $\mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n x^n$ був збіжний для якогось місця $x = X$ (на обводї обсягу збіжности), є конечною і достаточною условиною, щоби границя $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ мала скінчену вартість, та щоби:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\left(1\, a_1\, X + 2\, a_2\, X^2 + - + n\, a_n X^n\right) = 0.$$

Наколи $\lim_{n=\infty} n\, a_n = 0$, то ряд $\mathfrak{P}(x)$ є збіжний для кождої точки $x = X$ такої, що $|X| = 1$, наколи там $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ має скінчену вартість.

Най $\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ має коло збіжности $|x| = 1$, то для $|x| < 1$ дефінїює сей рад однозначну і тяглу функцию, яку назначимо $f(x)$. На обводї кола є:

$$f(X) = \lim_{\varrho=1} f(\varrho X) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X).$$

Для такого місця X, де $\lim \mathfrak{P}(\varrho X)$ не істнує, є $f(X)$ неозначена. Pringsheim називає ту функцию $f(x)$ функциєю приналежною до $\mathfrak{P}(x)$ (zugehörig), а $f(X)$ приналежною функциєю крайною (zugehörige Randfunction).

Є можливий такий случай, що ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$ збіжний в колї $|x| = 1$ має на кождім лучу та здовж цїлого обводу скінчену та тяглу крайну функцию $f(X)$, а мимо того $f(x)$ в окруженю нїякого місця X не буде анї тягла анї скінчена. Пр. функция $f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x-1}\right)^4}$ є на кождім лучу та здовж цїлого обводу без винятку тягла, а мимо то не є анї тягла анї навіть скінчена для найменьшого окруженя точки $x=1$.

Вже давнїйше доказав Pringsheim (Sitz. Ber. der k. bay. Akad. 1895. ст. 337), що ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$, який є еще в загалї збіжний і на місцях $X = Re^{\vartheta i}$, є в загалї рядом Fourier'а. Тепер на основі сего випроваджує нові твердженя.

г. Наколи функция Fourier'a f(x), яка належить до ряду: $\mathfrak{P}(x) = \Sigma a_\nu x^\nu$, а також і квадрат її беззглядної вартости, дає ся *в* колї збіжности і *на* нїм одностайно інтеґрувати, то тодї збіжний є ряд $\Sigma |a_\nu|^2$, а також ряд $\Sigma C_\nu^{-\frac{1}{2}} |a_\nu|$, де ΣC_ν^{-1} є який-небудь збіжний ряд з додатними членами.

З того слїдує дальше дуже важне твердженє:

Ряд степенний $\Sigma a_\nu x^\nu$ є також на обводї кола збіжности абсолютно збіжний, наколи приналежна до него функция Fouriera f(x) (в колї 1) має в окруженю точок обводу збіжности еще в загалї тяглу походну таку, що її квадрат стає ся безконечностию що-найбільше на такій скількости тих точок ряду низшого як перший, яка ся дає зредукувати.

д. Далї займає ся Pringsheim рядами степенними, які є на обводї збіжности **без винятку** (ausnahmslos) збіжні, а мимо того **не є абсолютно** збіжні. Пр. така є функция $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$; $f(e^{\vartheta i})$ є скінчено-нетягла. Такі ряди, які без винятку, але услівно є збіжні на колї $|x| = 1$, мають вид:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} x^\nu ,$$

де ε_ν є відповідно ± 1, а M_ν є ряд додатних чисел, які одностайно ростуть в безконечність, так що $M_\nu > \nu$, а $\Sigma \frac{1}{M_\nu}$ є розбіжна; пр. $M_\nu = \frac{1}{\nu \log \nu}$. Можна одержати ряди, що ся заховують анальоґічно, наколи M_ν так виберем, що $\Sigma \frac{1}{M_\nu^2}$ є збіжна; а іменно виберем M_ν так, що:

$$M_\nu = \sqrt{\nu}\, m_\nu , \quad \text{де} \lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty ,$$

а:

$$\varepsilon_\nu = (-1)^{\sqrt{\nu}-1}$$

Тодї покаже ся, що конечною условиною, щоби ряд Σa_ν був збіжний, де $a_\nu = (-1)^{\sqrt{\nu}-1} \frac{1}{\sqrt{\nu}\, m_\nu}$, є, щоби $\lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty$, а достаточною, щоби m_ν росло одностайно, а $\Sigma \frac{1}{\nu\, m_\nu}$ була збіжна.

Тодї ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu X^\nu$, де a_ν має повисше значінє, а $|X| = 1$, є **збіжний без винятку**. Но ряд сей буде **условно збіжний**, наколи m_ν так виберем, що вправдї $\Sigma \frac{1}{\nu m_\nu}$ є збіжна, але сума $\Sigma \frac{1}{\sqrt{\nu} . m_\nu}$ є **розбіжна**. Пр. вистарчить покласти:

$$m_\nu = (\sqrt{\nu})^\varepsilon, \quad (\lg \nu)^{1+\varepsilon}, \quad \lg \nu . (\lg \nu)_{,}^{1+\varepsilon} \ldots, \text{ де } \varepsilon > 0.$$

Iстнують отже ряди степенні $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty a_\nu x^\nu$ з обсягом збіжности 1, які для $|x| = 1$ є еще збіжні без винятку, але условно; противно $k = 2$ є **найменьший виложник**, для якого $\Sigma |a_\nu|^k$ є збіжна, отже сума $\Sigma a_\nu^k X^k$ є **абсолютно** збіжна.

e. В кінци займає ся Pringsheim звязею, яка заходить між **дійсною а мнимою частию крайної функциї.**

$$f(\varrho e^{\vartheta i}) = \Sigma(\alpha_\nu + \beta_\nu)\varrho^\nu e^{\nu\vartheta i} = \varphi(\varrho\vartheta) + i\psi(\varrho\vartheta) \quad \varrho < 1.$$

де:

$$\varphi(\varrho\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta)\varrho^\nu$$

$$\psi(\varrho\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\beta_\nu \cos\nu\vartheta + \alpha_\nu \sin\nu\vartheta)\varrho^\nu$$

Ряд $\varphi(\vartheta) = \Sigma(\alpha_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\vartheta)$ (отже для $\varrho=1$ на обводї обсягу) є **збіжний** або **властиво розбіжний**, після того, чи гранична вартість:

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{n=\infty} \int_0^\pi \left\{\psi(\vartheta+\alpha) - \psi(\vartheta-\alpha)\right\} \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\,(1 - \cos n\alpha)d\alpha$$

випаде **скінчена**, чи **безконечно велика. Конечним і достаточним** для збіжности ряду $\varphi(\vartheta)$ є, щоби

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+\alpha) - \psi(\vartheta-\alpha)}{\alpha}(1 - \cos n\alpha)\,d\alpha$$

рівночасно з ε стреміло до зера.

Ряд $\varphi(\vartheta)$ є **властиво розбіжний**, наколи $\psi(\vartheta+\alpha) - \psi(\vartheta-\alpha)$ має для $\alpha < \varepsilon$ **сталий** знак, а для $\lim \alpha = 0$ стремить до зера **не сильнїйше**, як $\left(\lg_1\frac{1}{\alpha}\lg_2\frac{1}{\alpha}\cdots\lg_k\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}$ при так великім k, як хочемо.

Ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$, якого функция крайна $f(e^{\vartheta i})$ дає ся абсолютно, а при переході до обводу кола збіжности в загалі одностайно інтеґрувати, є властиво розбіжний на всіх місцях перерви функциї $f(e^{\vartheta i})$ (Sprungstellen). Місце перерви є таке, де:

$$\underline{\lim}_{\alpha=0}\,\psi(\vartheta+\alpha) > \overline{\lim}_{\alpha=0}\,\psi(\vartheta-\alpha), \quad \text{або} \quad \overline{\lim}_{\alpha=0}\,\psi(\vartheta+\alpha) < \underline{\lim}_{\alpha=0}\,\psi(\vartheta-\alpha).$$

Ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$, який для якогось тяглого кусника свого обводу є збіжний, ріжнить ся — яко ряд зложений з двох від себе залежних рядів Fourier'а — від звичайного ряду Fourier'а в своїй істоті через се, що єго сума [сума $\mathfrak{P}(x)$] ніколи не може мати скоків (перерв). За се не є виключене виступуванє нетяглости без скоків, т. є. такої, де:

$$\underline{\lim}_{\alpha=0}\,\psi(\vartheta+\alpha) < \overline{\lim}_{\alpha=0}\,\psi(\vartheta-\alpha)$$

і

$$\overline{\lim}_{\alpha=0}\,\psi(\vartheta+\alpha) > \underline{\lim}_{\alpha=0}\,\psi(\vartheta-\alpha).$$

Ряд $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ є збіжний на кождім місци ϑ, де дійсна або мнима часть функциї $f(e^{\vartheta i})$ є тягла та має міру тяглости, яка сповняє (на право та ліво) умову:

$$|\psi(\vartheta\pm\alpha)-\psi(\vartheta)| \lesssim \left(\lg_1\frac{1}{\alpha}\,\lg_2\frac{1}{\alpha}\cdots\lg_k\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\left(\lg_k\frac{1}{\alpha}\right)^{-\varrho} \; (\varrho>0).$$

Göttingen, в марті 1901.