Причинок до теориї дробів тяглих і ґрупи модулової

написав

Володимир Левицкий

1. Як звісно підставленя ґрупи модулової[1]) мають вид:

$$Uz = T S^{a_n} T S^{a_{n-1}} T \qquad T S^{a_1} z \qquad 1)$$

або:

$$Uz = S^{a_n} T S^{a_{n-1}} T \qquad T S^{a_1} z \qquad 2)$$

Підставленя ті дадуть ся написати в виді дробів тяглих:

$$Uz = -\cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \qquad - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_1 + z}}}}} \qquad 1')$$

або:

$$Uz = a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \qquad - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_1 + z}}}} \qquad 2').$$

---

1) Пор. W. Lewicki. Wstęp do teoryi f. elip. mod. Prace mat. fiz. т. VIII. Warszawa.

2. З поміж всїх ріжних підставлень сеї ґрупи возьмем під увагу підставлене:

$$Uz = -\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cdots - \cfrac{1}{a+z}}}} = -\varphi_n(z) =$$

$$= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = TS^a\, TS^a \cdots TS^a\, z =$$

$$= (TS^a\, z)^n,$$

яке творить ся через n-кратну ітерацию тої самої субституциї та будемо старати ся представити єго в видї найпростійшім. Через се дістанемо з одної сторони спроможність обчисляти легко згаданї підставленя, а з другої дістанемо метод до обчислюваня дробів тяглих висше наведеного типу.

3. В тій цїли возьмім:

$$\frac{1}{\varphi_n\, \varphi_{n-1}\, \varphi_{n-2} \cdots \varphi_1} = F_n(z) \qquad 3)$$

отже:

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}\, \varphi_n\, \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1} = F_{n+1}(z) = \frac{F_n(z)}{\varphi_{n+1}(z)}.$$

Но так як:

$$\varphi_{n+1}(z) = \frac{1}{a - \varphi_n(z)} \qquad \text{або:}$$

$$a\varphi_{n+1} - \varphi_{n+1}\varphi_n = 1, \qquad \text{а}$$

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}\, \varphi_n\, \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1} = F_{n+1}(z),$$

то з помноженя двох послїдних рівностий вийде:

$$\frac{a}{\varphi_n\, \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1} - \frac{1}{\varphi_{n-1} \cdots \varphi_1} = F_{n+1}(z) \qquad \text{або:}$$

$$a F_n(z) - F_{n-1}(z) = F_{n+1}(z). \qquad 4)$$

Впровадьмо субституцию:

$$F_n(z) = C\alpha^n \beta^z, \qquad 5)$$

де α і β є функциї зовсїм поки-що неозначені.

(Се апріористичне підставлене можна узасаднити довшим рахунком, наколи впровадимо за $F_n(z)$ добуток $\prod_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu z + \beta_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu}$ та розвинемо; того однак не переводжу ту близше).

В тойже спосіб:

$$F_{n-1}(z) = C\alpha^{n-1}\beta^z$$

$$F_{n+1}(z) = C\alpha^{n+1}\beta^z,$$

отже після 4)

$$a\alpha - 1 = \alpha^2$$

або:

$$\alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Як з сего видко наша субституция 5) для случая $a=2$ не є придатна, тому сей случай розберем окремо.

Можемо написати тепер загально:

$$F_n(z) = C\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n \beta^z + C'\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n \beta^z \qquad 6).$$

Ходить о означенє C, C', β.

Для $n=1$ $\quad F_1(z) = \frac{1}{\varphi_1} = a+z$

або після 6):

$$a+z = \frac{a}{2}\beta^z(C+C') + \frac{\beta^z}{2}\sqrt{a^2-4}\,(C-C') \qquad 7)$$

Для $n=2$ $\quad F_2(z) = \frac{1}{\varphi_2\varphi_1} = a(a+z) - 1$

або після 6:

$$a(a+z) - 1 = \left(\frac{a^2}{2} - 1\right)\beta^z(C+C') + \frac{a}{2}\sqrt{a^2-4}\,\beta^z(C-C') \qquad 8).$$

З рівнань 7) і 8) слідує:

$$C+C' = \frac{\frac{\beta^z}{2}\sqrt{a^2-4}\begin{vmatrix} a+z & 1 \\ a(a+z)-1 & a \end{vmatrix}}{\frac{\beta^z}{2}\sqrt{a^2-4}\,\beta^z\begin{vmatrix} \frac{a}{2} & 1 \\ \frac{a^2}{2}-1 & a \end{vmatrix}} = \beta^{-z} \qquad 9)$$

а так само:

$$C - C' = \frac{(a+2z)\,\beta^{-z}}{\sqrt{a^2-4}} \qquad 10).$$

З рівнань 9) і 10) слідує далї:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{\beta^{-z}}{2}\left(1 + \frac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right) \\ C' &= \frac{\beta^{-z}}{2}\left(1 - \frac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 11).$$

В виду того дістанемо тепер для $F_n(z)$:

$$F_n(z) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1-\frac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n.$$

А що:

$$\varphi_n = \frac{F_{n-1}(z)}{F_n(z)},$$

то:

$$Uz = -\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cdots - \cfrac{1}{a+z}}}} = -\varphi_n(z) =$$

$$= -2\,\frac{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n-1}+(\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^{n-1}}{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^n+(\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^n} \qquad 12)$$

Анальоґічно і підставлене:

$$Uz = S^a\,T\,S^a \cdots T\,S^a\,z = a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cdots - \cfrac{1}{a+z}}}} = a - \varphi_{n-1}(z) =$$

$$= \frac{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n-2}(a^2+a\sqrt{a^2-4}-2)+(\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^{n-2}(a^2-a\sqrt{a^2-4}-2)}{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n-1}+(\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^{n-1}}$$

В сей спосіб можемо від разу обчисляти ітерациї ґрупи модулової та дроби тяглї наведеного типу.

Для $\lim n = \infty$ зближають ся вартости всїх субституций обох типів (без огляду на вартість a та z) до границї -2, зглядно 1, що є ствердженем знаної прояви, що ґрупа модулова на оси перворяднїй тратить власність нетяглости.

4. Возьмім приміром

$x = \frac{1}{3 - \frac{1}{3+z}}$, то вартість єго є, як легко обчислити:

$$x = \frac{3+z}{8+3z},$$

а після 12):

$$x = 2\,\frac{(\sqrt{5}+3+2z)(3+\sqrt{5}) + (\sqrt{5}-3-2z)(3-\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+3+2z)(3+\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5}-3-2z)(3-\sqrt{5})^2} =$$

(по обчисленю) $= 2\,\frac{4\sqrt{5}(3+z)}{8\sqrt{5}(8+3z)} = \frac{3+z}{8+3z}$,

так як в горі.

Пр.

$$x = \frac{1}{4 - \frac{1}{4+z}} = \frac{4+z}{15+4z},$$

а після 12)

$$x = 2\,\frac{(\sqrt{12}+4+2z)(4+\sqrt{12}) + (\sqrt{12}-4-2z)(4-\sqrt{12})}{(\sqrt{12}+4+2z)(4+\sqrt{12})^2 + (\sqrt{12}-4-2z)(4-\sqrt{12})^2} =$$

$$= 2\,\frac{4\sqrt{12}(4+z)}{8\sqrt{12}(15+4z)} = \frac{4+z}{15+4z},$$

так як в горі.

Пр.

$$x = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1+z}}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1+z}{z}}} = \frac{1}{1 - \frac{z}{z-1-z}} =$$

$$= \frac{1}{1+z},$$

а після 12)

$$x = 2\,\frac{(\sqrt{-3}+1+2z)(1+\sqrt{-3})^3 + (\sqrt{-3}-1-2z)(1-\sqrt{-3})^3}{(\sqrt{-3}+1+2z)(1+\sqrt{-3})^4 + (\sqrt{-3}-1-2z)(1-\sqrt{-3})^4} =$$

по обчисленю:

$$= \frac{-32\sqrt{-3}}{-32\sqrt{-3}(1+z)} = \frac{1}{1+z}.$$

5. Лишає ся єще случай a=2, де субституция 5) не дасть ся ужити.

Після рівнаня 4) можемо написати цілий ряд слідуючих рівнань:

$$2\,F_{n-1} - F_{n-2} = F_n$$

$$2\,F_{n-2} - F_{n-3} = F_{n-1}$$

$$2\,F_{n-3} - F_{n-4} = F_{n-2}$$

$$\cdots$$

$$\underline{2\,F_2 - F_1 = F_3}$$

Наколи сї рівнаня почавши від другого помножимо через 2 і додамо до себе, дістанемо:

$$F_{n-2} + 2\,F_2 - 2\,F_1 = F_n$$

або, так як:

$$2\,(F_2 - F_1) = 2\,(4+2z-1-2-z) =$$

$$= 2\,(1+z),$$

$$F_{n-2} + 2\,(1+z) = F_n$$ Так само:

$$F_{n-4} + 2\,(1+z) = F_{n-2}$$

$$F_{n-6} + 2\,(1+z) = F_{n-4}$$

$$\underline{F_2 + 2\,(1+z) = F_4}$$

Додаймо ті рівнаня, то дістанемо:

$$F_2 + 2\,(1+z)\,\frac{n-2}{2} = F_n\,,$$

а що:

$$F_2 = \frac{1}{\varphi_2 \varphi_1} = 2z+3,$$

то:

$$2z + 3 + (n-2)\,(1+z) = F_n\,,$$

або:

$$F_n = (n+1) + nz,$$

а так само:

$$F_{n-1} = (n-1)\,z + n.$$

В виду того:

$$\varphi_n(z) = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \ddots - \cfrac{1}{2+z}}}} = \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{(n-1)\,z + n}{nz + (n-1)} \qquad 13)$$

Пр.

$$\cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1+z}}} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{2+z}{3+2z}} = \frac{3+2z}{4+3z}\,;$$

то само випаде і після 13).

Або:

$$\cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2+z}} = \frac{2+z}{3+2z}\,,$$

що і з 13) слїдно.

Для $\lim n = \infty$ маємо

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = 1,$$

значить ся, всї субституциї $(TS^2z)^n$ для великого n зміряють до тої самої границї, що є новим доказом на втрату нетяглости ґрупи модулової на оси перворяднїй.

Тернопіль, 7 марта 1899 р.