ПРО СИМЕТРИЧНІ ВИРАЖЕНЯ З ВАРТОСТИЙ ФУНКЦИЇ mod-m.

Написав

Володимир Левицкий.

Розважане функциї симетричної

$$f(x) + f(x\varepsilon_1) + f(x\varepsilon_2) + \cdots + f(x\varepsilon_{m-1}),$$

де $f(x)$ представляє функцию аналітичну о елементї $\mathfrak{P}(x)$, збіжнім в колї $|x| < R$, а x, $x\varepsilon_1$, $x\varepsilon_2$, $x\varepsilon_{m-1}$ вартости арґументу x в вершках правильного m-кутника, при чім 1, ε_1, $\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{m-1}$ суть коренями зрівнаня

$$z^m - 1 = 0,$$

довело до уваги гідних реляций межи тою функциєю симетричною, а теориєю полишок (residuum) Cauchy'го. Реляциї ті, так для функций рациональних, як і аналїтичних, при довільнім m подав проф. Др Пузина.*)

Представимо річ повисшу загальнїйше, розважаючи наперед функцию симетричну

$$\Sigma\, f(x\varepsilon_\lambda)\, f(x\varepsilon_\mu),$$

де $f(x)$ представляє функцию рациональну або аналїтичну

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^{q} a_\lambda x^\lambda \quad q \leqq \infty,$$

а опісля розберем загальну функцию симетричну

$$\Sigma\, f(x\varepsilon_{\lambda_1})\, f(x\varepsilon_{\lambda_2}) \cdots f(x\varepsilon_{\lambda_\nu}), \quad \nu \leqq m,$$

і то передовсім в случаю, коли $f(x)$ єсть функция цілковита рациональна.

---

*) Rozprawy Wydz. mat.-przyr. Akademii Umiej. w Krakowie, том XXVI. стор. 311 et sqls.

1. Коли будем розважати функцию f (x) **рациональну цілковиту** степени n, то сума

$$
\begin{aligned}
& f(x\varepsilon_0)\Big[f(x\varepsilon_1)+f(x\varepsilon_2)+\cdots+f(x\varepsilon_{m-1})\Big]+\\
&+f(x\varepsilon_1)\Big[f(x\varepsilon_0)+f(x\varepsilon_2)+\cdots+f(x\varepsilon_{m-1})\Big]+\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\
&+f(x\varepsilon_{m-1})\Big[f(x\varepsilon_0)+f(x\varepsilon_1)+\cdots+f(x\varepsilon_{m-2})\Big]=2.\sum_{\substack{\lambda=0,1,2,\dots m-1\\ \mu=0,1,2,\dots m-1}}^{\lambda<\mu} f(x\varepsilon_\lambda)f(x\varepsilon_\mu)\\
&(\varepsilon_0=1)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

При $m > n$ заходить, як звістно, реляция*)

$$f(x\varepsilon_0)+f(x\varepsilon_1)+\cdots+f(x\varepsilon_{m-1})=m\,a_0 \tag{2}$$

або

$$f(x\varepsilon_0)+f(x\varepsilon_1)+\cdots+f(x\varepsilon_{\lambda-1})+f(x\varepsilon_{\lambda+1})+\cdots+f(x\varepsilon_{m-1})=m\,a_0\ \ f(x\varepsilon_\lambda).$$

Увзгляднюючи ту реляцию в вираженю (1), одержимо:

$$
\begin{aligned}
2\sum f(x\varepsilon_\lambda)\,f(x\varepsilon_\mu) &= m^2 a_0^2-\Big[f(x\varepsilon_0)^2+f(x\varepsilon_1)^2+\cdots+\\
&\qquad +f(x\varepsilon_{m-1})^2\Big]=\\
&= m^2a_0^2-\sum_{\alpha=1,0,2,\dots} a_\alpha^2\,x^{2\alpha}\Big[\varepsilon_0^{2\alpha}+\varepsilon_1^{2\alpha}+\cdots+\varepsilon_{m-1}^{2\alpha}\Big]-\\
&\quad-\sum_{\substack{\alpha=0,1,2,\dots\\ \beta=0,1,2,\dots}}^{\alpha<\beta} 2\,a_\alpha a_\beta\,x^{\alpha+\beta}\Big[\varepsilon_0^{\alpha+\beta}+\varepsilon_1^{\alpha+\beta}+\cdots+\varepsilon_{m-1}^{\alpha+\beta}\Big]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Корені ε_s мають свійство, що коли

$$2\alpha\equiv 0\ (\text{mod. } m),\ \alpha+\beta\equiv 0\ (\text{mod. } m),$$

то

$$\sum_{\lambda=0}^{m-1}\varepsilon_\lambda^{2\alpha}=m,\qquad \sum_{\lambda=0}^{m-1}\varepsilon_\lambda^{\alpha+\beta}=m,$$

в кождім же иньшім случаю суть ті суми $=0$.

---

*) Loc: cit: стор. 323.

Зі взгляду на ту увагу формула (3) для *m* парнистого представить ся, як слідує

$$2\,\Sigma\, f(x\,\varepsilon_\lambda)\, f(x\,\varepsilon_\mu) = m^2 a_0^2 - m\, a_0^2 - a_m^2\, m\, x^{2m} -$$

$$- a^2_{2m}\, m\, x^{4m} - a_{3m}^2\, m\, x^{6m} - \cdots\cdots - a^2_{\frac{m}{2}}\, m\, x^m - a^2_{\frac{3m}{2}}\, m\, x^{3m} - \cdots$$

$$- \sum_{\alpha < km - \alpha} 2\, a_\alpha\, a_{km-\alpha}\, m\, x^{km}$$

Утворім тепер вираженє

$$\frac{\Sigma\, f(x\,\varepsilon_\lambda)\, f(x\,\varepsilon_\mu)}{\binom{m}{2}} = H_2\,(x,\,m),$$

то очевидно, що для паристого *m*

$$H_2(x,m) = a_0^2 - \frac{x^m}{m-1}\left[a_0\, a_m + a_1\, a_{m-1} + \cdots + a_{\frac{m}{2}-1}\, a_{\frac{m}{2}+1} + a^2_{\frac{m}{2}}\right] -$$

$$(a) \qquad - \frac{x^m}{m-1}\left[a_0\, a_{2m} + a_1\, a_{2m-1} + \cdots + a_{m-1}\, a_{m+1} + a_m^2\right] -$$

$$- \frac{x^{3m}}{m-1}\left[a_0\, a_{3m} + a_1\, a_{3m-1} + \cdots + a_{\frac{3m}{2}-1}\, a_{\frac{3m}{2}+1} + a^2_{\frac{3m}{2}}\right] - \cdots\cdots$$

Анальоґічно для непаристого *m*:[1])

$$H_2(x,m) = a_0^2 - \frac{x^m}{m-1}\left[a_0\, a_m + a_1\, a_{m-1} + \cdots + a_{\frac{m-1}{2}}\, a_{\frac{m+1}{2}}\right] -$$

$$(b) \qquad - \frac{x^m}{m-1}\left[a_0\, a_{2m} + a_1\, a_{2m-1} + \cdots + a_m^2\right] -$$

$$- \frac{x^{3m}}{m-1}\left[a_0\, a_{3m} + a_1\, a_{3m-1} + \cdots + a_{\frac{3m-1}{2}}\, a_{\frac{3m+1}{2}}\right] - \cdots\cdots$$

Як довго

$$m > n > E\left(\frac{m}{2}\right),$$

[де послідний символ Legendre'а означає найбільше число ціле, містяче ся в $\frac{m}{2}$, або менше від $\frac{m}{2}$, коли $\frac{m}{2}$ єсть ціле], так довго:

---

[1]) Для непаристого *m* відпадуть $a_{\frac{m}{2}}$, $a_{\frac{3m}{2}}$, $a_{\frac{5m}{2}}$,

$a_m = a_{2m} = \cdots = a_{m+1} = \cdots = 0$, а $a_{\frac{m}{2}} \gtrless 0$, або: $a_{\frac{m-1}{2}}, a_{\frac{m+1}{2}}$ суть $\gtrless 0$, і тогдї вираженя $H_2(x, m)$ містять в собі степені арґументу x. Коли однак вирисуємо на площі правильний *m*-кутник такий, що

$$n < E\left(\frac{m}{2}\right), \text{ або що } m > 2n,$$

то тогдї так в *(a)*, як і в *(b)* позістане вираз вільний т. є.

$$H_2(x, m)_{m > 2n} = a_0^2 \qquad (4)$$

В случаю граничнім, коли

$$n = \frac{m}{2}, \text{ отже } m \text{ есть паристе, маємо:}$$

$$H_2(x, m) = a_0^2 - \frac{1}{m-1}\, a^2_{\frac{m}{2}}\, x^m \qquad \text{або:}$$

$$H_2(x, 2n) = a_0^2 - \frac{1}{2n-1}\, a_n^2\, x^{2n}$$

Вираженє $H_2(x, m)_{m > 2n} = a_0^2$
остає ся очевидно і тогдї, коли:

$$\lim m = \infty,$$

т. є. коли правильний *m*-кутник переходить в коло о средоточцї $x = o$.

Случай $\lim m = \infty$ стоїть в тїсній звязи з теориєю полишок Cauchy'го.

Очевидно, що

$$\lim_{m=\infty} H_2(x, m) = \frac{1}{2} \lim_{m=\infty} \frac{\Sigma\, f(x\,\varepsilon_\lambda)\; f(x\,\varepsilon_\mu)}{\binom{m}{2}},$$

де чинник $\frac{1}{2}$ по правій сторонї бере ся звідси, що переходячи до $m = \infty$, беремо в сумі по правій сторонї і додатник $f(x\,\varepsilon_\lambda)\, f(x\,\varepsilon_\mu)$ і $f(x\,\varepsilon_\mu)\, f(x\,\varepsilon_\lambda)$
А позаяк:

$$2\binom{m}{2}_{m=\infty} = m^2{}_{m=\infty}, \qquad \text{то:}$$

$$\lim_{m=\infty} H_2(x, m) = \lim_{m=\infty} \frac{\Sigma\, f(x\,\varepsilon_\lambda)\; f(x\,\varepsilon_\mu)}{m^2} \qquad (5)$$

Положім

$$x\,\varepsilon_\lambda = re^{\varphi i} \qquad x\,\varepsilon_\mu = re^{\psi i}$$

і помножім в (5) по правій стороні чисельник і знаменник через добуток $i\,d\varphi . i\,d\psi$, то тогді буде:

$$\lim_{m=\infty} H_2\,(x, m) = \lim_{m=\infty} \frac{\Sigma\, f\,(r\, e^{\varphi i})\;\; f\,(r\, e^{\psi i})\; i\, d\,\varphi\; i\, d\,\psi}{m\, d\,\varphi\, i\;\; m\, d\psi\, i}$$

Але

$$\Big[m\;d\quad\Big]_{m=\infty} = \Big[m\;d\;\psi\Big]_{m=\infty} = 2\,\pi, \quad \text{отже}$$

$$\lim_{m=\infty} H_2\,(x, m) = \left(\frac{1}{2\,\pi\,i}\right)^2 \int_0^{2\pi}\!\!\int^{2\pi} f\,(r\,e^{\varphi i})\; f\,(r\,e^{\psi i})\; i\;d\,\varphi.\; i\;d\,\psi =$$

$$= \left(\frac{1}{2\,\pi\,i}\right)^2 \int_0^{2\pi} f\,(r\;\;e^{\varphi i})\;\;i\;\;d\;\varphi \int_0^{2\pi} f\,(r\;\;e^{\psi i})\;\;i\;\;d\;\psi$$

З огляду однак на се, що

$$i\;d\;\psi = i\;d\;\varphi = \frac{d\,x}{x},$$

і що

$$\int_{(r)} \frac{f\;(x\;\varepsilon_\lambda)}{x}\;d\,x = \int_{(r)} \frac{f\;(x\;\varepsilon_\mu)}{x}\;d\,x = \int_{(r)} \frac{f\;(x)}{x}\;d\,x,$$

одержимо:

$$\lim_{m=\infty} H_2\,(x, m) = \left[\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{(r)} \frac{f\;(x)}{x}\;d\,x\;\right]^2 = \left[\sum_{(r)}\;\mathrm{Res}\;\frac{f\;(x)}{x}\right]^2$$

А позаяк

$$\lim_{m=\infty} H_2\;(x,\;m) = H_2\;(x,\;m)_{m>2n}$$

проте маєм твердженє:

Вираженє H_2 (x, m), котре єсть середною вартостию з добутків (амб) вартостий одної і тої самої цілковитої рациональної функциї f(x) в вершках правильного m-кутника, представляє при $m > 2n$ квадрат суми полишок (ресідуів) функциї $\frac{f(x)}{x}$ при довільнім m.

2. Перейдім тепер до функциї аналїтичної $f(x)$, котрої елемент $\mathfrak{P}(x)$ має обсяг збіжности $|x| = R$.

Очевидно що і ту

$$(c) \qquad H_2(x, m) = \frac{\Sigma\, \mathfrak{P}(x\,\varepsilon_\lambda)\ \mathfrak{P}(x\,\varepsilon_\mu)}{\binom{m}{2}} =$$

$$a_0^2 + \frac{1}{m-1}\left[c_m x^m + c_{2m} x^{2m} + \qquad\right],$$

позаяк вираженє $H_2(x, m)$, яко функция симетрична елементів $x\,\varepsilon_\lambda$ і $x\,\varepsilon_\mu$, може містити в собі тільки такі степені арґументу x, котрих виложники конґруують з $0 \pmod{m}$. Щоби послїдне вираженє розслїдити на цїлій площі, а особливо в тім случаю, коли $m = \infty$, мусимо вираженю тому надати иньший вид. Бо очевидно, що $H_2(x, m)$ має на обводї кола (R) певне число точок особливих, котре залежить від m. Хотячи розслїдити, як заховує ся то вираженє по-за колом, мусимо $H_2(x, m)$ випровадити по за обсяг (R). Коли однак m росте без кінця, росте і число особливих точок на обводї кола, а коли в кінци m-кутник перейде в коло, т. є. при

$$\lim m = \infty$$

покриває ся коло (R) всюди-густою (überall-dicht) многостию особливих точок і в загальнім случаю по-за коло (R) вийти не можна.

Положім проте, закладаючи єще m скінченим,

$$\frac{\Sigma\, \mathfrak{P}(x\,\varepsilon_\lambda)\ \mathfrak{P}(x\,\varepsilon_\mu)}{\binom{m}{2}} = a_0^2 + \frac{1}{m-1}\,\varphi(x, m), \tag{6}$$

то добираючи таке μ, що від $m = \mu$ почавши маємо все реляцию (6), можемо положити

$$\lim_{m=\infty} \frac{\Sigma\, \mathfrak{P}(x\,\varepsilon_\lambda)\ \mathfrak{P}(x\,\varepsilon_\mu)}{\binom{m}{2}} = a_0^2 + \lim_{m=\infty} \frac{1}{m-1}\,\varphi(x, m) =$$

$$= a_0^2 + \frac{1}{\mu\quad 1}\,\varphi(x, \mu - 1) + \left[\frac{1}{\mu}\,\varphi(x, \mu) \qquad \frac{1}{\mu-1}\,\varphi(x, \mu-1)\right] +$$

$$+\left[\frac{1}{\mu+1} \quad (x, \mu + 1) - \frac{1}{\mu} \quad (x, \mu)\right] + \quad =$$

$$= a_0^2 + \frac{1}{\mu - 1} \varphi (x, \mu - 1) + \sum_{\lambda = \mu}^{\infty} \Phi (x, \lambda) = A (x),$$

де

$$\Phi (x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \varphi (x, \lambda) = \frac{1}{\lambda - 1} \varphi (x, \lambda - 1).$$

Вартости такого аналїтичного вираженя $A(x)$ представляють при взрастаючім x по порядку вартости вираженя $H_2 (x, m)_{m = \infty}$.

Опираючи ся на рахунку інтеґральнім бачимо, що і ту, як для функций рациональних, буде:

$$\lim_{m = \infty} H_2 \quad (x, m) = \left[\frac{1}{\pi 2 i} \int_{(\rho)} \frac{f (x)}{x} \, d \, x\right]^2 = \left[\sum_{(\rho)} \mathrm{Res} \frac{f (x)}{x}\right]^2$$

Бачимо проте, що вартости вираженя аналїтичного $A(x)$ представляють нам по порядку зміни вартости квадрату інтеґралу

$\frac{1}{2 \pi i} \int \frac{f (x)}{x} \, d \, x$, браного по колах концентричних з обсягом збіжности.

Як довго остаємось в колї (R), так довго

$A (x) = a_0^2$;

по-за (R) вартість та улягає зміні. На колах, концентричних з (R), содержачих особливі точки аналїтичної функциї $f (x)$, вираженє $A (x)$ єсть без значеня.

Звідси слїдує:

На підставі симетричної функциї (*c*) можна все утворити вираженє аналїтичне, котре заховує ся так, що для всяких $| x | = r$ має вартість $= \left[\sum_{(r)} \mathrm{Res} \frac{f (x)}{x}\right]^2$ даної вперед функциї аналїтичної $f (x)$. [1])

Єсли суть такі x, що при $| x | > r$ показує ся постійно:

$A (x) = \mathrm{Const},$

---

[1]) J. Tannery перший дав примір твореня анальоґічних виражень. Глянь н. пр. Weierstrass, Abhandlungen aus der Functionenlehre стор. 102 et sqts. Також J. Puzyna Über eine methodische Bildung der analyt. Ausdrücke (Monatshefte für Math. und Physik Wien, том V. ст. 67 et sqts).

то тогдї в колї (r) містять ся вже всї особливі точки функциї аналїтичної f (x), а по-за (r) для скінчених x не знайдемо ані одної такої точки.

3. Возьмім н. пр. ряд степенний

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + x + x^2 + \cdots\cdots = \frac{1}{1-x}$$

збіжний в колї $|x| = 1$.

Легко пересьвідчити ся, що

$$H_2(x, m) = 1 - \frac{1}{m-1}\Big\{\Big[2m \quad 1 - (m-1)\Big]x^{2m} +$$

$$\Big[3m - 1 - (m-1)\Big]x^3 + \quad \Big\} =$$

$$= 1 - \frac{m\ x^{2m}}{m-1}\Big\{1 + 2x^m + 3x^{2m} + \qquad\Big\}$$

Щоби той ряд зсумовати, положім

$$x^m = \zeta;$$

тогдї $u = 1 + 2\zeta + 3\zeta^2 + 4\zeta^3 + \cdots\cdots$

З'інтеґруймо той ряд, то дістанемо:

$$v = \int_0^\zeta u\ d\zeta = \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \cdots\cdots = \zeta\ \frac{1}{1-\zeta},$$

отже

$$u = \frac{dv}{d\zeta} = \frac{1}{(1-\zeta)^2} = \frac{1}{(1-x^m)^2}$$

Тепер:

$$H_2(x, m) = 1 - \frac{m\ x^{2m}}{m-1}\ \frac{1}{(1-x^m)^2}$$

$$= 1 - \frac{mx^{2m}}{(m-1)\,x^{2m}}\ \frac{1}{\left(\frac{1}{x^m} - 1\right)^2} =$$

$$= 1 - \frac{m}{m-1}\ \frac{1}{\left(\frac{1}{x^m} - 1\right)^2}$$

Положім:

$$H_2(x, m) = 1 + \frac{1}{m-1}\ \varphi(x, m),$$

то $\varphi(x, m) = -m \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x^m} - 1\right)^2}$

Легко пересьвідчити ся, що:

$$\frac{1}{m}\varphi(x, m+1) - \frac{1}{m-1}\varphi(x, m) =$$

$$\frac{m^2(1 - x^{m+1})^2 - (m^2 - 1)(1 - x^m)^2}{(1 - x^m)^2 (1 \quad x^{m+1})^2} \quad \frac{x^{2m}}{m(m-1)}$$

Коли положимо $\mu = 2$,
то дістанем виражепє

$$A(x) = 1 - \frac{2x^4}{(1 - x^2)^2} + \frac{x^4}{2}\,\frac{4(1 - x^3)^2 - 3(1 - x^2)^2}{(1 - x^2)^2 (1 - x^3)^2} +$$

$$+ \frac{x^6}{2.3}\,\frac{9(1 - x^4)^2 - 8(1 - x^3)^2}{(1 - x^3)^2 (1 - x^4)^2} +$$

Позаяк

$$A(x) = \lim_{m=\infty} H_2(x, m) = 1 - \frac{m}{m-1}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{x^m} - 1\right)}\Bigg\}_{m=\infty} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{x^m} - 1\right)^2}\Bigg\}_{m=\infty}$$

то для $|x| < 1$ $\quad A(x) = 1$,
для $|x| > 1$ $\quad A(x) = 0$ аж до безконечности.

4. Приступім тепер до розважаня функциї симетричної

$$\Sigma f(x\,\varepsilon_{\lambda_1})\, f(x\,\varepsilon_{\lambda_2}) \quad f(x\,\varepsilon_{\lambda_\nu}) \qquad \nu > 2,$$

$$\lambda_1 \gtrless \lambda_2 \gtrless \cdots \gtrless \lambda_\nu$$

де $f(x)$ єсть функция раціональна або аналітична.

Позаяк послідна сума єсть функциєю симетричною всіх коренїв $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_{m-1}$, проте анальоґічно і тут мусить бути:

$$\Sigma\ f\ (x\ \varepsilon_{\lambda_1})\ f\ (x\ \varepsilon_{\lambda_2}) \cdots f\ (x\ \varepsilon_{\lambda_\nu}) = c_0 + c_m\, x^m + c_{2m}\, x^{2m} +$$

де
$$c_0 = \binom{m}{\ } a_0^{\nu}$$

Очевидно, що коли ту утворимо виражене

$$H_\nu\ (x,\ m) = \frac{\Sigma\ f\ (x\ \varepsilon_{\lambda_1}) \quad f\ (x\ \varepsilon_{\lambda_\nu})}{\binom{m}{\nu}}$$

то

$$\lim_{m=\infty} H_\nu\ (x,\ m) = \left[\sum_{(\varrho)} \mathrm{Res}\ \frac{f\ (x)}{x}\right]^\nu = \mathfrak{A}\ (x) = A\ (x)^{\nu}$$

Перейдім до цілковитої рациональної функциї f (x) степени *n*.

Коли $n < m$, то після (2)

$$H_1\ (x,\ m) = a_0^{1},$$

де

$$H_1\ (x,\ m) = \frac{f\ (x\ \varepsilon_0) + f\ (x\ \varepsilon_1) + \cdots + f\ (x\ \varepsilon_{m-1})}{m}$$

Після (4), коли $m > 2n$, маємо:

$$H_2\ (x,\ m) = a_0^{2},$$

Заходить питане, в якім відношеню мусять позіставати *n* і *m* при данім *n*, щоби було:

$$H_\nu\ (x,\ m) = a_0^{\nu}$$

В розвиненю

$$\Sigma\ f\ (x\ \varepsilon_{\lambda_1})\ f\ (x\ \varepsilon_{\lambda_2}) \quad f\ (x\ \varepsilon_{\lambda_\nu}) = c_0 + c_m\, x^m + c_{2m}\, x^{2m} +$$

єсть
$$c_{km} = \Sigma\ L\ a_{\beta_1}\ a_{\beta_2} \cdots a_{\beta_\nu},$$

де всї добутки тої суми відносять ся до рівних і ріжних $\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_\nu$ таких, що їх сума

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu = km,$$

L суть якісь незмінні числа.

Возьмім c_m, то в c_m

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu = m;$$

в c_m найдемо певне число додатників таких, що коли в них по порядку будемо переходили β_1 β_ν і виймемо який-небудь значок то в иньших додатках найдемо все значок більший від

Най іменно *t* буде найменшим додатним останком квота $\frac{m}{\nu}$, а — найменшим від'ємним останком того квота, і зауважаймо s сочинників $a_{\frac{m+t}{\nu}}$, а $(\nu-s)$ сочинників $a_{\frac{m+\tau}{\nu}}$, то в додатнику $L\left(a_{\frac{m+t}{\nu}}\right)^s\left(a_{\frac{m+\tau}{\nu}}\right)^{\nu-s}$

має бути
$$s\,\frac{m+t}{\nu}+(\nu-s)\,\frac{m-\tau}{\nu}=m,$$
або
$$s\,\frac{t+\tau}{\nu}-\tau=0.$$

Позаяк але $t+\tau=\nu$, то
$$s=\tau.$$

Звідси слідує, що додатник
$$(\alpha) \qquad L\left(a_{\frac{m+t}{\nu}}\right)^s\left(a_{\frac{m-\tau}{\nu}}\right)^{\nu-s}$$
буде такий, що значки єго чинників лежать найблизше дроба $\frac{m}{\nu}$; а позаяк значки ті суть цілі, проте суть они рівні цілим числам $E\left(\frac{m}{\nu}\right)$ або $E\left(\frac{m}{\nu}\right)+1$. В иньших додатниках, котрі не мають виду (α), мусить бути що найменше оден значок $\beta_\varkappa$ більший, бо инакше не сповнило би ся услівє
$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu=m.$$

Вистарчить проте вибрати таке m, щоби
$$n \angle E\left(\frac{m}{\nu}\right) \qquad \left(\text{коли } \frac{m}{\nu} \text{ єсть цілим числом, то } n=\frac{m}{\nu}-1\right)$$
але вже $n>\frac{m}{n+1}$,

а тогді буде $c_m=c_{2m}= \quad =0$, т. є.:
$$H_\nu(x, m)=a_0{}^\nu \quad \text{для } n<E\left(\frac{m}{\nu}\right).$$

Звідси слідує:

Реляция (7) має місце тогдї, коли

$$\frac{m}{\nu+1} < n < \frac{m}{\nu}.$$

Поспитаймо тепер, яке має бути n, щоби при довільно вибранім $m > n$ вираженя $H_1(x, m)$, $H_2(x, m)$, $H_m(x, m)$ були як найдовше постійними, так що

$$H_\nu(x, m) = a_0{}^\nu$$

Коли та постійність тих виражень має сягати аж до m, то мусить бути:

$$\left.\begin{array}{l} n < m \\ n < \frac{m}{2} \\ n < \frac{m}{3} \\ \vdots \\ n < \frac{m}{\nu} \\ \\ n < \frac{m}{m-1} \\ n < \frac{m}{m} \end{array}\right\} \quad (\beta)$$

Коли би ми перестали на передпослїднїй нерівности, то слїдовало би

$$n < \frac{m}{m-1}, \text{ або } n = 1, \text{ отже}$$

$$f(x) = ax + b,$$

а колиб ми пішли ще дальше, то мусїло би бути

$$n < 1, \text{ або } n = 0, \text{ отже}$$

$$f(x) = \text{Const.}$$

З того слїдує: З виражень H_1, H_2, ⋯ H_m найбільше, бо ажь до $H_{m-1}(x, m)$ має постійну вартість, наколи $f(x)$ есть функциею першої степени.

5. Єсли $\frac{m}{\nu+1} < n < \frac{m}{\nu}$, то маємо такий ряд функций симетричних,

$$\sum_{\lambda=0}^{m-1} f(x\,\varepsilon_\lambda) = ma_0 = h_1\,(x, m)$$

$$\Sigma\, f(x\,\varepsilon_{\lambda_1})\, f(x\,\varepsilon_{\lambda_2}) = \binom{m}{2}\, a_0^2 = h_2\,(x, m)$$

$$\Sigma\, f(x\,\varepsilon_{\lambda_1})\, f(x\,\varepsilon_{\lambda_2})\, f(x\,\varepsilon_{\lambda_3}) = \binom{m}{3}\, a_0^3 = h_3\,(x, m)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\Sigma\, f(x\,\varepsilon_{\lambda_1})\, f(x\,\varepsilon_{\lambda_2}) \cdots f(x\,\varepsilon_{\lambda_\nu}) = \binom{m}{\nu}\, a_0^\nu = h_\nu\,(x, m)$$

але

$$\Sigma\, f(x\,\varepsilon_{\lambda_1})\, f(x\,\varepsilon_{\lambda_2}) \quad f(x\,\varepsilon_{\lambda_{\nu+1}}) =$$

$$= \binom{m}{\nu+1}\, a_0^{\nu+1} + \gamma_{\nu+1,\,m}\, x^m + \gamma_{\nu+1,\,2m}\, x^{2m} + \quad = h_{\nu+1}\,(x, m)$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$f(x\,\varepsilon_{\lambda_1})\, f(x\,\varepsilon_{\lambda_2}) \quad f(x\,\varepsilon_{\lambda_m}) =$$

$$= a_0^m + \gamma_{mm}\, x^m + \gamma_{m,\,2m}\, x^{2m} + \quad = h_m\,(x, m).$$

Утворім зрівнанє

$$u^m - h_1\, u^{m-1} + h_2\, u^{m-2} - \qquad \pm h_m = 0 \qquad \text{або}$$

$$u^m \quad ma_0\, u^{m-1} + \binom{m}{2}\, a_0^2\, u^{m-2} - \qquad \pm \binom{m}{\nu}\, a_0^\nu\, u^{m-\nu} \mp$$

$$\mp \left[\binom{m}{\nu+1}\, a_0^{\nu+1} + \gamma_{\nu+1,\,m}\, x^m + \quad\right] u^{m-(\nu+1)} \pm \quad \pm$$

$$\pm \left[a_0^m + \gamma_{mm}\, x^m + \quad\right] = 0,$$

то кореннями сего зрівнаня суть власне вартости функциї $f(x)$ в вершках правильного m-кутника, або

$$u_s = f(x\,\varepsilon_s).$$

Послїдне зрівнане можна написати в видї

$$(u-a_0)^m - \Big[u^{m-(\nu+1)} G_{\nu+1}(x) + u^{m-(\nu+2)} G_{\nu+2}(x) + \cdots + G_m(x)\Big] = 0,$$

де

$$\pm G_{\nu+\lambda}(x) = \gamma_{\nu+\lambda, m} x^m + \gamma_{\nu+\lambda, 2m} x^{2m} + \cdots$$

Отже

$$(u-a_0)^m = u^{m-(\nu+1)} G_{\nu+1}(x) + u^{m-(\nu+2)} G_{\nu+2}(x) + \cdots + G_m(x) \qquad (8)$$

Така заходить звязь межи функциями $G_{\nu+1}, G_{\nu+2}, \ldots G_m$, котрі виступають в функциях симетричних від $(\nu+1)$-ої почавши.

Зрівнане (8) може нам послужити до визначеня функций $G_{\nu+1}, G_{\nu+2}, \ldots G_m$, а тим самим і функций симетричних $H_{\nu+1}(x, m), H_{\nu+2}(x, m), \ldots H_m(x, m)$ в случаю, коли $H_s(x, m) = a_0^s$ для $s = 1, 2 \cdots \nu$. Наколи в зрівнане (8) будемо класти за x $x\varepsilon_\alpha$ $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots m-1)$, то функциї $G_{\nu+1}, \ldots G_m$ не підпадуть зміні а u перейде на u_α $(\alpha = 0, \ldots m-1)$ т. є. на $f(x\varepsilon_\alpha)$.

Коли з-посеред тих m вартостий виберемо $m-(\nu+1)$ вартостий: $f(x\varepsilon_{\alpha_1}) = u_1$, $f(x\varepsilon_{\alpha_2}) = u_2, \ldots f(x\varepsilon_{\alpha_{m-(\nu+1)}}) = u_{m-(\nu+1)}$ і заложимо, що $f(x\varepsilon_{\alpha_s}) \gtrless f(x\varepsilon_{\alpha_t})$, коли $s \lessgtr t$, то наколи положимо для скороченя $m-(\nu+1) = \mu$, дістанемо μ таких реляций:

$$\begin{aligned}
& u_1^{\mu} G_{\nu+1}(x) + u_1^{\mu-1} G_{\nu+2}(x) + \cdots + u_1 G_{m-1}(x) + \\
& \qquad + G_m(x) = (u_1 - a_0)^m \\
(9). \quad & u_2^{\mu} G_{\nu+1}(x) + u_2^{\mu-1} G_{\nu+2}(x) + \cdots + u_2 G_{m-1}(x) + \\
& \qquad + G_m(x) = (u_2 - a_0)^m \\
& - - - - - - - - - - - - - \\
& u_\mu^{\mu} G_{\nu+1}(x) + u_\mu^{\mu-1} G_{\nu+2}(x) + \cdots + u_\mu G_{m-1}(x) + \\
& \qquad + G_m(x) = (u_\mu - a_0)^m
\end{aligned}$$

Позаяк детермінанта тих зрівнань есть:

$$U = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \cdots\cdots u_1^{\mu} \\ 1 & u_2 & u_2^2 \cdots\cdots u_2^{\mu} \\ & & \\ 1 & u_{\mu} & u_{\mu}^2 \quad\quad u_{\mu}^{\mu} \end{vmatrix} = \Pi\,(u_{\varsigma} - u_{\iota}) \gtrless 0,$$

проте можна з зрівнань (9) обчислити функції $G_{\nu+1},\ G_{\nu+2},\ G_m$

Цілий отже проблєм твореня функций симетричних з даної à priori функциї цілої раціональної сходить до розвязаня системи зрівнань (9), лїнеарних що до $G_{\nu+1}\ G_{\nu+2}\ \ G_m$. Цікава при тім есть та обставина, що симетричні функциї $H_{\nu+1},\ H_{\nu+2},\ \ H_m$, котрі залежать від m вартостий $f(x),\ f(x\varepsilon_1),\ \ f(x\varepsilon_{m-1})$, можна обчислити тільно з $m-(\nu+1)$ яких-небудь тих вартостий.

Звернім при тім ще увагу на одну річ:
Наколи

$$\begin{aligned} G_{\nu+1} &= S_{\nu+1}\,(u_1\,u_2\quad u_{\mu}) \\ G_{\nu+2} &= S_{\nu+2}\,(u_1\,u_2\quad u_{\mu}) \\ &-\ -\ -\ -\ -\quad -\ -\ - \\ G_m &= S_m\quad (u_1\,u_2\quad u_{\mu}) \end{aligned}$$

суть розвязанями зрівнань (9), то, позаяк лїві сторони суть симетричними функциями всїх $u_0\ u_1\quad u_{m-1}$, мусять і праві сторони бути симетричними функциями вартостий: $u_1\ u_2\quad u_{\mu}$, котрі в них приходять. З відси слїдує:

$H_{\nu+1},\ H_{\nu+2},\quad H_m$ можна уважати за симетричні (але не елєментарні) функциї котрих-небудь $\left[m-(\nu+1)\right]$ вартостий $f(x\varepsilon_{\lambda})$.

Коли до зрівнань (9) долучимо ще зрівнане

$$u_{\mu+1}^{\mu}\,G_{\nu+1}\,(x) + u_{\mu+1}^{\mu-1}\,G_{\nu+2}\,(x) + \cdots\cdots + u_{\mu+1}\,G_{m-1}\,(x) +$$

$$+\ G_m\,(x) = (u_{\mu+1} - a_0)^m,$$

го дістанем:

$$
(10)\qquad \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & \cdots & u_1^\mu & (u_1 - a_0)^m \\ 1 & u_2 & u_2^2 & \cdots & u_2^\mu & (u_2 - a_0)^m \\ \\ 1 & u_{\mu+1} & u^2_{\mu+1} & & u^\mu_{\mu+1} & (u_{\mu+1} - a_0)^m \end{vmatrix} = 0
$$

Така ідентична реляция заходить межи $(\mu + \nu)$ котрими-небудь вартостями $f(x\,\varepsilon_\lambda)$ функциї $f(x)$.

Львів, в січни 1894.