ТЕОРИЯ ПЕРСТЕНЯ САТУРНА.

НАПИСАВ

Володимир Левицкий.

1. Одною з найцікавійших пробв в нашій системі сонічній є безперечно планета Сатурн. Величезна ся планета, віддалена від сонця в перігелїюм 1345 мілїонів, а в афелїюм 1504 мілїонів кільометрів, є по Юпітері найбільшим тїлом нашої системи; єї промір рівниковий виносить 119.300, а промір, що лучить оба бігуни 106.000 кільометрів. Поверхня Сатурна є проте яких 80, а обєм яких 730 разів більший, як відповідні елементи Землї. Єго маса є 92 рази більша від маси Землї, за се густота є ледви $\frac{1}{8}$-ою густоти земскої, або 0·7, наколи густоту води положимо = 1. Єго обіг сидеричний докола сонця тревае 29 лїт 166 днїв 23 годин 40 мінут, єго оборот докола оси тревае лиш $10^h\ 29^m\ 17^s$. — Докола него кружить аж вісїм місяців; з них найбільший Тітан, відкритий еще в р. 1655 через Huyghens'a, найменьший Гіперион, відкритий доперва в р. 1848 через Bond'a і Lassell'a.

Но найважнїйшою та найбільше інтересною прикметою Сатурна, якої нїяке друге зі знаних тїл небесних не має, є великий перстень, а зглядно систем перстенів, який уносить ся зовсїм свобідно в площи рівниковій планети. Вже Galilei постеріг в р. 1612 через люнету, яку що йно винайдено, що Сатурн має вид еліптичний або овальний і думав, що ся планета складає ся з трох злучених з собою тїл [1]; два з них після єго гадки були місяцями.

[1]) Пор. пр. Littrow: Wunder des Himmels, ст. 484.

Дальші обсервациї Gassendi'го, Hevelius'а та Єзуїта Riccioli'ого над тим цїкавим видом Сатурна не принесли нїчо нового, аж доперва в р. 1659 розпізнав Huyghens, що докола Сатурна находить ся зовсїм свобідний перстень овального виду. Пізнїйше в р. 1675 постеріг Cassini, що сей перстень складає ся властиво з двох перстенів співосередних з Сатурном, віддїлених від себе темною просторонию; ту темну просторонь названо опісля дїлом Cassini'ого. В середині XIX столїтя відкрито єще між дїлом Cassini'ого а внїшним берегом перстеня єще один діл, який названо ділом Encke, а в пізнїйших часах бачили деякі астрономи, як Kater, Jakob, Bond, Struve і и. вузонькі, делїкатні співосередні лінїйки, так що видає ся, мовби перстень не був одноцїльним, лиш системом більшого числа перстенів.

Кромі того відкрив в р. 1850 Bond єще один, темний перстень між внутрішним ясним перстеньом а планетою; сей темний перстень є о стільки цїкавий, що після обсерваций Dawes'а і Lassell'а є він прозрачний, так що через него видко кулю Сатурна. O. Struve бачив в р. 1851 в тім темнїм перстеню слїди дїлу, який пізнїйше зникнув, так що здає ся, мовби в перстеню Bond'а заходили єще якісь великі зміни. Сам Dawes приймав, що перстень Bond'а находить ся єще в ставї плиннім. — В кінци треба примітити, що новійші обсерватори, як Schwabe, Harding, Herschel, South, Schiaparelli, Meyer і и. приймають, що ті перстенї не лиш не є з Сатурном співосередні, але навіть самі з собою.

Розміри поодиноких перстенів є в приближеню ось такі[1]) (пор. фіґ. I; на тій фіґурі є лиш ясний перстень внїшний і внутрішний та діл Cassini'ого ED):

AF	внїшний луч внїшного перстеня	138.400 Km.
AE	внутрішний луч внїшного перстеня	121.900
AD	внїшний луч внутрішного перстеня	119.800
AC	внутрішний луч внутрішн. перстеня	89.800
AB	луч рівниковий Сатурна	62.100
EF	ширина внїшного перстеня	16.600
CD	ширина внутрішного перстеня	29.700
ED	ширина дїлу Cassini'ого	3.100
FC	ширина обох ясних перстенів	46.000
CB	ширина відступу між темним перстенем а Сатурном	27.700
	ширина темного перстеня	13.000

[1]) Пор. Weinek u. Schweiger-Lerchenfeld: Atlas der Himmelskunde, ст. 194.

Після точних помірів [1]), наколи назначимо луч Сатурна AB = r, дістанемо:

$$AF = 2{\cdot}23\ r, \qquad AC = 1{\cdot}48\ r.$$

Грубість перстеня є невелика, бо ледви 300 кільометрів, а маса єго ледви виносить $\frac{1}{118}$ маси Сатурна. — Цїлий сей систем обертає ся докола Сатурна — як вказують обсервациї деяких замітних точок перстеня, роблені через Herschel'a, протягом $10^2/_5$ годин, отже около 0·44 дня земского. Після обсервацний Hall'a і Holden'a нахиленє перстеня до еклїптики виносить 28°, а довгість вступаючого узла в еклїптицї є тепер 167°.

Перстень з причини висше наведеного нахиленя не все однако ся нам представляє; в певних положенях планети в єго дорозї переходить площа перстеня через сонце і майже через землю; вид еліптичний зникає, а перстень представляє ся лиш в найлїпших телєскопах яко дуже тонька лїнїя. В иньших положенях видко раз північну, раз полудневу площу перстенів; а єще дальше перстень вітворює ся для ока так широко, що покриває цілком відповідну бігунову околицю планети. Систем перстенїв зникає для ока зовсїм, наколи сонце находячи ся в площи перстеня осьвічує лиш вузонький єго берег, або наколи сонце осьвічує північну (полудневу) площу перстеня, а наше око дивить ся на полудневу (північну) площу перстеня.

Давнїйші постереженя Schröter'a, мовби перстень мав атмосферу та гори високі на 1.500 Km., показались невірними. А наколи додамо єще, що після дослідів Huggins'a дуговина перстеня анї на волос не ріжнить ся від дуговини Сатурна, яка знова після астрофізичних обсервацний в Почдамі є така сама як дуговина сонця, то будемо мали в загальних начерках все, що нам дає безпосередна обсервация перстенів.

2. Остає тепер квестия істоти перстенїв. Поминаючи сучасну Huyghens'ови гіпотезу Roberval'a, що перстень повстав через пари, які з поверхнї Сатурна виходять, гіпотезу Maupertuis, що перстень є останком хвоста якоїсь комети, далї гіпотезу, що се є атмосфера Сатурна, та иньші, які основують ся на більше або меньше фантастичних здогадах, перейдем до вислїдів чисто математичних, які принесли своїм творцям велику славу та подив наукового сьвіта. Ті вислїди Laplace'a, Maxwell'a, Poincaré та Софії Ковалевскої буду старав ся представити в моїй монографії; лучать ся они з собою в безперивній звязи, так що одних без других годї трактувати.

[1]) Пор. F. Tisserand: Traité de mécanique céleste II. ст. 116.

Своею елеґанциею, прозорим та ясним способом розслїджуваня найтяжших проблемів механїки неба стали тї досліди вповнї клясичними; докинути до них по Poincaré'м еще щось нового майже неможливо, так що нинї теорию перстенїв Сатурна можем уважати за викінчену. Тому то я приняв ся дуже вдячного завданя получити ті докази в одну цїлїсть, щоби дати читачам спроможність пізнати їх і подивляти ті глубокі методи, які позволили без обсервацийй вглянути і розслїдити природу одного з найтемнїйших феноменів вселенної.

З розслідів тих виходить, що перстень будучий в руху оборотовім не може остояти ся в рівновазї, єсли приймем, що він є цїпкий, плинний або ґазовий, а до того однородний. В виду того стаєсь дуже імовірна гіпотеза Maxwell'a, що перстень складає ся з самих дрібних сателїтів (місяцїв), які кружать густою масою докола Сатурна так, що в нашім оцї творить ся враженє тяглости; Maxwell перевів доказ, що такий систем може находити ся в тревалій рівновазї. Новійші обсервациї потверджують гіпотезу Maxwell'a.

Важнїйша лїтература про рівновагу тїл оборотових загально, а перстеня Сатурна специяльно, є ось така:

Laplace. Traité de mécanique céleste. II. 155. et sqts. (видане з р. 1799).

Matthiessen. Über die Gleichgewichtsfiguren frei rotirender Flüssigkeiten. Kiel 1857.

Matthiessen. Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten, etc. Kiel 1857.

Matthiessen. Über Systeme kosmischer Ringe von gleicher Umlaufszeit als discontinuirliche Gleichgewichtsformen frei rotirenden Flüssigkeitsmasse. Leipzig 1865.

Maxwell. On the stability of the motion of Saturn'srings. Cambridge 1859.

Thomson u. Tait. Treatise on Natural Philosophy; 2. видане т. I. ч. II. ст. 332 et sqts.

Poincaré. Bulletin Astronomique t. II. i Sur l'equilibre d'une masse fluide etc. (Acta mathematica t. VII. 259 et sqts.).

S. Kowalewski. Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe (Astronomische Nachrichten Bd. CXI. 1885).

Riemann. Über das Potential eines Ringes (Gesammelte Werke 407).

Hirn. Sur les conditions d' équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne. 1872.

G. H. Darwin. On figures of equilibrium of rotating masses of fluid (Philosophical Transactions 1887).

Basset. On the steady motion of an annular mass of rotating liquid (American Journal of Mathematics t. XI. 1889).

Надто российска робота Лапунова про рівновагу елїпсоіди з р. 1884; зміст поданий через Radau в Bulletin astronomique; далї працї Radau і Callandreau в Bulletin astronomique том III, а врештї знаменитий підручник: F. Tisserand: Traité de mécanique céleste в чотирох томах, де теория перстеня Сатурна систематично представлена становить в великій мірі вихід нашої монографії раз через змодернїзоване деяких давнїйших рахунків, а в друге через много оригінальних гадок і способів аналїзи математичної.

По сих вступних увагах переходимо до властивої материї нинїшної розвідки.

Теория Ляпляса.[1])

1. Ляпляс приймає, що перстень Сатурна є коловий та співосередний з самою планетою, що складає ся з п л и н н и х та о д н о р о д н и х частних перстенїв, та що відступ таких частних перстенїв є достаточно великий, так що можна зовсїм понехати взаїмне їх дїланє на себе. Приймає він дальше, що кождий з тих частних перстенїв повстав через оборот замкненої фіґури пр. елїпси довкола планети; рух сей є одностайний та відбуває ся докола оси прямовісної до середного (рівникового) перекрою планети. Кожда точка поверхнї такого частного перстеня находить ся під дїланєм трох сил, а се: притяганя Сатурна, притяганя цїлого перстеня та сили відосередної. Ляпляс шукає условин рівноваги перстеня в виду таких трох сил та форми (виду) перстенїв.

Най же буде перекройом полуденниковим одного такого частного перстеня елїпса AA' BB' (фіґ. II.) о півосях a і b. Вісь OX // AA' най буде осию обороту сеї елїпси, а O середоточка Сатурна, де цїла єго маса M є сконцентрована. Відступ $OC = l$, а сорядні якоїсь точки P на поверхнї перстеня є $OR = \xi$, $RN = \eta$, або коли положимо $CS = x$, $SP = y$, то:

$$\xi = x, \ \eta = l + y.$$

Наколи складові притяганя Сатурна на точку P є X_1 Y_1, складові притяганя перстеня на точку P є X_2, Y_2, а скорість кутова

[1]) Пор. Laplace: Traité de mécanique céleste II. ст. 155 et sqts; рік 1799.

ω (отже сила відосередна в віддаленю $= 1$ є ω^2, у Ляпляса g), то рівнане ріжничкове для рівноваги поверхні є [1]):

$$(X_1 + X_2)\, d\xi + (Y_1 + Y_2 + \omega^2\eta)\, d\eta = 0 \qquad 1)$$

Коли абстрагуєм від сплощеня Сатурна, то:

$$X_1\, d\xi + Y_1\, d\eta = f\, d\, V,$$

де f є чинник атракциї, а V потенциял притяганя Сатурна, а що:

$$V = \frac{M}{r},$$

то:

$$X_1\, d\xi + Y_1\, d\eta = f\, M\, d\left(\frac{1}{r}\right);$$

а що далї:

$$r = 0P = (l + y)^2 + x^2,$$

то:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2y}{l} + \frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{l} - \frac{y}{l^2} + \frac{y^2}{l^3} - \frac{x^2}{2\, l^3},$$

наколи пропустимо $\left(\frac{x}{l}\right)^3$, $\left(\frac{y}{l}\right)^3$, яко дуже малї вирази. Тодї:

$$X_1\, d\xi + Y_1\, d\eta = fM\left[\left(\frac{2y}{l^3} - \frac{1}{l^2}\right) dy - \frac{xdx}{l^3}\right] \qquad 2)$$

Ляпляс приймає, що віддалене l є дуже велике в порівнаню з a і b, а кромі сего заступає притяганє перстеня на точку P притяганєм безконечно довгого вальця о підставі елїптичній AB A'B', стичного до перстеня в точцї B і B', а о густоті ρ такій самій як перстень (пор. фіґ. II). Части E і E' можуть заступити дїланє частий F і F' перстеня, а дїланє дальших частий перстеня і так малїє надзвичайно з віддаленєм. Тодї складові X_2 і Y_2 дїланя перстеня можна заступити відповідними складовими дїланя безконечного вальця, а що ті складові є [2]):

$$X_2 = -4\pi f \rho x \frac{b}{a+b}, \qquad Y_2 = -4\pi f \rho y \frac{a}{a+b},$$

а далї:

$$dx = d\xi,\ dy = d\eta, \qquad \omega^2\eta\, d\eta = \omega^2 (l+y)\, dy,$$

проте рівнанє 1) перейде на:

$$\left(\frac{fM}{l^3} + 4\pi f\rho\frac{b}{a+b}\right) xdx + \left(\frac{fM}{l^2} - \omega^2 l\right) dy + \left(4\pi f\rho\frac{a}{a+b} - \frac{2fM}{l^3} - \omega^2\right) ydy = 0. \qquad 3)$$

[1]) Пор. пр. Franke: Mechanika teoretyczna, ст. 516.

[2]) Пор. Tisserand: Traité de mécanique céleste II. ст. 54; також Laplace loc. cit. II. 160.

Рівнане перекрою перстеня є:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

або:

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} = 0;$$

отже рівнане 3) перейде на:

$$a^2\left(\frac{M}{l^3} + 4\pi\rho\frac{b}{a+b}\right) = b^2\left[\left(\frac{M}{l^3} - \frac{\omega^2}{f}\right)\frac{l}{y} + 4\pi\rho\frac{a}{a+b} - \frac{2M}{l^3} - \frac{\omega^2}{f}\right].$$

Рівнане то сповняє ся для якогонебудь y, отже:

$$\omega^2 = \frac{fM}{l^3} \qquad 4)\,[1]$$

і:

$$a^2\left(\frac{M}{l^3} + 4\pi\rho\frac{b}{a+b}\right) = b^2\left(4\pi\rho\frac{a}{a+b} - \frac{3M}{l^3}\right)$$

або:

$$\frac{M}{4\pi\rho l^3} = \frac{\lambda\,(\lambda-1)}{(\lambda+1)\,(3\lambda^2+1)} = e \qquad 5)$$

де за Ляплясом значимо $\frac{b}{a} = \lambda$. А що $e = \frac{M}{4\pi\rho l^3}$ є додатне, то мусить бути $\lambda > 1$, або $b > a$; перстень мусить бути проте конче сплощений.

$e = 0$ для $\lambda = 1, +\infty$; в границях $(1 \cdots\cdots \infty)$ є всегда $e > 0$, отже бодай раз maximum; для maximum мусить бути:

$$\frac{de}{d\lambda} = \frac{-3\lambda^4+6\lambda^3+4\lambda^2+2\lambda-1}{(\lambda+1)^2\,(3\lambda^2+1)^2} = 0$$

або:

$$3\lambda^4 - 6\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Рівнане се має два корені додатні, оден меньший від 1, другий 2·594......; можна взяти сей корінь більший, для якого перстень буде більше сплощений. Тоді $e = 0{\cdot}0543026$.

Наколиб:

$$e = \frac{M}{4\pi\rho l^3} > 0{\cdot}0543026,$$

тоби рівнане 5) не мало ані одного кореня додатного; для:

$$e < 0{\cdot}0543026 \qquad 6)$$

---

[1]) Рівнане 4) показує, що скорість кутова перстеня є рівна скорости сателіта, віддаленого від середоточки Сатурна о луч перстеня.

є два корені додатні. — Наколи луч Сатурна є R, густота середна Сатурна ρ_0, отже єго маса:

$$M = \frac{4}{3} R^3 \pi \rho_0 ,$$

то з нерівности 6) вийде:

$$\frac{\rho}{\rho_0} > 6{\cdot}14 \left(\frac{R}{l}\right)^3 \qquad 7)$$

Тоді для внутрішної границі перстенів отже для $l = 1{\cdot}48\,R$ є $\frac{\rho}{\rho_0} > 1{\cdot}89$

а внїшної $l = 2{\cdot}23\,R$ є $\frac{\rho}{\rho_0} > 0{\cdot}55$,

значить ся, щоби перстень плинний однородний находив ся в сталій рівновазї, мусить єго густота при березї внутрішнїм бути майже два рази так велика, а при березї внїшнім майже через половину така, як густота Сатурна. — Густота перстеня є нам правда незвісна, но границї Ляпляса є абсолютно за великі, щоби перстень міг удержати ся в тім видї, в якім єго розслїджує Ляпляс.

До загальнїйших вислїдів доходить Tisserand [1]). Після теорема Poincaré [2]) рівновага течи в якім будь ґеометричнім видї стаєсь неможлива, наколи:

$$\omega^2 > 2\pi f \rho.$$

Отже наколи возьмем $\omega^2 < 2\pi f \rho$, то після рівнаня 4) буде:

$$\rho > \frac{M}{2\pi l^3}, \qquad \text{або:}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{2}{3} \left(\frac{R}{l}\right)^3,$$

отже для границї внутрішної $\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{1}{4{\cdot}9}$, для границї внїшної $\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{1}{16{\cdot}6}$;

як бачим перстень о густотї меньшій не мігби ся удержати в нїякім видї і розпав би ся з великою силою на части, з яких кожда обертала би ся сама для себе докола Сатурна.

2. Ляпляс доказує далї [3]), що перстень однородний в тім видї, в якім він єго приймає, находив би ся в рівновазї хиткій, яку найменьший вплив може заколотити, а тодї перстень впав би на поверхню Сатурна. Єго доказ є слїдуючий.

---

[1]) Пор. Tisserand loc. cit. II. 121.

[2]) Bulletin astronomique II. 117.

[3]) Laplace loc. cit. II. 164.

Приймім, що перстень є лїнїєю коловою о лучу r, котрої середоточка не сходить ся з середоточкою Сатурна, але через якийсь вплив внїшний зістала віддалена від середоточки Сатурна о відступ l. Вислїдна з притяганя того кола через Сатурн мусить переходити через просту l, яка лучить обі середоточки.

Наколи луч r творить кут φ з продовженем лїнїї l, то притяганє Сатурна на елемент $rd\varphi$ перстеня (рівнобіжне до l) буде:

$$-\frac{d}{dl}\int_0^{2\pi}\frac{M\,d\varphi}{\sqrt{r^2+l^2+2rl\cos\varphi}}=F.$$

А що:

$$(r^2+l^2+2rl\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r}\left(1+\frac{l}{r}e^{\varphi i}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{l}{r}e^{-\varphi i}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

то наколи розвинемо:

$$\left(1+\frac{l}{r}e^{\varphi i}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\alpha_1\frac{l}{r}e^{\varphi i}+\alpha_2\frac{l^2}{r^2}e^{2\varphi i}+\ldots\ldots$$

$$\left(1+\frac{l}{r}e^{-\varphi i}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\alpha_1\frac{l}{r}e^{-\varphi i}+\alpha_2\frac{l^2}{r^2}e^{-2\varphi i}+\ldots\ldots$$

і ти чинники помножимо, дістанемо:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{r^2+l^2+2rl\cos\varphi}}=\frac{2\pi}{r}\left(1+\alpha_1^2\frac{l^2}{r^2}+\alpha_2^2\frac{l^4}{r^4}+\qquad\right),$$

а з відси:

$$F=-\frac{4\pi Ml}{r^3}\left(\alpha_1^2+2\alpha_2\frac{l^2}{r^2}+\qquad\right)$$

F остає від'ємне для якогонебудь l; значить ся середоточка перстеня віддаляє ся від середоточки Сатурна і якийби був рух зглядний обох тих середоточок, крива, яку рух сей описує, є вигнута ку Сатурнови; середоточка перстеня мусить ся проте віддаляти що раз більше і більше від середоточки планети, аж єго обвід зіткне ся з поверхню Сатурна.

А що перстень однородний в усїх своїх частях складає ся з безконечного числа таких колес, як се, що ми розслїджували, проте середоточка перстеня зіставалаби відпихана через середоточку Сатурна, наколиб лиш троха були від себе віддалені, і перстень скінчив би своє істнованє, бо спавби на поверхню Сатурна.

Звідси вносить Ляпляс, що понеже тепер перстень є в рівновазї, то частнї перстенї мусять мати вид неправильний, а також між ними мусять заходити взаїмні дїланя, які ми в попередних розслїдах пропустили.

Теория Maxwella. [1])

1. Maxwell займає ся квестиєю цїпкого перстеня однород ного, симетричного з огляду на площу, що переходить через точку тяжести S Сатурна (фіґ. III). Наколи C є середоточка тяжести перстеня, M маса Сатурна, M' маса перстеня, G середоточка тяжести Сатурна і перстеня разом, то S, C, G лежати мусять все в однїй лїнїї простій. Наколи $SC = r$, то:

$$SG = \frac{M'}{M+M'}\, r, \qquad CG = \frac{M}{M+M,}\, r.$$

Найже в перстеню буде лїнїя BCB' незмінна, SX сталий напрям, $\sphericalangle XSC = \vartheta$, $\sphericalangle DCS = \varphi$, $\sphericalangle XDC = \vartheta + \varphi$.

Maxwell обчисляє скількість енерґії кінетичної $2T$ для перстеня і планети разом в руху зглянднім докола точки G. Рух віднесемо до двох осий прямовісних GX і GY (GX // SX).

Енерґія складає ся з трох частий:

а) енерґії маси M, т. є.

$$M\left[\left(\frac{d}{dt}\,\frac{M'r}{M+M'}\right)^2 + \left(\frac{M'r}{M+M'}\right)^2 \frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right].$$

б) енерґії маси M', що є сконцентрована в C, т. є.

$$M'\left[\left(\frac{d}{dt}\,\frac{Mr}{M+M'}\right)^2 + \left(\frac{Mr}{M+M'}\right)^2 \frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right].$$

в) енерґії перстеня в руху зглянднім докола середоточки тяжести C; рух сей є оборотовий докола оси прямовісної в точцї C до площі рисунку. Енерґія ся є:

$$M'k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

де $M'k^2$ є момент безвладности перстеня зглядом сеї оси. Цїла енерґія є проте:

$$2\,T = \frac{MM'}{M+M'}\left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\,\frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right) + M'k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Наколи функция сил, що походить з дїланя маси M, зібраної в S, на ріжні точки перстеня, і взаїмних притягань перстеня, є fMV, то — так як V залежне є лиш від r і φ, що визначають положенє точки S з огляду на перстень, а від ϑ не залежить — дістанемо:

$$\frac{MM'}{M+M'}\,\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{MM'}{M+M'}\, r\,\frac{d\vartheta^2}{dt^2} = fM\,\frac{\partial V}{\partial r}$$

[1]) Maxwell. On the stability of the motion of Saturn'srings. Cambridge 1859. Цїлий сей уступ є представлений після Tisserand'a loc. cit. II, бо самого твору Maxwella годї дістати.

$$M'k^2 \frac{d^2(\vartheta+\varphi)}{dt^2} = fM \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{MM'}{M+M'} r^2 \frac{d\vartheta}{dt} + M'k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\right)\right] = 0.$$

або:

$$\left.\begin{aligned} M'k^2 \frac{d^2(\vartheta+\varphi)}{dt^2} &= fM \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ M' \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt}\right) &= -f(M+M') \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ M'\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right) &= f(M+M')\frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Наколи пропустимо взаїмне ділане перстеня на себе — бо оно від r і φ не залежить — то V є потенциялом перстеня в точці S.

Наколи приймем, що середоточка Сатурна зглядом перстеня не зміняє свого положеня, можемо наложити $r = r_0$ (const.), $\varphi = \varphi_0$ (const.) і відповідно $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0$ Тоді рівнане 1) дасть:

$$M'k^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = fM\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0$$

$$M'r_0{}^2 \frac{d^2\vartheta}{dr^2} = -f(M+M')\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0$$

$$-M'r_0 \frac{d\vartheta^2}{dt^2} = f(M+M')\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0$$

З відси слідує:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} = \omega\ (\text{const.}), \quad \omega^2 = -f\frac{M+M'}{M'r_0}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0 = 0, \qquad \vartheta = \omega t \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Бачимо проте, що луч SC обертавби ся одностайно докола точки S і потягавби з собою ціпкий перстень, так що єго кожда точка оставалаби стало віддалена від S.

Очевидно, що такий рух в дійсности не істнує; для правдивого руху, де виступають ріжні заколоти, треба покласти:

$$r = r_0 + r_1, \qquad \vartheta = \omega t + \vartheta_1, \qquad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$

де r_0 ω φ_0 характеризують яко сталі стан початковий, r_1 ϑ_1 φ_1 представляють невеликі зміни в пересуненю так, що їх квадрати мож залишити; є они функциями змінної t, так що походні $\frac{dr_1}{dt}$ $\frac{d\vartheta_1}{dt}$ $\frac{d\varphi_1}{dt}$ є дуже малі. Тоді рівняня 2) дадуть:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\omega^2 M' r_0}{f(M+M')} + Hr_1 + K\varphi_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = Kr_1 + L\varphi_1,$$

де:

$$H = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_0, \qquad K = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r\, \partial \varphi}\right)_0, \qquad L = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right)_0 \qquad 3)$$

Рівнаня 1) дадуть:

$$\left.\begin{aligned} &M'\left(2\omega r_0 \frac{dr_1}{dt} + r_0^2 \frac{d^2\vartheta_1}{dt^2}\right) + f(M+M')(Kr_1 + L\varphi_1) = 0. \\ &M'\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \omega^2 r_1 - 2\omega r_0 \frac{d\vartheta_1}{dt}\right) + f(M+M')(Hr_1 + K\varphi_1) = 0. \\ &M' k^2 \left(\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}\right) - fM(Kr_1 + L\varphi_1) = 0. \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Щоби ті рівнаня з'інтеґрувати, підставмо — як звичайно:

$$r_1 = Ae^{\nu t}, \qquad \vartheta_1 = Be^{\nu t}, \qquad \varphi_1 = Ce^{\nu t}$$

(A, B, C, ν сталі); по підставленю дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} &A\left[2\omega r_0 \nu M' + f(M+M')K\right] + Br_0^2 \nu^2 M' + Cf(M+M')L = 0. \\ &A\left[(\nu^2 - \omega^2)M' - f(M+M')H\right] - 2B\omega r_0 \nu M' - Cf(M+M')K = 0. \\ &-AfMK + Bk^2\nu^2 M' + C(k^2\nu^2 M' - fMN) = 0. \end{aligned}\right| \quad 5)$$

Елімінуймо з відси A, B, C, то дістанемо рівнане 6) степеня форми:

$$\nu^2 (P\nu^4 + R\nu^2 + S) = 0 \qquad 6)$$

де:

$$7) \begin{cases} P = M'^2 k^2 r_0^2 \\ R = 3M'^2 k^2 r_0^2 \omega^2 - fM'(M+M')Hk^2 r_0^2 - fM'\left[(M+M')k^2 + Mr_0^2\right]L \\ S = M'\left[(M+M')k^2 - 3Mr_0^2\right]fL\omega^2 + f^2(M+M')\left[(M+M')k^2 + Mr_0^2\right](HL - K^2) \end{cases}$$

Понеже рівнане 6) має двократний корінь $\nu = 0$, проте треба взяти:

$$r_1 = A + A't, \qquad \vartheta_1 = B + B't, \qquad \varphi_1 = C + C't.$$

Наколи се вставимо в 4) і зрівнаєм до зера части сталі і сочинники при t, дістанемо:

$$A' = 0, \qquad C' = 0, \qquad C = -\frac{K}{L}A,$$

$$B' = \frac{A}{2\omega r_0}\left(f\,\frac{M+M'}{M'}\,\frac{K^2 - HL}{L} - \omega^2\right),$$

а тоді:

$$\left.\begin{aligned} r_1 = A, \qquad \varphi_1 = -\frac{K}{L} A, \\ \vartheta_1 = B + \frac{A}{2\omega r_0}\left(f\frac{M+M'}{M}\,\frac{K^2-HL}{L} - \omega^2\right) t \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

о двох сталих A і B.

Дальші корені рівнаня 6) є ν_1, $\nu_2 = -\nu_1$, ν_3, $\nu_4 = -\nu_3$, і для них дістанемо на інтеґрали рівнань 4) вартости:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= A_1 e^{\nu_1 t} + A_2 e^{\nu_2 t} + A_3 e^{\nu_3 t} + A_4 e^{\nu_4 t} \\ \vartheta_1 &= \lambda_1 A_1 e^{\nu_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\nu_2 t} + \lambda_3 A_3 e^{\nu_3 t} + \lambda_4 A_4 e^{\nu_4 t} \\ \vartheta_1 &= \mu_1 A_1 e^{\nu_1 t} + \mu_2 A_2 e^{\nu_1 t} + \mu_3 A_3 e^{\nu_3 t} + \mu_4 A_4 e^{\nu_4 t} \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

де є чотири сталі довільні і де: $\lambda_s = \frac{B_s}{A_s}$, $\mu_s = \frac{C_s}{A_s}$.

З получення рівнань 8) і 9) дістанемо загальні інтеґрали рівнань 4) з 6 сталими. Сталі A і B представити буде можна через r_0 ϑ_0 φ_0 і ω на основі рівнань 8) та реляций $r = r_0 + r_1$, $\vartheta = \omega t + \vartheta_1$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$. Иньші сталі найдем, наколи дамо на r, ϑ, φ, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ при $t = 0$ певні вартости дуже малі; тоді дістанемо і на A_1, A_2, A_3, A_4 дуже малі вартости, наколи корені ν_1 і ν_3 мають вид αi, отже коли $e^{\nu_1 t}$, $e^{\nu_2 t}$, $e^{\nu_3 t}$, $e^{\nu_4 t}$ перейдуть на $\sin\psi$ та $\cos\psi$. Наколиб однак корені були дїйсні, то ті функциї виложні рослиб без кінця, а так само колиб они мали вид $a + bi$, то в r, ϑ, φ виступалиби чинники періодичні, яких сочинники зрасталиб без кінця. Щоб отже обі вартости ν^2 в рівнаню $P\nu^4 + R\nu^4 + S = 0$ були дїйсні і від'ємні (отже ν_1 і ν_3 форми αi), мусить бути:

$$PR > 0, \qquad PS > 0, \qquad R^2 - 4PS > 0.$$

2. Принаровимо ту теорию тепер до перстеня колового ріжнородного о безконечно малих поперечних перекроях.

Най (фіґ. IV) O буде середоточкою перстеня, C середоточкою тяжести, $OC = h$, s луч перстеня, ψ змінний кут, ρ густота перстеня в точці N. Тоді після теориї Fourier'a:

$$\rho = \frac{M'}{2\pi s}\left(\alpha_0 + 2\alpha_1\cos\psi + 2\beta_1\sin\psi + \frac{2\alpha_2}{3}\cos 2\psi + \frac{2\beta_2}{3}\sin 2\psi + \cdots\cdots\right) \quad 10)$$

α_i β_i сталі.

Елемент маси в N є $\rho s d\psi$, отже: $\int_0^{2\pi} \rho s d\psi = M'$.

Після твердженя о моментах з огляду на вісь OC і просту прямовісну до OC (в точці O) дістанемо:

$$\int_0^{2\pi} s^2 \rho \cos\psi d\psi = M'h, \qquad \int_0^{2\pi} s^2 \rho \sin\psi d\psi = 0.$$

Наколи в тих трох інтеґралах вставимо за ρ вартість 10) і з'інтеґруємо, дістанемо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{h}{s}$, $\beta_1 = 0$.

Щоби найти потенциял перстеня, зауважим, що момент безвладности перстеня з огляду на вісь прямовічну до єго площи в точці O є $M's^2$; момент з огляду на вісь, до тамтої рівнобіжну в точці C, є $M'k^2$, отже:

$$M's^2 = M'k^2 + M'h^2,$$

або:

$$k^2 = s^2 (1 - \alpha_1^2).$$

Най $OS = r'$, $NS = \Delta$, $\sphericalangle BOS = \psi'$, тоді:

$$\Delta^2 = s^2 + r'^2 - 2sr' \cos(\psi' - \psi),$$

а звідси — наколи пропустимо висші степені $\frac{r'}{s}$ — дістанемо:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{s} \left\{ 1 + \frac{r'}{s} \cos(\psi' - \psi) + \frac{r'^2}{4s^2} + \frac{3r'^2}{4s^2} \cos 2(\psi - \psi') \right\}.$$

В виду того потенциял перстеня в точці S, який є рівний:

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho s d\psi}{\Delta}$$

буде:

$$V = \frac{M'}{s} \left[1 + \alpha_1 \frac{r'}{s} \cos\psi' + \frac{r'^2}{4s^2} (1 + \alpha_2 \cos 2\psi' + \beta_2 \sin 2\psi') \right],$$

а що:

$$r' \cos\psi' = h - r\cos\varphi, \qquad r' \sin\psi' = r \sin\varphi,$$

де: $\sphericalangle SCO = \varphi$, $SC = r$, то:

$$V = \frac{M'}{s} \left[1 + \alpha_1 \frac{h - r\cos\varphi}{s} + \frac{h^2 + r^2 - 2hr\cos\varphi}{4s^2} + \alpha_2 \frac{h^2 - 2hr\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi}{4s^2} + \beta_2 \frac{2hr\sin\varphi - r^2 \sin 2\varphi}{4s^2} \right] \quad 11).$$

Наколи приймем, що з самого початку середоточка перстеня є схожа з середоточкою Сатурна, тоді $\varphi_0 = 0$, $r_0 = h = \alpha_1 s$, $k^2 = s^2 (1 - \alpha_1^2)$; тоді з 11) випаде:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0 = - \frac{M'\alpha_1}{s^2}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0 = 0. \\
\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_0 = H = \frac{M'}{2s^3}(1+\alpha_2) \\
\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial \varphi}\right)_0 = K = - \frac{M'}{2s^3}\beta_2 r_0 = - \frac{M'}{2s^2}\alpha_1\beta_2 \\
\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right)_0 = L = \frac{M'}{2s^3} r_0^2 \left(1-\alpha_2+\frac{2s}{r_0}\alpha_1\right) = \frac{M'}{2s}\alpha_1^2(3-\alpha_2)
\end{array}\right\} \quad 12).$$

Після рівнаня 2) є:

$$\omega^2 = f\,\frac{M+M'}{s^3},$$

тож коли ті всї вартости вставимо в 7), дістанемо:

$$\frac{P}{M'^2 s^4 \alpha_1^2} = 1 - \alpha_1^2$$

$$\frac{R}{M'^2 s^4 \alpha_1^2} = \omega^2\left[1-\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\,\frac{M}{M+M'}\,\alpha_1^2(3-\alpha_2)\right].$$

$$\frac{S}{M'^2 s^4 \alpha_1^2} = \frac{\omega^4}{4}\left\{(1-\alpha_1^2)(9-\alpha_2^2-\beta_2^2)+\frac{M}{M+M'}\alpha_1^2(-15+8\alpha_2-\alpha_2^2-\beta_2^2)\right\}.$$

Наколи з огляду на се, що $\frac{M'}{M}$ є дуже мале, положимо $\frac{M}{M+M'}=1$, дістанемо місто рівнаня $P\nu^4 + R\nu^2 + S = 0$ рівнанє:

$$(1-\alpha_1^2)\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^4+\left(1-\frac{5}{2}\alpha_1^2+\frac{1}{2}\alpha_1^3\alpha_2\right)\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2+\frac{1}{4}(9-24\alpha_1^2-\alpha_2^2-\beta_2^2+8\alpha_1^2\alpha_2)=0. \quad 13)$$

Наколи перстень є однородний, тодї густота є стала, отже $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$; тодї $P = R = S = 0$, а рівнаня 5) дадуть:

$$\nu^2 = \omega^2 + f\,\frac{M+M'}{2s^3}$$

т. є. ν^2 булоб дїйсне і додатне, а з того — як уже знаєм — виходить, що **перстень цїпкий однородний не може бути тревалий**.

Наколи тепер приймем в рівнаню 13) $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ $(\alpha_1 \gtrless 0)$, дістанемо:

$$(1-\alpha_1^2)\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^4+\left(1-\frac{5}{2}\alpha_1^2\right)\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2+\frac{9}{4}-6\alpha_1^2=0.$$

ν^2 мусить бути від'ємне, отже P, R, S мусять мати той сам знак; щоби се було, мусить: $\alpha_1^2 < 0{\cdot}375$, або $\alpha_1^2 > 1$.

Щоби вартости на ν^2 були дїйсні, мусить

$$71\,\alpha_1^4 - 112\,\alpha_1^2 + 32 \angle 0$$

або:

$$0{\cdot}37473 \angle \alpha_1^2 < 1{\cdot}20273.$$

Щоби отже була рівновага, мусать бути α_1^2 замкнене або в границях 0·37473 і 0·375, або в границях 1 і 1·20273. Но се неможливо, бо густота:

$$\rho = \frac{M'}{2\pi s}\,(1 + 2\alpha_1 \cos\psi)$$

має бути додатна для всяких ψ; тимчасом для $\psi = \pi$ випаде $2\alpha_1 < 1$, $\alpha_1^2 \angle 0{\cdot}25$, що ся з попереднім не годить.

Треба проте в рівнаню 13) взяти $\alpha_2 \gtrless 0$ і $\beta \lesseqgtr 0$ і пересьвідчити ся, чи можна визначити сталі $\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_2$ так, щоби чотири корені ν мали вид bi, а ρ було для всяких ψ додатне. Того случаю не розслїдив Maxwell, зробив се Radau[1]). Після его обчислень випадає на случай рівноваги:

$$1{\cdot}317 \angle 2\alpha_1 \angle 1{\cdot}397, \qquad 0{\cdot}32 \angle \frac{2}{3}\,\alpha_1 \angle 0{\cdot}60, \qquad \frac{2}{3}\sqrt{\beta_2^2} \angle 0{\cdot}068,$$

$$0{\cdot}66 \angle \frac{h}{s} \angle 0{\cdot}70.$$

Бачимо проте, що вартість безоглядна сочинника β_2 в формулї на ρ має бути дуже мала, сочинника α_2 много більша. З відси слїдує, що густота ρ в ріжних місцях перстеня (для ріжних ψ) дізнавалаби наглядних змін, що є незгідне з обсервацією.

Maxwell розслїджував далї перстень коловий однородний, обтяжений якоюсь масою в однїй точцї; з его розслїдів виходить, що щоби була рівновага, мусїлаби та додаткова маса бути дуже значна; середоточка тяжести цїлости булаби віддалена від середоточки фіґури в границях 0·8158s і 0·8279s. Но обсервация перстеня не вказує такої неправильности, в виду чого гіпотезу цїпких перстенів треба відкинути.

3. Коли ж в сей спосіб доказав Maxwell, що гіпотеза цїпкого перстеня є неімовірна, то тепер бере під увагу перстень, що складає ся з великого числа дрібних сателїтів P_1, P_2, P_3, наколи їх є много, то витворюють враженє тяглого перстеня.

[1]) Пор. Tisserand loc. cit. II. 131.

Наколи возьмем один з них пр. P_1 о масї m_1 то він остає під впливом Сатурна (маса M) і прочих сателїтів P_2, P_3, ... (маси m_2, m_3, ...). Наколи приймем, що рухи усїх сателїтів відбувають ся в однїй площи (xy), а $x_1\ y_1\ R_1$, $x_2\ y_2\ R_2$, ... є сорядні та функциї пертурбацийні поодиноких сателїтів, та коли залишимо дїланя сателїтів на Сатурна, так як ті дїланя взаїмно ся зносять, дістанемо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + fM\frac{x_1}{r_1^3} = \frac{\partial R_1}{\partial x_1}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + fM\frac{y_1}{r_1^3} = \frac{\partial R_1}{\partial y_1}$$

$$R_1 = f\sum\frac{m_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}};$$

(сума відносить ся до всїх P_2, P_3, ...)

або в сорядних бігунових ($x_\nu = r_\nu \cos v_\nu$, $y_\nu = r_\nu \sin v_\nu$, $\nu = 1, 2, 3, ...$):

$$\left.\begin{aligned} r_1\frac{dv_1{}^2}{dt^2} - \frac{d^2r_1}{dt^2} - \frac{fM}{r_1^2} &= -\frac{\partial R_1}{\partial r_1} \\ r_1\frac{d^2v_1}{dt^2} + 2\frac{dr_1}{dt}\frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{r_1}\frac{\partial R_1'}{dv_1} \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

$$R_1 = f\sum\frac{m_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(v_2-v_1)}}.$$

Приймім, що сателїти є з початку розміщені в вершках правильного многокутника вписаного в коло о лучу a, то наколи їх є p, а відповідний кут середоточний (що відповідає кождому з боків многокутника) є 2ϑ, то:

$$\vartheta = \frac{\pi}{p}.$$

Наколи пропустимо взаїмні пертурбациї сателїтів, то они відбувають рух по колї з однакою скоростию кутовою ω, а тодї для якогонебудь часу t є:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= a, & r_1 &= k + \omega t \\ r_2 &= a, & r_2 &= k + \omega t + 2\vartheta \\ r_3 &= a, & r_3 &= k + \omega t + 4\vartheta \\ &- - - & &- - - - \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

де k є сталий кут, який творить луч SP_1 в лучом рухомим.

Наколиж возьмем під увагу взаїмні ділання сателітів, дістанемо :

$$\left.\begin{array}{lll} r_1 = a\,(1+\rho_1) & v_1 = k+\omega t+\sigma_1 & \\ r_2 = a\,(1+\rho_2) & v_2 = k+\omega t+2\vartheta+\sigma_2 & v_2 - v_1 = 2\vartheta+\sigma_2-\sigma_1 \\ r_3 = a\,(1+\rho_3) & v_3 = k+\omega t+4\vartheta+\sigma_3 & v_3 - v_1 = 4\vartheta+\sigma_3-\sigma_1 \\ - \; - \; - & - \; - \; - \; - & - \; - \; - \; - \end{array}\right\} \quad 16)$$

ρ_ν σ_ν є величини, звязані з масою m_ν; величини ті остануть дуже малі, наколи рух відійде не много від стану означеного рівнанями 15). В виду того пропускаючи квадрати і добутки ρ_ν і σ_ν можем розвинути ряди і дістанемо :

$$-\frac{\partial R_1}{\partial r_1} = f \sum m_2 \frac{r_1 - r_2 \cos(v_2 - v_1)}{\left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{r_1}\frac{\partial R_1}{\partial r_1} = f \sum m_2 \frac{r_2 \sin(v_2 - v_1)}{\left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Але :

$$r_1 - r_2 \cos(v_2 - v_1) = 2a \sin^2\vartheta \left[1 + \frac{\rho_1 - \rho_2 \cos 2\vartheta}{2\sin^2\vartheta} - (\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\vartheta\right]$$

$$r_2 \sin(v_2 - v_1) = 2a \sin\vartheta \cos\vartheta \left[1 + \rho_2 - (\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\vartheta\right]$$

$$\left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1)\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8a^3 \sin^3\vartheta}\left[1 - \frac{3}{2}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\vartheta\right],$$

а дальше :

$$r_1 \frac{dv_1^2}{dt^2} - \frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{fM}{r_1^2} = a\left(\omega^2 + \omega^2 \rho_0 + 2\omega \frac{d\sigma_1}{dt} - \frac{d^2\rho_1}{dt^2} - fM\frac{1-2\rho_1}{a^3}\right)$$

$$r_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + 2\frac{dr_1}{dt} = a\left(\frac{d^2\sigma_1}{dt^2} + 2\omega\frac{d\rho_1}{dt}\right)$$

В виду того рівнаня 14) перейдуть на :

$$\omega^2 - \frac{fM}{a^3} + \left(\omega^2 + \frac{2fM}{a^3}\right)\rho_1 + 2\omega\frac{d\sigma_1}{dt} - \frac{d^2\rho_1}{dt^2} = \frac{f}{4a^3}\sum \frac{m_2}{\sin\vartheta}\left(1 - \rho_1 - \sigma_2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\operatorname{cotg}^2\vartheta + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\operatorname{cotg}\vartheta\right)$$

$$2\omega\frac{d\rho_1}{dt} + \frac{d^2\rho_1}{dt^2} = \frac{f}{4a_3}\sum\frac{m_2 \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\left[1 - \frac{3\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}(\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{cotg}\vartheta)\right]$$

Maxwell приймає, що маси сателітів є рівні, отже:

$$m_1 = m_2 = m_3 = \qquad = \mu M,$$

де M є маса Сатурна; отже без взаїмних ділань сателїтів буде: $\omega^2 = \frac{fM}{a^3}$, або $\frac{fm_2}{a^3} = \omega^2\mu$. Послїдні рівнаня можна написати :

$$\left\{\begin{array}{l}\omega^2 - \dfrac{fM}{a^3} + 3\omega^2\varrho_1 + 2\omega\dfrac{d\sigma_1}{dt} + \dfrac{d^2\varrho_1}{dt^2} = \dfrac{1}{4}\,\omega^2\mu \sum\left(1 - \varrho_1 - \varrho_2 + \dfrac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\,\mathrm{cotg}^2\vartheta + \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\,\mathrm{cotg}\,\vartheta\right)\dfrac{1}{\sin\vartheta} \\ 2\omega\dfrac{d\varrho_1}{dt} + \dfrac{d^2\sigma_1}{dt^2} = \dfrac{1}{4}\,\omega^2\mu \sum \dfrac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\left[1 - \dfrac{3\varrho_1 + \varrho_2}{2} + \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\,(\mathrm{tg}\,\vartheta + 2\,\mathrm{cotg}\,\vartheta)\right].\end{array}\right.$$

В обох сумах, наколи переходимо від P_2 до P_3, , мусять ϑ переходити на 2ϑ, 3ϑ, ..., отже перебігати вартости:

$$\frac{\pi}{p},\ \frac{2\pi}{p},\qquad (p\quad 1)\,\frac{\pi}{p} \qquad 18).$$

Треба тепер з'інтеґрувати систем 2p рівнань ріжничкових лінійових 2-ого ряду 17) зі сталими сочинниками; в тій цїли треба покласти:

$$\rho_\nu = H_\nu\, e^{Nt}$$

$$\sigma_\nu = K_\nu\, e^{Nt}$$

(H_ν K_ν сталі).

Наколи се вставимо в рівнаня, дістанемо наперед:

$$\omega^2 - \frac{fM}{a^3} = \frac{1}{4}\,\omega^2\mu \sum \frac{1}{\sin\vartheta},$$

а далї дістанемо систем 2p рівнань однородних, з яких виелїмінуємо H_ν K_ν; їх визначник зрівнаний до зера дасть рівнанє на визначенє N. Рівнанє се буде степеня 4p; до кождого кореня належить одна розвязка з одною довільною сталою, а сума тих частних розвязок буде загальним інтеґралом в функциї часу і 4p довільних сталих. Щоби однак ρ_ν σ_ν позістали все малі, як з початку, мусять всї коренї рівнани на N мати вид $\pm$ ai.

Щоби дістати умови, в яких се ся дїє, уживає Maxwell слїдуючого способу. Кладе він яко частні розвязки:

$$\rho_\nu = A\cos(nt + \alpha + 2\nu\gamma\vartheta),\quad \sigma_\nu = B\sin(nt + \alpha + 2\nu\gamma\vartheta)\quad \nu = 1, 2, 3, \qquad 19)$$

де A, B, n, α є сталі, а γ число цїле додатне.

Або:

$\rho_1 = A\cos u$, $\quad \sigma_1 = B\sin u$

$\rho_2 = A\cos u\cos 2\gamma\vartheta - A\sin u\sin 2\gamma\vartheta$, $\sigma_2 = B\sin u\cos 2\gamma\vartheta + B\cos u\sin 2\gamma\vartheta$,

де $u = nt + \alpha + 2\gamma\vartheta$.

В виду того рівнаня 17) дадуть:

$$\left.\begin{array}{r}\omega^2 - \dfrac{fM}{a^3} + \left[(3\omega^2 + n^2)\,A + 2\omega n B\right]\cos u = \Theta \\ -\,(2\omega n\,A + n^2 B)\sin u = \Phi\end{array}\right\}\qquad 20)$$

де:

$$\left.\begin{aligned}\Theta=\frac{1}{4}\omega^2\mu\sum\frac{1}{\sin\vartheta}\Big[1-\cos u\Big(2A\cos^2\gamma\vartheta-A\sin^2\gamma\vartheta\cot g^2\vartheta+\frac{1}{2}B\sin2\gamma\vartheta\cot g\vartheta\Big)+\\ +\sin u\Big(A\sin2\gamma\vartheta+\frac{1}{2}A\sin2\gamma\vartheta\cot g^2\vartheta+B\sin^2\gamma\vartheta\cot g\vartheta\Big)\Big]\\ \Phi=\frac{1}{4}\omega^2\mu\sum\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\Big\{1+\sin u\Big[\frac{1}{2}A\sin2\gamma\vartheta+B(tg\vartheta+2\cot g\vartheta)\sin^2\gamma\vartheta\Big]-\\ -\cos u\Big[\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}A\cos2\gamma\vartheta+\frac{1}{2}B(tg\vartheta+2\cot g\vartheta)\sin2\gamma\vartheta\Big]\Big\}\end{aligned}\right\}\ 21).$$

В сумі перебігає ϑ вартости 18). Вартости 18) рівно віддалені від кінця сповняють ся до π, вираз середний сам є $\frac{\pi}{2}$. В виду того в 21) все ся знесе, кромі виразу, де $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ (бо иньші вирази що два є рівні, але їх знаки є противні), так що:

$$\Theta=\omega^2\mu\left[K+(AL\gamma-BM\gamma)\cos u\right]$$

$$\dot{\Phi}=\omega^2\mu\,(AM\gamma+BN\gamma)\sin u,$$

де:

$$L\gamma=\sum_{\vartheta=\frac{\pi}{p}}^{(p-1)\frac{\pi}{p}}\left(\frac{\sin^2\gamma\vartheta\cos\vartheta}{4\sin^3\vartheta}-\frac{\cos^2\gamma\vartheta}{2\sin\vartheta}\right)$$

$$M\gamma=\sum\frac{\sin2\gamma\vartheta\cos\vartheta}{8\sin^2\vartheta}$$

$$N\gamma=\sum\left(\frac{\sin^2\gamma\vartheta\cos^2\vartheta}{2\sin^3\vartheta}+\frac{\sin^2\gamma\vartheta}{4\sin\vartheta}\right)$$

$$K=\sum\frac{1}{4\sin\vartheta}$$

В виду того рівнаня 20) дадуть:

$$\omega^2-\frac{fM}{a^3}-\omega^2\mu K+\left[(3\omega^2+n-\omega^2\mu L\gamma)A+(2\omega n+\omega^2\mu M\gamma)B\right]\cos u=0.$$

$$\left[(2\omega n+\omega^2\mu M\gamma)A+(n^2+\omega^2\mu N\gamma)B\right]\sin u=0.$$

То ся діє для всяких u, отже:

$$\omega^2-\frac{fM}{a^3}-\omega^2\mu K=0, \qquad 22)$$

$$\left.\begin{array}{l}(3\omega^2 + n - \omega^2\mu L\gamma)\, A + (2\omega n + \omega^2\mu M\gamma)\, B = 0.\\ (2\omega n + \omega^2\mu M\gamma)\, A + (n^2 + \omega^2\mu N\gamma)\, B = 0.\end{array}\right\} \quad 23).$$

Видко з того, що дїйдемо до тих самих условин, наколи приймем, що рівнаня 19) сповняють рівнаня ріжникові руху сателїтів P_2. P_3,

Через елїмінацию A і B дістанемо з 23):

$$(n^2 + 3\omega^2 - \omega^2\mu L\gamma)(n^2 + \omega^2\mu N\gamma) - (2\omega n + \omega^2\mu M\gamma)^2 = 0. \quad 24)$$

Се є рівнане 4. степеня до визначення n. Для кождого кореня остане стала A довільна, а $\frac{B}{A}$ обчислить ся на основі рівнань 23). Наколи тому γ дамо цїлий ряд вартостий цїлих, дістанемо спроможність одержаня загальних інтеґралів.

Заложім, що скількість сателїтів є **п а р и с т а**: $p = 2q$. Чотири коренї рівнаня 24) є: $n\gamma_1$ $n\gamma_2$ $n\gamma_2$ $n\gamma_4$; їм відповідає:

$$A\gamma_1 \; A\gamma_2 \; A\gamma_3 \; A\gamma_4$$
$$B\gamma_1 \; B\gamma_2 \; B\gamma_3 \; B\gamma_4.$$

Най δ буде одно з чисел 1, 2, 3, 4, і най:

$$B_{\gamma\delta} = A_{\gamma\delta}\, \lambda_{\gamma\delta},$$

де після 23):

$$\lambda_{\gamma\delta} = - \frac{n^2_{\gamma\delta} + 3\omega^2 - \omega^2\mu L\gamma}{2\omega n_{\gamma\delta} + \omega^2\mu M\gamma}$$

Най ріжні вартости сталої α є $\alpha_{\gamma\delta}$; наколо положимо $\gamma = 1, 2, \cdots q$ і возьмем суму відповідних частних розвязок, дістанемо:

$$\left.\begin{array}{l}\rho_\nu = \sum\limits_{\gamma=1}^{q} \sum\limits_{\delta=1}^{4} A\gamma\delta \cos\left(n_{\gamma\delta} t + \alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right)\\ \sigma_\nu = \sum\limits_{\gamma=1}^{q} \sum\limits_{\delta=1}^{4} \lambda_{\gamma\delta} A\gamma\delta \sin\left(n_{\gamma\delta} t + \alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right)\end{array}\right\} \quad 25).$$

Наколи будемо класти $\nu = 1, 2, \quad 2q$ дістанемо з огляду на рівнаня попередні вираженя на незвісні в функциї t і $4p = 8q$ довільних сталих $A_{\gamma\delta}$, $\alpha_{\gamma\delta}$ і будуть се загальні інтеґрали.

Походні рівнань 25) дадуть:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\rho_\nu}{dt} &= \sum_{\gamma=1}^{q}\sum_{\delta=1}^{4} n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \sin\left(n_{\gamma\delta}t + \alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \\ \frac{d\sigma_\nu}{dt} &= \sum_{\gamma=1}^{q}\sum_{\delta=1}^{4} \lambda_{\gamma\delta} n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \cos\left(n_{\gamma\delta}t + \alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \end{aligned}\right\} \quad 26).$$

Щоби рівнаня 25) і 26) представляли інтеґрали загальні рівнань ріжничкових, треба визначити сталі довільні в сей спосіб, щоби положеня і скорости початкові сателїтів принимали якісь дані вартости. Приймім проте яко дані вартости 8q малих величин $\rho_\nu\ \sigma_\nu\ \frac{d\rho_\nu}{dt}\ \frac{d\sigma_\nu}{dt}$ для $t = 0$ і при їх помочи обчислїм сталї $A_{\gamma\delta}$ і $\alpha_{\gamma\delta}$. Рівнаня 25) і 26) дадуть для $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \rho_\nu^0 &= \sum\sum A_{\gamma\delta} \cos\left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \\ \sigma_\nu^0 &= \sum\sum \lambda_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \sin\left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \\ -\left(\frac{d\rho_\nu}{dt}\right)_0 &= \sum\sum n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \sin\left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \\ \left(\frac{d\sigma_\nu}{dt}\right)_0 &= \sum\sum n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \cos\left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \end{aligned}\right\} \quad 27). \quad (\nu = 1, 2, \quad 2q)$$

Незвісних $A_{\gamma\delta} \cos \alpha_{\gamma\delta}$ і $A_{\gamma\delta} \sin \alpha_{\gamma\delta}$ є тілько, що рівнань, можна отже незвісні обчислити.

4. Щоби перстень остояв ся в рівновазї, мусять ρ_ν і σ_ν, так як з початку, і далї остати дуже малими величинами; бо наколиб одна з величин σ_ν почала ся збільшати, мусїв би відповідний сателїт занадто приближити ся до другого сусїдного і насталаби колїзия. З того слїдує, що чотири коренї $n_{\gamma\delta}$ рівнаня 24) мусять бути дїйсні, що γ мусить містити ся між 0 а q. Наколиб так не було, то в інтеґралах виступалиби чинники виложні, якиби стреміли до усякої границї.

Наколи число усїх сателїтів є скінчене, можемо приняти масу кождого з них, отже і масу цїлого перстеня, достаточно малу, щоби усї коренї остали дїйсні. Величини $L\gamma$ $M\gamma$ $N\gamma$ можуть бути достаточно великі з причини малих знаменників $\sin\vartheta$, $\sin^2\vartheta$, $\sin^3\vartheta$, мимо того однак остають скінчені і означені. Отже для $n = 0$ лїва сторона в рівнаню 24) зведе ся до

$$\mu\omega^4 \left[3N_\gamma - \mu \left(M_\gamma^2 + L_\gamma N_\gamma\right)\right].$$

отже при достаточно малім μ буде се величина додатна.

З другої сторони рівнане 24) має форму:

$$n^2 (n^2 - \omega^2) + A\mu + B\mu^2;$$

виражене се позістає відємне, наколи при достаточно малім μ є $0 \angle n^2 \angle \omega^2$. Наколи отже в лївій стороні рівнаня 24) будем класти за u вартости:

$$-\infty, \quad -\frac{\omega}{\sqrt{2}}, \quad 0, \quad +\frac{\omega}{\sqrt{2}}, \quad +\infty,$$

то та сторона прийме знаки:

$$+ - + - +,$$

маємо отже чотири зміни знаків, отже при малім μ для всїх вартостий γ всї чотири кореня є дїйсні.

З відси слїдує, що **перстень зложений з рівних саселїтів може все остояти ся в рівновазї, наколи єго маса є достаточно мала в порівнаню з масою Сатурна.**

Розходить ся тепер о се, як мале мусить бути μ, щоби рівновага ся остояла.

Понеже γ може бути якенебудь, возьмім:

$$\gamma = \frac{p}{2} = q.$$

Як знаєм:

$\vartheta = \frac{h\pi}{p} = \frac{h\pi}{2q}$ $(h = 0, 1, 2, \quad 2q - 1)$; $2\gamma\vartheta = h\pi$, отже $\sin 2\gamma\vartheta = 0$ або $M\gamma = 0$; $\sin^2\gamma\vartheta$ і $\cos^2\gamma\vartheta$ приймають вартости 1, 0, 1, 0, 1, 0,

Наколи возьмем q непаристе, дістанемо:

$$L_q = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{2q}}{\sin^3\frac{\pi}{2q}} + \frac{\cos^2\frac{3\pi}{2q}}{\sin^3\frac{3\pi}{2q}} + \cdots + \frac{\cos^2\frac{q-2}{2q}\pi}{\sin^3\frac{q-2}{2q}\pi}\right) - \left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2q}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2q}} + \cdots + \frac{1}{\sin\frac{q-1}{2q}\pi}\right)$$

$$N_q = \left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{2q}}{\sin^3\frac{\pi}{2q}} + \frac{\cos^2\frac{3\pi}{2q}}{\sin^3\frac{3\pi}{2q}} + \cdots + \frac{\cos^2\frac{q-2}{2q}\pi}{\sin^3\frac{q-2}{2q}\pi}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2q}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2q}} + \cdots + \frac{1}{\sin\frac{q-1}{2q}\pi}\right)$$

А що для $0 \angle x \angle \frac{\pi}{2}$ є:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 +$$

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{40}x + \frac{163}{15120}x^3 +$$

то для достаточно великого q дістанемо:

$$L_q = 4\left(\frac{q}{\pi}\right)^3\Big\{1+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{(q-1)^3}-\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{q}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{q-2}\right)-\frac{1}{640}\left(\frac{\pi}{q}\right)^4\left(1+3+\cdots+(q-2)\right)+$$
$$+\frac{163}{967680}\left(\frac{\pi}{q}\right)^6\left[1+3^3+\cdots+(q-2)^3\right]\Big\}-\frac{q}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{2}{q-1}\right)-\frac{1}{6}\frac{\pi}{q}\left(1+2+\cdots+\frac{q-1}{2}\right)-$$
$$-\frac{7}{360}\left(\frac{\pi}{q}\right)^3\left(1+2^3+\cdots+\left(\frac{q-1}{2}\right)^3\right)+\cdots$$

$$N_q-2L_q=\frac{q}{\pi}\left[\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{q}\right)+2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{2}{q-1}\right)\right]+\frac{\pi}{q}\left[\frac{1}{24}(1+3+\cdots+q)+\frac{1}{3}\left(1+2+\cdots+\frac{q-1}{2}\right)\right]+$$
$$+\left(\frac{\pi}{q}\right)^3\left\{\frac{7}{5760}(1+3^3+\cdots+q^3)+\frac{7}{180}\left(1+2^3+\cdots+\left(\frac{q-1}{2}\right)^3\right)\right\}+\cdots$$

а що:

$$1+3+\cdots+(q-2)=\frac{(q-1)^2}{4},\quad 1^3+3^3+\cdots+(q-2)^3=\frac{(q-1)^4-2(q-1)^2}{8},$$

то:

$$L_q=\left(\frac{2q}{\pi}\right)^3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)+\frac{W_1}{q^2}+\frac{W^2}{q^3}+\quad\right]$$

$$N_q - 2L_q = \left(\frac{2q}{\pi}\right)^3\frac{V_1}{q^2}+\frac{V_2}{q^3}+$$

отже в приближеню:

$$L_q = 0{\cdot}525\left(\frac{2q}{\pi}\right)^3,\qquad N_q - 2L_q = 0{\cdot}0000\left(\frac{2q}{\pi}\right)^3. \tag{28}$$

Наколи тепер після 28) в рівнанє 24) за $L\gamma$ $M\gamma$ $N\gamma$ вставимо L_q, 0, $2L_q$, дістанемо:

$$\left(\frac{n}{\omega}\right)^4 - (1-\mu L_q)\left(\frac{n}{\omega}\right)^2 + 2\mu L_q(3-\mu L_q) = 0. \tag{29}$$

Щоби оба корені були дійсні, мусить бути:

$$1-\mu L_q > 0 \tag{30}$$

і

$$1 - 26\mu L_q + 9\mu^2 L_q^2 > 0.$$

З відси:

$$(\mu L_q - 2{\cdot}8499)\,(\mu L_q - 0{\cdot}0390) > 0$$

або після 30)

$$\mu L_q < 0{\cdot}039, \quad \mu < \frac{0{\cdot}039}{0{\cdot}525}\left(\frac{\pi}{2q}\right)^3.$$

Наколи віднощенє маси перстеня а масою Сатурна є m, то:

$$m = 2\mu q = \mu p,$$

отже:

$$m < \frac{2{\cdot}30}{p^2}.$$

Наколиби отже було лиш 100 сателїтів, маса всїх їх — щоби рівновага перстеня могла бути тревала — мусїлаби бути меньша як $\frac{1}{4000}$-а часть маси Сатурна.

Но ми брали лиш $\gamma = q$; отже даймо тому γ вартости $(1, 2, \ldots q - 1)$. L_γ, M_γ, N_γ мають вартости досить великі з причини малих знаменників $\sin^3\vartheta$, $\sin^2\vartheta$, $\sin\vartheta$; вартости ті зменьшать ся, наколи p є велике; тодї для першої вартости на ϑ $\left(\vartheta = \frac{\pi}{p}\right)$ в приближеню за $\sin^3\vartheta$, $\sin^2\vartheta$, $\sin\vartheta$ можна покласти: $\left(\frac{\pi}{p}\right)^3$, $\left(\frac{\pi}{p}\right)^2$, $\frac{\pi}{p}$, а тодї:

$$N_\gamma = 2L_\gamma\left(1 + \frac{S_1}{p^2}\right), \quad M_\gamma = L_\gamma \frac{S_2}{p},$$

а рівнанє 24) перейде на 29) (лиш за L_q прийде L_γ). Щоби чотири коренї були і ту дїйснї, треба і ту покласти:

$$\mu L_\gamma \angle\ 0{\cdot}039. \qquad 31)$$

А що після першого значіня на L_γ буде для всяких γ:

$$L_\gamma \angle \frac{1}{4} \sum \frac{\cos^2\vartheta}{\sin^3\vartheta},$$

а тим більше:

$$L_\gamma \angle \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\pi}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \quad\right) = 0{\cdot}0194 p^3,$$

отже після 31):

$$\mu 0{\cdot}0194 p^3 \angle\ 0{\cdot}039,$$

або:

$$\mu \angle \frac{2}{p^3}.$$

Нерівність 31) сповняє ся проте все. Можемо проте сказати, що наколи:

$$m \angle \frac{2}{p^2},$$

де p є число сателїтів, а m відношенє між масою цїлого перстеня а масою Сатурна, то **рівновага перстеня остоїть ся**.

5. Наколиби сателїти мали **маси ріжні**, то і тодї дїйшлибисьмо до рівнань ріжничкових лїнїових зі сталими сочинниками; очевидно що рахунки будуть більше скомплїковані. Однак видко, що і ту при малих масах сателїтів дїйдем до анальоґічного роздїлу сил, як в першім случаю, отже загальна конклюзия остане; зміни, які би ту виступали в положеню перстеня, будуть відбувати ся в дуже тїсних границях.

Maxwell бере дальше случай, що перстень складає ся з кусників метеоричних і доходить до заключеня, що єго ґустота мусїлаби бути меньша або рівна $\frac{1}{300}$ ґустоти Сатурна. Середна ґустота перстеня рівналаби ся в приближеню двократній ґустотї воздуха під сталим тисненєм, но очевидно ґустота в поодиноких місцях перстеня моглаби бути більша.

Maxwell доказує далї, що перстень плинний тяглий не мігби ся остояти, але мусївби роздїлити ся на множество малих сателїтів. Можна проте приняти, що перстень складає ся з окремих частий, які можуть бути сталі або плинні, але від себе не залежать (деякі сателїти є плинні, а деякї сталі). Стверджає се обсервация, бо через внутрішний берег перстеня можна обсервувати берег Сатурна, що булоб неможливе, наколиб лучі Сатурна переходили через тяглий перстень, бо тодї підлягалиби рефракциї.

Розслїди Ковалевскої.[1])

1. Ковалевска приймає подібно як Ляпляс, що перстень є **однородний**, утворений з плинної материї; повстав він через оборот кривої плоскої симетричної зглядом оси OY (Фіґ. II.), та немного ріжної від елїпси.

---

[1]) Пор. Zusätze und Bemerkungen zur Laplace'schen Untersuchung ü. d. Gestalt der Saturnringe (Astronom. Nachrichten Bd. CXI. 1885 ст. 37 et sqts.)

Щоби якась точка перстеня могла остоятись в рівновазї, треба, щоби для неї заходило рівнане таке, як в теориї Ляпляса

$$V + V_1 + \frac{1}{2}\omega^2\rho_1^2 = C \qquad 1)$$

де V і V_1 є потенциями перстеня і Сатурна, ω скоростию оборотовою, ρ_1 віддалене від оси оборотової, а C є стала.

Наколи маса Сатурна є сконцентрована в точцї тяжести, то:

$$V_1 = \frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}}$$

де z_1 є віддалене уважаної точки перстеня від площи рівникової, а ρ_1 віддалене єї від оси оборотової.

В обчисленю потециялу V відступає Ковалевска від способу Ляпляса; після неї спосіб Ляпляса, що дїлане перстеня заступає дїланем безконечно довгого вальця, не є вповнї оправданий, бо годї з гори знати, чи блуд, який при тім підставленю виступає, є дїйсно такої величини, як думає Ляпляс. Також і се заложене Ляпляса, що вісь велика перстеня (розміри) є в порівнаню з перекройом елїпси дуже велика, не є також доконче оправдане.

З тої причини приймає Ковалевска, що рівнане згаданої кривої, мало-що ріжної від елїпси, в укладї ортоґональнім сорядних, де вісь OZ є осию обороту, є:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - a\cos t$$

$$z = a\,(\beta \sin t + \beta_1 \sin 2t + \beta_2 \sin 3t + \qquad) \qquad 2)$$

де t є дїйсна величина змінна в границях $(0 \cdots\cdots 2\pi)$, а $a\ \beta\ \beta_1$ є сталі.

Приймаючи розміри кривої дуже невеликі, можем вважати a за малий дроб; а наколи крива мало ріжнити ся має від елїпси, мусять $\beta_1\ \beta_2$ не лиш бути дуже малі, а також і сума

$$|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| + \cdots\cdots$$

мусить бути дуже мала в порівнаню з β.

Наколи тепер приймем, що $d\sigma$ є безконечно малий елемент поверхнї перстеня, P один пункт того елементу, P_1 означений пункт поверхнї, для якого шукаєм потенциялу V, а Θ є кут, який творить внїшна нормальна в точцї P з простою PP_1, то після Gauss'a дістанемо на потенциял:

$$V = -\frac{1}{2}\iint \cos\Theta d\sigma. \qquad 3)$$

Наколи сорядні для P є (x y z), для P_1 (x_1 y_1 z_1), відступ $PP_1 = r$, достави напрямні згаданої нормальної $\xi\ \eta\ \zeta$, то як звісно:

$$\cos\Theta = \frac{x_1 - x}{r}\xi + \frac{y_1 - y}{r}\eta + \frac{z_1 - z}{r}\zeta \qquad 4).$$

Наколи положимо:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{x^2+y^2}\cos\psi, \quad y = \sqrt{x^2+y^2}\sin\psi, \\ \varphi(t) &= \beta\sin t + \beta_1\sin 2t + \cdots\cdots \\ A &= 4\left(1 - a\cos t\right)\left(1 - a\cos t_1\right) \\ B &= a^2\left[\left(\cos t - \cos t_1\right)^2 + \left(\varphi(t) - \varphi(t_1)\right)^2\right] \\ C &= 2a^2\left(1 - a\cos t\right)\left[\left(\cos t - \cos t_1\right)\varphi'(t) + \sin t\left(\varphi(t) - \varphi(t_1)\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

дістанемо на потенциял:

$$V = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} \frac{C - Aa\varphi'(t)\sin^2\frac{1}{2}(\psi - \psi_1)}{\sqrt{B + A\sin^2\frac{1}{2}(\psi - \psi_1)}}\, d\psi,$$

або, наколи положимо:

$$\frac{1}{2}(\psi - \psi_1) = \vartheta,$$

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{C - Aa\varphi'(t)\sin\vartheta}{\sqrt{B + A\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta \qquad 6)$$

дістанемо:

$$V = \int_0^{2\pi} W dt \qquad 7).$$

Наколи положимо:

$$\sqrt{A\sin^2\vartheta + B} = \sqrt{B}.s, \quad k^2 = \frac{B}{A+B} \qquad 8)$$

дістанемо:

$$W = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{C + Ba\varphi'(t) - Ba\varphi'(t)\, s^2}{\sqrt{A+B}\,.\,\sqrt{s^2-1}\ \sqrt{1-k^2 s}}\, ds, \qquad 9)$$

де k^2 є дуже мала величина.

Є се інтеґрал еліптичний, тому-то Ковалевска уживає ту формул Weierstrass'a:[1])

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\ \sqrt{1-k^2\xi^2}} = \frac{1}{2} K \log \frac{16}{k^2} - K_1$$

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 \xi\, d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\ \sqrt{1-k^2\xi^2}} = \frac{1}{2} I \log \frac{16}{k^2} - I_1$$

де:

$$\begin{cases} K = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \\ K_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \frac{7}{2.3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \\ I = \frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \\ I_1 = -1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{13}{12}.\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \end{cases}$$

В виду того дістанемо:

$$W = W_1 \log \frac{16}{k^2} + W_2,$$

де:

$$W_1 = \frac{1}{2}\, \frac{C + aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}}\, K - \frac{1}{2}\, \frac{aB\varphi'(t)}{2\sqrt{A+A}}\, I$$

$$W_2 = -\frac{C + aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}}\, K_1 + \frac{aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}}\, I_1$$

Величини W_1 і W_2 можна розвинути після cos і sin величин t і t_1 в ряди, причім сочинники будуть рядами степенними вели-

---

[1]) Пор. Weierstrass: Theorie der Abelschen Functionen, Crelle's Journal т. 52. ст. 75 et sqts.

чин a β β_1, , а що a є дуже мале, то ті ряди будуть сильно збіжні.

Інтеґрал $\int_0^{2\pi} W_2\, dt$ дає ся впрост обчислити в сей спосіб, що вираз ряду на W_2, незалежний від t, помножимо через 2π.

Труднїйша є справа з інтеґралом $\int_0^{2\pi} W_1 \log \frac{16}{k^2}\, dt$.

Позаяк в 5) величина B стає ся зером лиш тодї, коли $\cos t = \cos t_1$ або $\varphi(t) = \varphi(t_1)$, що з огляду на нашу криву може лиш тодї бути, коли $t = t_1 + 2m\pi$, де m є число цїле, то з сего слїдує, що B є подїльне через $1 - \cos(t - t)$, отже можем написати:

$$B = a^2 \left[1 - \cos(t - t_1)\right] B_1,$$

де B_1 дасть ся розвинути після cos і sin величин t і t_1.

Наколи заложимо, що $\beta_1 = \beta_2 = \quad = 0$, то в виду сего B_1 зводить ся на

$$\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1),$$

з чого слїдує, що для достаточно малих β_1 β_2 B_1 не зникає для дїйсних вартостий t t_1.

Наколи тепер положимо:

$$B_1 = \left[\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1)\right](1 + B_2),$$

то:

$$\log B = 2\log a + \log\left[1 - \cos(t - t_1)\right] + \log\left[\frac{1}{2}(1+\beta^2) - \frac{1}{2}(1-\beta^2)\cos(t+t_1)\right] + \log(1+B_2).$$

В виду того складає ся $W_1 \log \frac{16}{k^2}$ з слїдуючих пятох частий:

$$\begin{aligned}
&W_1 \log 16\,(A + B)\\
&-2\, W_1 \log a\\
&-W_1 \log\left[\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1)\right]\\
&-W_1 \log\left[1 - \cos(t - t_1)\right]\\
&-W_1 \log(1 + B_2)
\end{aligned}$$

Три перші части можна подібно як W_2 розвинути в ряди і впрост з'інтеґрувати. Четверта часть дає ся розвинути на ряд лиш для вартостий $t - t_1$, що лежать між 0 а 2π, но після теориї Fourier'а і ту дістанемо вартість інтеґрала $- \int_0^{2\pi} W_1 \log\left[1 - \cos(t-t_1)\right] dt$, наколи вираз від t незалежний через 2π.

Щоби обчислити інтеґрал $\int_0^{2\pi} W_1 \log(1 + B_2)\, dt$, треба наперед $\log(1 + B_2)$ розвинути в ряд після степений B_2; ряд сей із за дуже малих вартостий $\beta_1\ \beta_2$, буде сильно збіжний; можна отже буде перевести інтеґроване.

Сим способом дістанем на V зовсім означений і сильно збіжний ряд форми:

$$V_0 + V_1 \cos t_1 + V_2 \cos 2\, t_1 +$$

Сочнники того ряду є з огляду на a, $\log a$, $\log(1 + \beta)$, β_1, β_2 цілковити функциями (о безконечно много членах); їх сочинники є виміримими дробовими функциями β; $\log a$ виступає лиш яко добуток в купі з якоюсь степеною a.

2. Перейдім тепер до потенциялу V_1:

$$V_1 = \frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}} = \frac{M}{\sqrt{(1 - a \cos t_1)^2 + a^2 \varphi^2(t_1)}}$$

Вираженє се можна також розвинути на збіжний ряд:

$$m_0 + m_1 \cos t_1 + m_2 \cos 2\, t_1 + \cdots\cdots$$

де $m_0\ m_1$, є цілими функциями $a\ \beta\ \beta_1$

В кінци:

$$\rho_1^2 = (1 - a \cos t_1)^2 = \frac{1}{2} a^2 - 2 a \cos t_1 + \frac{1}{2} a^2 \cos 2\, t_1.$$

Наколи перстень має удержувати ся в рівновазї, треба величини ω, C, β, β_1, β_2, так визначити, щоби -

$$\left.\begin{cases} V_0 + m_0 + \frac{1}{2} \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} a^2\right) + C = 0 \\ V_1 + m_1 - \omega^2 a = 0 \\ V_2 + m_2 + \frac{1}{4} \omega^2 a^2 = 0 \end{cases}\right\} \quad 10).$$

а:

$$V_{s+2} + m_{s+2} = 0 \quad (s \text{ додатне}) \qquad 11).$$

Величин $\beta\ \beta_1\ \beta_2, \cdots$ є безконечно много і в кожде рівнанє входить їх безконечно много, отже неможливо їх визначити. Можнаби однак порадити собі в сей спосіб, що возьмем:

$$\varphi(t) = \beta^{(\mu)} \sin t + \beta_1^{(\mu)} \sin 2t + \cdots + \beta_\mu^{(\mu)} \sin (\mu + 1)\, t,$$

обчислимо сочинники V_λ, m_λ і визначимо: $\omega^{(\mu)}$, $C^{(\mu)}$, $\beta^{(\mu)}$, $\beta_1^{(\mu)}, \cdots \beta_\mu^{(\mu)}$ так, щоби $(\mu + 3)$ початкових рівнань 10) і 11) сповнило ся. Наколиби далї дало ся доказати, що ті величими для $\mu = \infty$ зближають ся до означених скінчених границь так, що сума безглядних вартостий граничних виражень на $\beta_1\ \beta_2$ булаб меньша як β, то можнаби з сего заключати, що рівнаня 10) і 11) сповнять ся, наколи за величини $\omega^{(\mu)}$, $C^{(\mu)}$, $\beta^{(\mu)}$, вставимо граничні вартости ω, C, β,

Се є однак лиш в теориї можливе. Щоби згадані величини з відповідним приближенєм обчислити, поступимо в слїдуючий спосіб. Положім:

$$\varphi = \beta \sin t + \beta_1 \sin 2t + \cdots + \beta_\mu \sin (\mu + 1)\, t$$

і приймім на разї, що $|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots + |\beta_\mu|$ є величиною того самого ряду, що а, та пропустїм в розвиненях на V_λ і m_λ всї величини ряду висшого як $(\mu + 2)$, причім $a^m \log a$ буде величиною ряду висшого як $(m - 1)$. Тодї з $(\eta + 3)$ початкових рівнань 10) і 11) вийде, що $\beta_1\ \beta_2 \quad \beta_\mu$ є малими величинами 1-ого, 2-ого, μ-ого ряду; можна отже покласти:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= a\gamma_1 \\ \beta_2 &= a^2\gamma_2 \\ &\ \vdots \\ \beta_\mu &= a^\mu \gamma_\mu \end{aligned}$$

Тодї з даних рівнань випадуть $\gamma_1\ \gamma_2 \cdots \gamma_\mu$ яко однозначні скінчені числа, а далї при так визначених величинах $\beta_1 \cdots \beta_\mu$ ліві сторони оставших ся рівнань 10) і 11) будуть величинами ряду висшого як $(\mu + 2)$.

3. З усего того виходить, що можна визначити в сей спосіб перекрій перстеня, щоби вираженє:

$$V + V_1 + \frac{1}{2}\omega^2\rho^2,$$

яке для поверхні перстеня має мати сталу вартість, ріжнило ся від сталої лиш о величину ряду висшого як $(\mu + 2)$. А що $(\mu + 2)$ можна приняти так велике, як хочемо, то можем заключати, що дійсно істнує такий вид перекрою перстеня, для якого повисше вираженє на цілій поверхні перстеня є стале.

Ковалевска переводить далї обчисленє для $\mu = 1$, щоби визначити вид перекрою перстеня з точностию третого ряду. Пропускаючи в висше наведених вираженях вирази ряду висшого як четвертий дістає она:

$$V = \pi a^2 (v_0 + v_1 \cos t_1 + v_2 \cos 2t_1 + v_3 \cos 3t_1),$$

де:

$$v_0 = \beta \left(\log \frac{256}{a^2 (1+\beta)^2} - 2\right)$$

$$v_1 = a\beta \left(\frac{-11 + 9\beta - \beta^2 + 3\beta^3}{4(1+\beta)} + \log \frac{256}{a^2(1+\beta)^2}\right)$$

$$v_2 = -\beta \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

$$v_3 = -a\beta \frac{(1-\beta)(1+3\beta)}{6(1+\beta)^2} + \alpha\gamma \frac{-2 + 6\beta + 6\beta^2 + 6\beta^3}{3(1+\beta)^3}.$$

Далї є:

$$\frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}} = m_0 + m_1 \cos t_1 + m_2 \cos 2t_1 + m_3 \cos 3t_1,$$

$$m_0 = M$$

$$m_1 = aM \left[1 + a^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\beta^2 - \frac{1}{2}\beta\gamma\right)\right]$$

$$m_2 = a^2 M \frac{2 + \beta^2}{4}.$$

$$m_3 = a^3 M \left[\frac{1}{8}(2 + 3\beta^2) + \frac{1}{2}\beta\gamma\right]$$

а в решті:

$$\frac{1}{2}\omega^2 \rho^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \left(1 + \frac{1}{2}a^2\right) - \omega^2 a \cos t_1 + \frac{1}{4}\omega^2 a^2 \cos 2t_1$$

Друге, трете і четверте з рівнань 10), які в нашім случаю є:

$$\pi a^2 v_1 + m_1 - a\omega^2 = 0.$$

$$\pi a^2 v_2 + m_2 + \frac{1}{4} a^2 \omega^2 = 0.$$

$$\pi a^2 v_3 + m_3 = 0.$$

мають тепер вартість:

$$\pi a^2\beta\left(\frac{-11+9\beta-\beta^2+3\beta^3}{4\,(1+\beta)}+\log\frac{256}{a^2(1+\beta)^2}\right)+a^2M\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\beta^2\right)+\left(2\pi\frac{1+\beta-\beta^2}{(1+\beta)^2}-\frac{1}{2}M\beta\right)a^2\gamma+M-\omega^2=0.$$

$$M\,(2+\beta^2)-4\,\beta\,\frac{1-\beta}{1+\beta}\,\pi+\omega^2=0. \qquad 12)$$

$$M\,\frac{2+3\beta^2}{8}-\pi\,\frac{\beta(1-\beta)(1+3\beta)}{6\,(1+\beta)^2}+\left(\frac{1}{2}M\beta+\frac{-2+6\beta+6\beta^2+6\beta^3}{3\,(1+\beta)^3}\right)\gamma=0.$$

З послїдного з тих рівнань виходить:

$$\gamma=\frac{1}{4}\,\frac{3M\,(2+3\,\beta^2)\,(1+\beta)^2-4\pi\beta\,(1-\beta)\,(1+3\beta)}{4-12\beta-12\beta^2-12\beta^3-3M\beta\,(1+\beta)^3}\,(1+\beta) \qquad 13)$$

а з першого:

$$\omega^2=M+a^2\,N \qquad 14)$$

де:

$$N=\pi\beta\left(\frac{-11+9\beta-\beta^2+3\beta^3}{4\,(1+\beta)}+\log\frac{256}{a^2(1+\beta)^2}\right)+M\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\beta^2\right)+\left(2\pi\,\frac{1+\beta-\beta^2}{(1+\beta)^2}-\frac{1}{2}M\beta\right)\gamma.$$

Друге з рівнань 12) провадить до рівнаня:

$$M\,(3+\beta^2)-\frac{4\beta\,(1-\beta)}{1+\beta}\,\pi+a^2\,N=0 \qquad 15)$$

де за γ, яке входить в N, треба вставити вартість 13). Рівнанє 15) служити-ме до обчисленя β.

Наколи в рівнаню 15) пропустимо вираз при a^2, дістанемо:

$$M\,(3+\beta^2)-\frac{4\beta\,(1-\beta)}{1+\beta}\,\pi=0.$$

Як легко постеречи, є се то само рівнанє, що в теориї Ляпляса (рівнанє 5). Мусимо ту заложити, що β є додатне і не більше як 1. Далї як в теориї Ляпляса треба положити, що $\frac{M}{4\pi}<0{\cdot}0543$; при тім заложеню рівнанє має два додатні коренї. Наколи оден з них є β_0, то з рівнаня 15) випаде з точностию до четвертого ряду:

$$\beta=\beta_0-\frac{a^2N_0}{2M\beta_0-3+\dfrac{8}{(1+\beta_0)^2}},$$

де $\left.N_0=N\right\}$ для β_0

Ся вартість вставлена в 13) дозваляє обчислити з таким самим приближенєм і γ, а так само випаде і:

$$\omega^2=M+a^2N_0.$$

В кінци завважати треба, що тепер є:

$$\varphi(t) = \beta \sin t + a\gamma \sin 2t;$$

$$\varphi(t) < \beta \sin t, \quad \text{наколи } o < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi(t) > \beta \sin t, \quad \text{наколи } \frac{\pi}{2} < t < \pi.$$

Для меньшого кореня β z буде меньше, отже перекрій полуденниковий буде мав сильнїйшу кривину в точцї найблизше положеній до середоточки цїлого систему (фіґ. V. б), для більшого кореня β буде противно (фіґ. V. а).

Дослїди Poincaré над рівновагою перстеня з маси плинної однородної, якого частини притягають ся після закона Нютона, та який відбувае рух оборотовий.[1])

1. Приймім, що OX є осию обороту (фіґ. II.), C середоточка тяжести полуденникового перекрою ABA'B', CO = 1. Най r = CM і $\sphericalangle \varphi$ = YCM будуть сорядними біґуновими точки M. Згадана крива, симетрична до оси OY, має після Poincaré[2]) рівнанє:

$$r = a\,(1 + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \cdots\cdots) \qquad 1).$$

Poincaré приймає загальне рівнанє рівноваги:

$$\delta U = o,$$

де U є функция сил; в положеню, яке би відповідало рівновазї тревалій, мусить бути U maximum. Наколи dm і dm' є якісь два елементи перстеня віддалені від себе о $\triangle$, то:

$$U = f \int \frac{dm\, dm'}{\triangle} + \frac{1}{2}\,\omega^2 \int y^2 dm,$$

де інтеґрал відносить ся до всїх точок маси, що обертає ся зі скоростию ω.

Найже:

$$\int \frac{dm\, dm'}{\triangle} = \frac{1}{2} \int\int \frac{dm\, dm'}{\triangle} = W, \qquad \int y^2 dm = I, \qquad 2)$$

---

[1]) Пор. Poincaré: Bulletin astronomique т. II. ст. 109. і 405. і Acta mathematica т. VII. 259 et sqts.

[2]) Acta math. VII. ст. 284 sqts.

то:

$$U = fW + \frac{1}{2}\omega^2 I. \qquad 3).$$

W є енерґія потенцияльна перстеня, I єго момент безвладности з огляду на вісь обороту; W і I відносять ся до цілої маси перстеня. Наколи ті елементи dm, що лежать між поверхнею рівноваги а поверхнею здеформованою безконечно близькою, назначимо через $d\mu$, а через V_μ і y_μ назначимо відповідні вартости потенцияльу та віддаленя y (точки на поверхні рівноваги), дістанемо:

$$\delta W = \int V_\mu d\mu, \quad \delta I = \int y_\mu^2 d\mu, \quad \int d\mu = 0,$$

отже:

$$\delta U = \int \left(fV_\mu + \frac{1}{2}\omega^2 y_\mu^2 \right) d\mu = 0,$$

бо вираженє в скобках є стале для цілої поверхні рівноваги.

Наколи маса перстеня є M, а густота ρ, то знанє маси M дозволить нам утворити якусь реляцию між a, ł, β_1 β_2, ———, а се, що початок C лучів провідних є заразом середоточкою тяжести, дасть нам реляцию для β, і будемо могли визначити β_1 яко функцию величин (β_2 β_3, ———). Независимими параметрами будуть тоді a β_2 β_3 Коли приймем, щосьмо найшли вираженє на U яко функцию тих параметрів, то з рівнаня $\delta U = 0$ випаде:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta_3} = 0, \qquad 4)$$

і всї елементи фіґури будуть визначені.

Вираженє W дасть ся легко обчислити на сїй основі, що перстень є оборотовий.

Наколи dS і dS' є елементами поверхні перекрою ABA'B', y та y' їх відступами від оси OX, $h = x - x'$, то оба ті елементи утворять через оборот довкола оси OX два перстенї колові, яких енерґія потенцияльна є dW; наколи полуденники двох елементів dm і dm' тих елементарних перстенїв творять з площею XOY кути ψ і ψ', а відступ тих елементів є $\triangle$, то:

$$W = \int dW, \quad dW = \iint \frac{dm\, dm'}{\triangle},$$

а що:

$$dm = \rho dS y d\psi, \quad dm' = \rho dS' y' d\psi',$$

$$\Delta^2 = y^2 + y'^2 - 2yy' \cos(\psi' - \psi) + h^2,$$

то:

$$dW = \rho^2 yy' dS dS' \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{y^2 + y'^2 - 2yy' \cos(\psi' - \psi) + h^2}}.$$

Най: $\psi' - \psi = \psi''$, то узглядняючи, що ψ остає стале при інтеґрованю зглядом ψ', дістанемо:

$$dW = 4\pi\rho^2 yy' dS dS' \int_0^{2\pi} \frac{d\psi''}{\sqrt{y^2 + y'^2 - 2yy' \cos\psi'' + h^2}},$$

або:

$$dW = 8\pi\rho^2 yy' dS dS' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(y + y')^2 + h^2 - 4yy' \sin^2\vartheta}},$$

де $\psi'' = \pi - 2\vartheta$. Є се інтеґрал еліптичний першого рода, а єго модули є:

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= \frac{4yy'}{(y + y')^2 + h^2} \\ k'^2 &= \frac{(y - y')^2 + h^2}{(y + y')^2 + h^2} = \frac{\delta^2}{(y + y')^2 + h^2}; \\ &\text{отже:} \\ dW &= 8\pi\rho^2 \frac{yy'}{\sqrt{(y + y')^2 + h^2}} dS dS' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta}} \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

де δ є відступом елементів dS і dS'.

Poincaré приймає, що розміри даної кривої є дуже малі в порівнаню з l; тоді $\frac{y}{l} - 1$, $\frac{y'}{l} - 1$, $\frac{h}{l}$ є величини першого ряду, а k'^2 другого ряду.

Наколи положимо $y = l + y_1$, $y' = l + y_1'$, де y_1 і y_1' є рядні елементів dS і dS' з огляду на вісь Cx_1, рівнобіжну до OX, тоді $h^2 = (x - x')^2$ і дістанемо розвинення після $\frac{x}{l}$, $\frac{x'}{l}$, $\frac{y_1}{l}$, $\frac{y_1'}{l}$:

$$k' = \frac{\delta}{2l}\left[1 + \frac{y_1 + y_1'}{l} + \frac{(y_1 + y_1')^2 + (x - x')^2}{4l^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\delta}{2l}\left[1 - \frac{y_1 + y_1'}{2l} + \frac{(y_1 + y_1')^2}{4l^2} - \frac{(x - x')^2}{8l^2} + \cdots\right],$$

а що інтеґрал (анальоґічно як в теориї Ковалевскої):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin\vartheta}} = \left(1+\frac{\delta^2}{16l^2}+\cdots\right)\log\frac{8l}{\delta}+\frac{y_1+y_1'}{2l^2}-\frac{(y_1+y_1')^2}{8l^2}+\frac{(x-x')^2}{8l^2}-\frac{\delta^2}{16l^2}-\cdots$$

$$\frac{yy'}{\sqrt{(y+y')^2+h^2}} = \frac{(l+y_1)(l+y_1')}{\sqrt{(2l+y_1+y_1')^2+(x-x')^2}} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{y_1+y_1'}{2l}-\frac{(y_1-y_1')^2}{4l^2}-\frac{(x-x')^2}{8l^2}+\quad\right],$$

то дістанемо:

$$dW = 4\pi\rho^2 l\left[1+\frac{y_1+y_1'}{2l}-3\frac{(y_1-y_1')^2}{16l^2}-\frac{(x-x')^2}{16l^2}-\cdots\cdots\right]\log\frac{8l}{\delta}\,dSdS'+$$

$$+4\pi\rho^2 l\left[\frac{y_1+y_1'}{2l}+\frac{(y_1-y_1')^2}{16l^2}+\frac{y_1y_1'}{2l^2}+\frac{(x-x')^2}{16l^2}+\cdots\cdots\right]dSdS'.$$

Най:

$$W_1 = 4\pi\rho^2 l\iint\log\frac{8l}{\delta}\,dSdS' \qquad 7)$$

а:

$$\left.\begin{aligned}W_2 &= 4\pi\rho^2 l\iint\left[\frac{y_1+y_1'}{2l}-3\frac{(y_1-y_1')^2}{16l^2}-\frac{(x-x')^2}{16l^2}+\cdots\cdots\right]\log\frac{8l}{\delta}\,dSdS'+\\ &+4\pi\rho^2 l\iint\left[\frac{y_1+y_1'}{2l}+\frac{(y_1-y_1')^2}{16l^2}+\frac{y_1y_1'}{2l^2}+\frac{(x-x')^2}{16l^2}+\cdots\cdots\right]dSdS',\end{aligned}\right\} \quad 8)$$

то тоді:

$$W = W_1 + W_2 \qquad 9).$$

З висше наведених формул видно, що квот $\frac{W_2}{W_1}$ є величиною малою ряду $\frac{a}{l}$.

2. Щоби винайти W_1, підем способом Callandreau[1]).

Най-же:

$$f(\varphi) = 1+\beta_1\cos\varphi+\beta_2\cos 2\varphi+ \qquad 10)$$

і возьмім криві:

$$r_1 = uf(\varphi), \quad r_1 = (u+du)f(\varphi)$$
$$r_1' = u'f(\varphi'), \quad r_1' = (u'+du')f(\varphi'),$$

де u і u' є два параметри змінні в границях (0⋯⋯a), $u' < u$.

Криві ті є гомотетичні зглядом кривої полуденникової (фіґ. VI).

---

[1]) Пор. Bulletin astronomique т. III. ст. 252, також Tisserand loc. cit. II.

Най елементом dS буде часть між кривими u, $u + du$, та лучами провідними, яким відповідають кути φ і $\varphi + d\varphi$; так само dS'. Дістанемо:

$$dS = u f^2(\varphi)\, du\, d\varphi, \quad dS' = u' f^2(\varphi')\, du'\, d\varphi'$$

$$\delta^2 = u^2 f^2(\varphi) + u'^2 f^2(\varphi') - 2u\, u' f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi').$$

Для даної вартости *u* будемо інтеґрувати зглядом u' від 0 до *u*, а для φ' від 0 до 2π так, щоби елемент dS' обнимав всї положеня в середині кривої u; далї u має ся зміняти від 0 до a, а φ від 0 до 2π. Тодї можна буде написати:

$$\frac{W_1}{4\pi\rho^2 l} = \int_0^a u du \int_0^u u' du' \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{8l}{\sqrt{u^2 f^2(\varphi) + u'^2 f^2(\varphi') - 2uu' f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi')}}\, d\varphi\, d\varphi'.$$

u є в інтеґрованю зглядом u' стале, можна проте покласти:

$$u' = ux, \quad du' = udx,$$

а тодї:

$$\frac{W_1}{4\pi\rho^2 l} = \int_0^a u^3 \log \frac{8l}{u}\, du \int_0^1 x dx \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi')\, d\varphi\, d\varphi' +$$

$$11) \quad + \int_0^a u^3 du \int_0^1 x dx \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{1}{\sqrt{f^2(\varphi) + x^2 f^2(\varphi') - 2x f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi')}}\, d\varphi\, d\varphi'.$$

Можна безпосередно інтеґрувати зглядом u; тодї:

$$\int u^3 \log \frac{8l}{u}\, du = \frac{1}{4} u^4 \log \frac{8l}{u} + \frac{1}{16} u^4 + \text{Const.}$$

$$\int_0^a \log \frac{8l}{u}\, du = \frac{1}{4} a^4 \left(\log \frac{8l}{a} + \frac{1}{4}\right);$$

дальше є:

$$\int_0^{2\pi} f^2(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} (1 + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \cdots\cdots)^2\, d\varphi = 2\pi(1 + c_0),$$

де:

$$c_0 = \frac{1}{2} \sum_1^\infty \beta_n^2$$

та де пропущено добутки третого степеня величин β_n.

Тепер дістанемо:

$$W_1 = \pi^3 \rho^2 a^4 l (1 + c_0)^2 \left(\frac{1}{2} + 2 \log \frac{8l}{a}\right) + \pi \rho^2 a^4 l \int_0^1 J x dx, \qquad 12)$$

де:

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{1}{\sqrt{f^2(\varphi)+x^2 f^2(\varphi')-2x f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi-\varphi')}}\, d\varphi d\varphi'.$$

Щоби обчислити J, положім:

$$f^2(\varphi)+f^2(\varphi')x^2-2xf(\varphi)f(\varphi')\cos(\varphi-\varphi') = \left[1+x^2-2x\cos(\varphi-\varphi')\right](1+H),$$

де:

$$H = \frac{f^2(\varphi)-1+x^2\left[f^2(\varphi')-1\right]-2x\left[f(\varphi)f(\varphi')-1\right]\cos(\varphi-\varphi')}{1+x^2-2x\cos(\varphi-\varphi')} \qquad 13)$$

Тепер дістанемо:

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi)\, f^2(\varphi') \log \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\cos(\varphi-\varphi')}}\, d\varphi d\varphi' -$$

$$14) \qquad -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi)\, f^2(\varphi') \log(1+H)\, d\varphi d\varphi'.$$

Розвиваючи на ряд дістанемо:

$$\log \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\cos(\varphi-\varphi')}} = \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} \cos n(\varphi-\varphi').$$

Найже:

$$\sum_1^{\infty} \beta_n \cos n\varphi = \zeta, \quad \sum_1^{\infty} \beta_{n'} \cos n'\varphi' = \zeta',$$

то:

$$f(\varphi) = 1+\zeta, \quad f(\varphi') = 1+\zeta'.$$

Перший інтеґрал форми 14) прийме вид:

$$\sum \frac{x^n}{n} \int_0^{2} d\varphi \int_0^{2\pi} (1+2\zeta+2\zeta'+\zeta^2+\zeta'^2+4\zeta\zeta'+\cdots\cdots) \cos n(\varphi-\varphi')\, d\varphi'.$$

Щоби сей вислїд був ріжний від зера, треба виражене в скобках звести до $4\zeta\zeta'$, або до $4\Sigma\beta_n^2 \cos n\varphi \cos n\varphi' = 2\Sigma\beta_n^2 \cos n(\varphi-\varphi')$; інтеґрал прибере тодї вартість $4\pi^2\Sigma \frac{x^n}{n} \beta_n^2$.

Форма 13) дасть по виконаню:

$$H = \zeta+\zeta'+\zeta\zeta'+(\zeta-\zeta')\, \frac{1+\zeta-(1+\zeta')x^2}{1+x^2-2x\cos\vartheta} \qquad 15).$$

А що се виражене є з огляду на β першого ряду, проте можна взяти:

$$\log(1+H) = H - \frac{H^2}{2},$$

а тоді:

$$J = 4\pi^2 \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} \beta_n^2 + \frac{1}{4} J_1. \tag{16}$$

де:

$$J_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (H^2 - 2H)(1+\zeta^2)(1+\zeta')^2 \, d\varphi d\varphi'.$$

Наколи вставимо вартість за H, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} J_1 = &\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(-2\zeta - 2\zeta' - 3\zeta^2 - 3\zeta'^2 - 8\zeta\zeta')\, d\varphi d\varphi' + \\ + 2&\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta'-\zeta+\zeta'^2-2\zeta^2+\zeta\zeta'+(\zeta-\zeta'-2\zeta'^2+\zeta\zeta')\,x^2}{1+x^2-2x\cos\vartheta}\, d\varphi d\varphi' + \\ &+ (1-x^2)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta^2+\zeta'^2-2\zeta\zeta'}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2}\, d\varphi d\varphi' \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Положім:

$$\left\{\begin{aligned} &\zeta^2 = c_0 + \sum_1^{\infty} c_n \cos n\varphi, \quad \zeta'^2 = c_0 + \sum_1^{\infty} c_{n'} \cos n'\varphi', \quad c_0 = \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\beta_n^2 \\ &\frac{1}{1+x^2-2x\cos\vartheta} = A_0 + \sum_1^{\infty} A_{n''}\cos n''\vartheta \\ &\frac{1}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2} = B_0 + \sum_1^{\infty} B_{n''}\cos n''\vartheta \end{aligned}\right. \tag{18}$$

то дістанем:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\zeta\, d\varphi d\varphi' = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\zeta'\, d\varphi d\varphi' = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\zeta^2\, d\varphi d\varphi' = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\zeta'^2\, d\varphi d\varphi' = 4\pi^2 c_0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\zeta\zeta'\, d\varphi d\varphi' = 0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta\, d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta'\, d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^2\, d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta'^2\, d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=4\pi^2 c_0 A_0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^2\, d\varphi d\varphi'}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta'^2\, d\varphi d\varphi'}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2}=4\pi^2 c_0 B_0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta\zeta'\, d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=\pi^2\sum_1^{\infty} A_n\,\beta_n^2,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta\zeta'\, d\varphi d\varphi'}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2}=\pi^2\sum_1^{\infty} B_n\beta_n^2.$$

В виду того рівнанє 17) дасть:

$$J_1=8\pi^2c_0\Big[-3-A_0(1+x^2)+B_0(1-x^2)^2\Big]+2\pi^2\sum_1^{\infty}\Big[A_n(1+x^2)-B_n(1-x^2)^2\Big]\beta_n^2. \quad 19)$$

Наколи зріжничкуєм другий з взорів 18) і помножимо через x, дістанемо:

$$x\frac{dA_0}{dx}+\sum_1^{\infty}x\frac{dA_n}{dx}\cos n\vartheta=-A_0-\sum_1^{\infty}A_n\cos n\vartheta+(1+x^2)\Big(B_0+\sum_1^{\infty}B_n\cos n\vartheta\Big);$$

з відси слідує, що:

$$(1-x^2)B_0=A_0+x\frac{dA_0}{dx}$$

$$(1-x^2)B_n=A_n+x\frac{dA_n}{dx}.$$

В виду того:

$$J_1=8\pi^2c_0\Big[-3-2A_0x^2+x(1-x^2)\frac{dA_0}{dx}\Big]+2\pi^2\sum_1^{\infty}\Big[2A_nx^2-x(1-x^2)\frac{dA_n}{dx}\Big]\beta_n^2.$$

А що:

$$A_0=\frac{1}{1-x^2},\quad A_n=\frac{2x^n}{1-x^2},$$

то:

$$J_1=-24\pi^2c_0-4\pi^2\sum_1^{\infty}nx^n\beta_n^2.$$

Остаточно дістанемо після 16):

$$J = -6\pi c_0 + \pi^2 \sum_1^\infty \left(\frac{4}{n} - n\right) x^n \beta_n^2;$$

з відси:

$$\int_0^1 Jxdx = -3\pi^2 c_0 - \pi^2 \sum_1^\infty \frac{n-2}{n} \beta_n^2.$$

Наколи вставимо се в 12), дістанемо:

$$\frac{W_1}{\pi^3 \rho^2 a^4 l} = \left(1 + c_0\right)^2 \left(\frac{1}{2} + 2\log\frac{8l}{a}\right) + \sum_1^\infty \left(\frac{2}{n} - \frac{5}{2}\right) \beta_n^2 \qquad 20).$$

Положім:

$$a^2 (1 + c_0) = a_0{}^2 \qquad 21)$$

то:

$$2\log\frac{8l}{a} = 2\log\frac{8l}{a_0} + \log(1 + c_0) = 2\log\frac{8l}{a_0} + c_0,$$

а рівнане 20) дасть:

$$W_1 = \pi^3 \rho^2 a_0{}^4 l \left[\frac{1}{2} + 2\log\frac{8l}{a_0} + 2\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - 1\right) \beta_n^2\right] \qquad 22)$$

3. Наколи y є прямовісна поведена з елементу dm до оси обороту, тодї:

$$dm = \rho y d\psi dS,$$

а інтеґрал:

$$I = \int y^2 dm = 2\pi\rho \int y^3 dS,$$

а що:

$$y = l + y_1,$$

то:

$$I = 2\pi\rho \left(l^3 \int dS + 3l^2 \int y_1 dS + 3l \int y_1{}^2 dS + \int y_1{}^3 dS\right) \qquad 23).$$

Точка C є средоточкою тяжести, отже:

$$\int y_1 dS = 0,$$

а що:

$$dS = a(1 + \zeta)^2 du d\varphi,$$

то:

$$\int dS = \int_0^a u du \int_0^{2\pi} (1+\zeta)^2 d\varphi = \pi a^2 (1+c_0) = \pi a_0^2 \qquad 24).$$

Отже πa_0^2 є полем полуденникового перекрою.

Дальше маєм:

$$\int y_1^2 dS = \int_0^a u^3 du \int_0^{2\pi} (1+\zeta)^4 \cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1+4\zeta+\cdots\cdots) \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\pi a_0 + \frac{1}{2} a^4 \int_0^{2\pi} \zeta \cos 2\varphi d\varphi \text{ (наколи добутки } \frac{a^2}{l^2} \text{ пропустимо)} =$$

$$= \frac{1}{4}\pi a^4 + \frac{1}{2}\pi a^4 \beta_2 = \frac{1}{4}\pi a_0^4 + \frac{1}{2}\pi a_0^4 \beta_2 \qquad 25).$$

З виражень 23), 24) і 25) вийде з відповідним приближенєм:

$$I = 2\pi^2 \rho a_0^2 l \left(l^2 + \frac{3}{4} a_0^2 + \frac{3}{2} a_0^2 \beta_2\right) \qquad 26).$$

В виду взорів 3), 22) і 26) дістанемо тепер на функцию сил:

$$U = \pi^3 f \rho^2 l a_0^4 \left[\frac{1}{2} + 2\log\frac{8l}{a_0} + 2\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - 1\right)\beta_n^2\right] + \pi\omega^2 \rho l a_0^2 \left(l^2 + \frac{3}{4} a_0^2 + \frac{3}{2} a_0^2 \beta_2\right)$$

Маса перстеня є:

$$M = 2\pi^2 a_0^2 l \rho,$$

отже:

$$a_0 l = \frac{M}{2\pi^2 \rho} \qquad 27)$$

а:

$$\frac{U}{\pi f \rho} = M a_0^2 \left[\frac{1}{4} + \log\frac{8l}{a_0} + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - 1\right)\beta_n^2\right] + M \frac{\omega^2}{2\pi f \rho}\left(l^2 + \frac{3}{4} a_0^2 + \frac{3}{2} a_0^2 \beta_2\right) \qquad 28).$$

U є проте функциєю змінних независимих $a_0\ \beta_2\ \beta_3, \cdots\cdots$; β_1 не входить ту, бо для $n = 1$ є $\left(\frac{1}{n} - 1\right) = 0$. — Щоби U було maximum або minimum, мусить бути:

$$\frac{dU}{da_0} = 0, \quad \frac{dU}{d\beta_2} = 0, \quad \frac{dU}{d\beta_n} = 0 \quad n > 2 \qquad 29).$$

З $\frac{dU}{d\beta_n} = 0$ вийде $\beta_3 = \beta_4 = \cdots = 0$, а з $\frac{dU}{d\beta_2} = 0$ дістанемо:

$$\beta_2 = \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{\pi f \rho} \qquad 31).$$

З $\frac{dU}{da_0} = 0$ випаде:

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} + \frac{\partial U}{\partial l} \frac{dl}{da_0} = 0$$

або після 27):

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} - \frac{2l}{a_0} \frac{\partial U}{\partial l} = 0 \qquad 32).$$

З рівнаня 28) випаде:

$$\frac{1}{\pi f \rho M} \frac{\partial U}{\partial l} = \frac{a_0{}^2}{l} + \frac{\omega^2 l}{\pi f \rho}$$

$$\frac{1}{\pi f \rho M} \frac{\partial U}{\partial a_0} = a_0 \left(\frac{1}{2} + 2\log \frac{8l}{a_0} - \beta_2^2\right) - a_0 + \frac{\omega^2 a_0}{\pi f \rho} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} \beta_2\right).$$

В виду сего рівнане 32) перейде (з пропущенем ω^4) на:

$$-\frac{5}{2} + 2\log \frac{8l}{a_0} - \frac{2\omega^2 l^2}{\pi f \rho a_0{}^2} + \frac{3\omega^2}{4\pi f \rho} = 0$$

або:

$$\frac{\omega^2}{\pi f \rho} = \left(\frac{a_0}{l}\right)^2 \left(\log \frac{8l}{a_0} - \frac{5}{4}\right) \qquad 33).$$

При помочи сего рівнаня можна ся пересьвідчити, що U випаде maximum, значить ся рівновага буде тревала. Но тямити треба, що ми приняли перстень оборотовий і не сплощений; тревалість розслідили ми проте лиш для таких змін, **які фіґури оборотової не зміняють; найменьша зміна мусїлаб рівновагу знищити.**

4. Poincaré подає далї ось-які вислїди[1]) своїх теоретичних розслїдів. Елїпсоїди не є виключно фіґурами рівноваги, які приймає теч остаюча в повисшім руху оборотовім. Істнує противно безконечно много ріжних фіґур рівноваги, а всї они є симетричні з огляду на площу прямовісну до оси ротациї. Всї ті фіґури мають певну скількість площий симетриї (що найменьше одну), які переходять

---

[1]) Пор. Acta math. VII. ст. 378 sqts.

через вісь, а між ними є кілька площий обороту (революциї). Но між усїми тими фіґурами є лиш одна фіґура т р е в а л а; має она дві площи симетриї. Мет (проєкцию) сеї поверхнї на одну з площий симетриї і мет елїпсоїди, з якої поверхня ся повстала, представляє фіґ. VII. Елїпсоїда назначена точками, контури мету згаданої поверхнї і перекрою обох представляє лїнїя тягла. Тїнь представляє ту часть поверхнї, яку видко на поперек елїпсоїди.

Елїпсоїди оборотові є т р е в а л і, наколи їх сплощенє є меньше, як сплощенє еліпсоїди Jacobi, а еліпсоїди Jacobi є т р е в а л і тодї, наколи є мало видовжені; в тім случаю рівновага остає, хотя би теч була клейка.

Подумаймо тепер масу плинну однородну, що відбуває рух оборотовий і помалу стягає ся, но не тратить однородности. Наколи маса та остигає дуже помалу, а тертє в внутрі єї є досить велике, тодї рух оборотовий остає в усїх частях маси. В сих умовах теч стремить до принятя сталої фіґури рівноваги, а момент гону (mv) остає const.

З початку, коли ґустота є невелика, маса приймає вид елїпсоди оборотової, що не много ріжнить ся від кулї. Наслідком руху оборотового наступає сплощенє, а коли оно дійде до $\frac{2}{5}$, елїпсоїда оборотова стаєсь елїпсоїдою Jacobi. Через дальше остиганє маса перестає бути елїпсоїдальною, стаєсь асиметричною зглядом площи yz і приймає вид представлений на фіґ. VII. Елїпсоїда здаєсь легко вгнута в середній своїй части, но більше близько одного з вершків оси більшої; найбільша часть материї стремить знову до того, щоби приняти вид кулї, а мала часть відлучає ся при однім з вершків оси більшої від еліпсоїди, мовби хотїла відірвати ся від маси головної. Наколи маса стигне еще далї і далї, то імовірно маса стаєсь щораз більше і більше вгнута в серединї, звужає ся і розпадає ся на два тїла.

Тернопіль в січню 1901.