З ТЕОРИЇ РЯДІВ СТЕПЕННИХ*)

НАПИСАВ

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

В сій розвідці займаю ся такими рядами степенними, для яких **цілий обвід засягу збіжности творить пантахию точок особливих** (або є **лїнїєю особливою замкненою**). Квестия того рода рядів степенних є дуже трудна; яке таке сьвітло кидають на ню роботи Pringsheim'a, Fabry та Borel'a [1]); тож в нинїшній розвідці я хочу лиш перевести доказ, що того рода ряди істнують, а опісля подати пару уваг, які можуть кинути деяке сьвітло на істоту таких функций.

В тій цїли послугуюсь способом, що творить точку вихідну теорему Mittag-Leffler'a [2]).

1. Най $f(x)$ буде аналїтичною функциєю, збіжною в колї $|x| = r$ і най єї точками особливими будуть місця a_s $(s = 1, 2, \quad \infty)$, де:

$$|a_s| = r, \quad a_s = re^{\varphi_s i} \quad (\varphi_s \text{ яке-небудь}).$$

В окруженю каждої точки a_s істнує розвинене:

$$f(x) = G_s\left(\frac{1}{x - a_s}\right) + \mathfrak{P}_s(x - a_s) \qquad 1).$$

де G_s є функция цїла рациональна або переступна, т. є.:

---

*) Розвідка ся буде поміщена в одним з дальших випусків журнала „Monatshefte fur Mathematik u. Physik" Wien.

[1]) Пор. пр. Borel: Leçons sur la théorie des fonctions; також Annales de l'Ecole normale t. 16. Ту можна також зачислити досліди Poincaré над функциями автоморфвими, які істнують лиш в колї головнім.

[2]) Пор. пр. Biermann: Theorie der analytischen Functionen ст. 344 et sqts.

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\frac{c_{s1}}{x-a_s}+\frac{c_{s2}}{(x-a_s)^2}+ \quad \left\{\begin{array}{l}\text{скінчена}\\ \text{або}\\ \text{in inf.}\end{array}\right.$$

$$=-\frac{c_{s1}}{a_s\left(1 \quad \frac{x}{a_s}\right)}+\frac{c_{s1}}{a_s^2\left(1-\frac{x}{a_s}\right)^2}- \qquad =\sum_{\mu=0}^{\infty} A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu}$$

де:

$$(-1)^{-\mu} A_{s\mu}=-\binom{-\mu-1}{0}\frac{c_{s1}}{a_s}-\binom{-\mu-1}{1}\frac{c_{s2}}{a_s^2}- \qquad 2).$$

Проте можна написати:

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\sum_{0}^{m_s} A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu}+\sum_{m_s+1}^{\infty} A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu} \qquad 3).$$

де m_s є яке-небудь число, але скінчене, додатне і ціле.

Впровадьмо тепер вираженє слїдуюче:

$$F_s(x)=\sum_{m_s+1}^{\infty} A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu} \qquad 4).$$

то єго беззглядна вартість (з узглядненем $|a_s|=r$) є:

$$\left|F_s(x)\right| \leqq \sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu}$$

Збудуймо тепер безконечну суму $\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x)$, то:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left|F_s(x)\right| \leqq \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu} \qquad 5).$$

Розслїдїм тепер сочинники $A_{s\mu}$, то на основі рівнаня 2). можна написати:

$$\left|A_{s\mu}\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{-\mu-1}{\nu-1}\left|\frac{c_{s\nu}}{r^{\nu}}\right| \qquad |a_s|=r.$$

Наколи ряд:

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\sum\frac{c_{sv}}{(x-a_s)^v}$$

яко ряд безусловно збіжний має для окруженя точки a_s вартість:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\frac{|c_{sv}|}{|x-a_s|^v}=g_s\,,\quad |x-a_s|=\zeta_s$$

то після звісного твердженя Вейерштрасса[1]):

$$\frac{|c_{sv}|}{|x-a_s|^v}\leqq g_s\,,\quad \text{або}\quad |c_{sv}|\leqq g_s\,\zeta_s^v$$

Наколи вставимо за $|c_{sv}|$ ту більшу вартість, дістанемо:

$$\left|A_{s\mu}\right|\leqq g_s\sum_{v=1}^{\infty}\binom{-\mu-1}{v-1}\left|\frac{\zeta_s}{r}\right|^v$$

або:

$$\left|A_{s\mu}\right|\leqq g_s\frac{|\zeta_s|}{r}\,\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta_s|}{r}\right)^{\mu+1}}\,.$$

Доберім ζ_s так, щоби:

$$\frac{|\zeta_s|}{r}<\beta<1\,,\quad \text{то:}$$

$$|A_{s\mu}|<g_s\,\beta\,(1-\beta)^{-\mu-1}$$

сума та є проте скінчена.

Возьмім тепер в засягу зб. $\left|\frac{x}{r}\right|=\varepsilon\leqq 1$ суму:

$$\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu},\ \text{то та сума:}$$

$$\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu}=\left|\frac{x}{r}\right|^{m_s}\sum_{v=1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{v}$$

---

[1]) Biermann loc. cit. 142.

Але:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{v}<\sum_{v=1}^{\infty} g_s\,\beta\left(1-\beta\right)^{-(m_s+v+1)}\left|\frac{x}{r}\right|^{v}=$$

$$=\frac{g_s\,\beta}{\left(1-\beta\right)^{m_s+1}}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\beta\right)^{v}}\left|\frac{x}{r}\right|^{v}$$

А що:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\beta\right)^{v}}\left|\frac{x}{r}\right|^{v}=\frac{\left|\frac{x}{r}\right|}{1-\beta}\quad\frac{1}{1-\frac{1}{1-\beta}\left|\frac{x}{r}\right|}=\frac{\varepsilon}{1-\beta-\varepsilon},$$

то:

$$\left|F_s\,(x)\right|\leqq\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu}\leqq\left|\frac{x}{r}\right|^{m_s}\frac{g_s\,\beta}{\left(1-\beta\right)^{m_s+1}}\cdot\frac{\varepsilon}{1-\beta-\varepsilon}=$$

$$=\varepsilon^{m_s+1}\,\frac{\beta g_s}{(1\quad\beta)^{m_s+1}\,(1-\beta-\varepsilon)}.$$

Через вибір достаточно великого m_s можна зробити, що:

$$\left|F_s\,(x)\right|\angle\ \varepsilon_s \text{ (довільно мале)}$$

в засягу $\left|\frac{x}{r}\right|\angle\ 1.$

А що в тім засягу є і:

$$\left|F_{s+v}\,(x)\right|\angle\ \varepsilon_{s+v}\ \ (s=1,2,3,\cdots)$$

то можна вибрати так велике ν, щоби і $\sum_{s=1}^{\infty}F_s\,(x)$ була одностайно збіжна, т. є., щоби:

$$\sum\left|F_{s+v}(x)\right|\angle\ \delta \text{ (довільно мале).}$$

Тодї $\sum\limits_{s=1}^{\infty} F_s(x)$ буде **одностайно збіжна** і дасть ся розвинути на ряд в окруженю кождої точки a_s. В такім засягу та сума яко сума безконечно много рядів дасть ся упорядкувати після степенів арґументу [1]), отже:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| F_s(x) \right| \leq \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m_s+1}^{\infty} \left| A_{s\mu} \right| \left| \frac{x}{r} \right|^{\mu} = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \left| A_{s,m_s+1} \right| \left| \frac{x}{r} \right|^{m_s+1} + \right.$$

$$\left. + \left| A_{s,m_s+2} \right| \left| \frac{x}{r} \right|^{m_s+2} + \quad \right\} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x}{r}^{m_s+1} \left\{ \left| A_{s,m_s+1} \right| + \left| A_{s,m_s+2} \right| \left| \frac{x}{r} \right| + \cdots \right\} =$$

$$= \left| \frac{x}{r} \right|^{m_s+1} \left\{ \left| A_{1,m_s+1} \right| + \left| A_{1,m_s+2} \right| \left| \frac{x}{r} \right| + \cdots + \left| A_{2,m_s+1} \right| + \left| A_{2,m_s+2} \right| \left| \frac{x}{r} \right| + \cdots \right\} =$$

$$= \left| \frac{x}{r} \right|^{m_s+1} \left[\sum_{t=1}^{\infty} \left| A_{t,m_s+1} \right| + \left| \frac{x}{r} \right| \sum_{t=1}^{\infty} \left| A_{t,m_s+2} \right| + \left| \frac{x}{r} \right|^2 \sum_{t=1}^{\infty} \left| A_{t,m_s+3} \right| + \cdots \right\}.$$

Отже можна написати:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| F_s(x) \right| \leqq \left| \frac{x}{r} \right|^{m_s+1} \left[C_1 + C_2 \left| \frac{x}{r} \right| + C_3 \left| \frac{x}{r} \right|^2 + \cdots \right] \qquad 6).$$

де кождий сочинник:

$$C_n = = \sum_t \left| A_{t,m_s+n} \right|$$

має **скінчену і означену вартість** [2]).

В засягу $|x| = r$ мусить бути:

$$f(x) - \sum_{s=1}^{\infty} F_s(x) = G(x),$$

де $G(x)$ є цїлковита переступна функция; отже:

---

[1]) Пор. Biermann loc. cit. ст. 146.

[2]) Пор. ibid. ст. 146.

$$f(x) = G(x) + \sum_{s=1}^{\infty} F_s(x) \qquad 7).$$

Можна проте всегда збудувати аналїтичну функцию, яка на цїлїм обводї засягу збіжности має самі точки особливі.

2. Що така функция має дїйсно такі власности, можна легко доказати.

Так як:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x) = h\left(\frac{x}{r}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_2\frac{x}{r} + C_3\frac{x^2}{r^2} + \quad\right];$$

де h є числом зложеним $\left(|h| \leqq 1\right)$, то:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s\left(re^{\varphi i}\right) = h\left(e^{\varphi i}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_2 e^{\varphi i} + C_3 e^{2\varphi i} + \quad\right] =$$

$$= h\left(e^{\varphi i}\right)^{m_s+1}\left[\sum_{\nu=0}^{n} C_{\nu+1} e^{\nu\varphi i} + R_n\right],$$

де перша сума є скінчена, а решта почавши від дуже далекого n:

$$R_n\, e^{n\varphi i}\left(C_{n+1} + C_{n+2}e^{\varphi i} + C_{n+3}e^{2\varphi i} + \quad\right)_{n=\infty}$$

може приняти яку-небуть вартість, бо $\left.e^{n\varphi i}\right\}_{n=\infty}$ приниmає всяку яку-небудь вартість.

Що було до доказаня. —

3. Погляньмо тепер, що дїє ся в середині кола збіжности.

Возьмім $x = r'e^{\varphi i}$ де $r' \angle r$,
то дістанемо:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s\left(r'e^{\varphi i}\right) = h\left(e^{\varphi i}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_2\frac{r'}{r}e^{\varphi i} + \cdots + C_z\left(\frac{r'}{r}\right)^{z-1} e^{z-1} \quad -\right.$$

отже-ж решта є ту:

$$R_n = \left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1} e^{(n-1)\varphi i}\left[C_n + C_{n+1}\frac{r'}{r}e^{\varphi i} + \cdots\right]_{n=\infty}$$

$$\text{Так як } \frac{r'}{r} \angle 1, \text{ то: } \lim_{n=\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1} = 0, \text{ т. є. } R_n = 0.$$

В середині кола збіжности є проте функция $f(x)$ скінчена і одновартостна.

Є ту однак виїмки. Для $n = \infty$ може $e^{(n-1)\varphi i}$ приняти всяку можливу вартість; наколи ті вартости є скінчені, то решта $R_n = 0$; є однак і безконечно великі вартости того $e^{(n-1)\varphi i}$, отже в тім случаю має решта форму $0 . \infty$, який то символ може мати якесь значінє. Наколи він має вартість скінчену, то і цїла функция є на тім місци скінчена, але не все одновартостна. Наколи символ сей має вартість безконечно велику, то і функция на тім місци стаєсь безконечно великою.

Можем проте сказати: Функция, яка має на обводї збіжности пантахию особливостий, може мати в серединї кола збіжности ту і там порозкидані особливі місця, де тратить скінченість і одновартостність.

Які се є місця і як в окруженю тих місць представляє ся функция $f(x)$, сего не можу ближше розбирати, вказую лиш на можливість, що такі місця істнують.

4. Возьмім тепер функцию $f(x)$ по за колом збіжности і розслїдім там еї поведенє.

Виберім на площи чисельній яку-небудь точку

$$x = Re^{\varphi i},$$

де $R > r$, то тодї дістанемо:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s\left(Re^{\varphi i}\right) = h\left(e^{\varphi i}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_2\frac{R}{r}e^{\varphi i} + \cdots\right]$$

при чім решта:

$$R_n = \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} e^{(n-1)\varphi i} \left[C_n + C_n \frac{R}{r} e^{\varphi i} + \quad \right]_{n=\infty}$$

Так як $\left(\frac{R}{r}\right) > 1$, то $\lim\limits_{n=\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} = \infty$, т. є. $R_n = \infty$;

по за колом збіжности функция $f(x)$ в загалї не істнує (є безконечностию).

Але і ту є виїмки. Для $n = \infty$ може $e^{(n-1)\varphi i}$ приняти всяку можливу вартість; наколи ті вартости є скінчені або безконечно великі, то решта $R_n = \infty$; наколи однак якась з тих вартостий є 0, то решта дістане форму $\infty . 0$. Наколи сей символ має вартість скінчену, то решта R_n, а проте і $f(x)$ є на тім місци скінчене.

Можна проте сказати, що функция $f(x)$ по за колом збіжности нїде не істнує кромі деяких ізольованих місць, де приймає вартість скінчену.

І ту не беру ся розслїджувати ближше тих місць, а вказую лиш на можливість їх істнованя.

5. Возьмім тепер ряд видїлений mod. m[1]) т. є.:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x, m) = h\left(\frac{x}{r}\right)^{m_s+1} \left[C_1 + C_{m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^m + C_{2m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{2m} + \cdots\right],$$

то ту решта R_n має вид:

$$R_n = C_{nm+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{nm} + C_{(n+1)m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{(n+1)m} +$$

або:

$$R_n = \left(\frac{x}{r}\right)^{nm} \left[C_{nm+1} + C_{(n+1)m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^m + \cdots\right]_{n=\infty}$$

Для $x = re^{\varphi i}$ маємо:

---

[1]) Що до таких рядів пор. Puzyna: O wartościach funkcyi etc. (Roz. krak. Akad. mat umiej. Wyd. T. 26); єго: Ueber eine methodische Bildung der anal. Ausdrücke (Monatshefte für Math. u. Phys. Bd. V). Левицкий: Про симетричні вираженя (Записки Наук. Тов. ім. Шевченка т. IV.).

$$R_n = e^{nm\varphi i}\left[C_{nm+1} + C_{(n+1)m+1}\left(e^{\varphi i}\right)^m + \cdots\right]_{n=\infty},$$

а для $x = Re^{\varphi i}$ $R \lesseqgtr r$ дістанемо:

$$R_n = \left(\frac{R}{r}\right)^{nm} e^{nm\varphi i}\left[C_{nm+1} + C_{(n+1)m+1}\left(\frac{R}{r}\right)^m e^{m\varphi i} + \quad\right]_{n=\infty},$$

а се значить, що і функция виділена mod. d. з функциї f(x) є також функциєю о характері функциї f(x).

Возьмім тепер загальнійший случай, а іменно виділену функцию:

$$\sum F_s(x,m) = h\left(\frac{x}{r}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_{m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^m + C_{m_1+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{m_1} + \right.$$

$$\left. + C_{m_2+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{m_2} + \cdots\right], \qquad 8).$$

де:

$$m < m_1 < m_2 < m_3 <$$

і де:

$$\begin{aligned} m &= m \\ m_1 &= m\, t_1 \\ m_2 &= m\, t_1\, t_2 \\ m_3 &= m\, t_1\, t_2\, t_3 \\ & \\ m_n &= m\, t_1\, t_2\, t_3 \quad t_n, \end{aligned}$$

де m_s і t_s є числа цїлї і додатні; то решта того ряду має вид:

$$R_n = C_{m_n+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{m_n} + C_{m_{n+1}+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{m_{n+1}} + \cdots$$

або:

$$R_n = \left(\frac{x}{r}\right)\left[C_{m_n+1} + C_{m_{n+1}+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{(t_{n+1}-1)m_n} + \cdots\right],$$

а та решта для $n=\infty$ і для $x = Re^{\varphi i}$, $\left(R \gtreqless r\right)$ заховує ся як попередних случаях. Отже і така функция має вповні характер розслїдженої нами функциї f(x).

Очевидно то зістане і на случай, коли:

$$t_1 = t_2 = \qquad m,$$

т. є. коли:

$$m_n = m^n$$

Зауважити вкінци треба, що ряд 8). на случай $r = 1$ був вже предметом дослїдів M. Lerch'a[1]).

Тернопіль, в червни 1900.

---

[1]) Acta matem. T. 10.