Причинок до поділу рівнань другого степеня

написав

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

Математика знає цїлу ґрупу інтересних квестий, які ведуть до зовсїм противних, подекуди і противорічних вислїдів, після того, з якої точки розбирати мем таку квестию. Тут зачислити треба много інтересних квестий з рахунку імовірности,[1] які ведуть до ріжних результатів, а се можна би витолкувати в той спосіб, що відповідно до точки виходу зміняють ся і самі заложеня.

Дальше треба зачислити тут розслїди, які відносять ся до безконечности; показують они, що не все одно, на якій дорозї переходимо з конечности до безконечности; ш не все одно, чи ми уважати будемо ту безконечність за границю тої або иньшої фіґури плоскої.

Вже анґлїйский математик Cayley подав примір на се, що спосіб переходу з конечности до безконечности має вплив на вислїд. Наколи іменно возьмемо інтеґрал:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2 + y^2)\,dxdy = \pi,$$

то інтеґрал сей є границею квадрату о середоточцї в початку системy сорядних; коли перетворимо сей інтеґрал на сорядні біґунові (полярні):

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{якобіян} = r,$$

[1]) Пор. Poincaré: Calcul des probabilités ст. 94 et sqts.

а через се станемо уважати безконечність яко границю кола, дістанемо на вартість інтеґралу:

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r \sin(r^2)\, dr d\varphi = \pi \Big/_{0}^{\infty} \cos(r^2),$$

отже результат зовсїм неозначений.

І нинїшна квестия, яку будемо розбирати, веде до ріжних вислїдів, наколи єї розбирати-мемо на дорозї чисто-ґеометричній; тому-то вкінци переводимо єще аналїзу на дорозї альґебраічній, а через се входимо подекуди і в царину чисел надскінчених (transfinit) G. Cantora.

---

1. Річ, що є предметом нинїшньої розвідки, розбирає слїдуюче питанє:

Винайти відношенє всїх рівнань 2. ст., які в границях (z_0 — z_1) незвісної мають 0, 1, 2 коренїв дїйсних, до числа всїх рівнань 2. ст.[1])

Маємо рівнанє 2-го степеня виду:

$$f(z) = z^2 - 2az + b = o \qquad (a,\ b \text{ дїйсні}).$$

Діскрімінант того рівнаня зведений до зера дає нам параболю

$$a^2 - b = o$$

в сорядних (a b) о вершку (o, o). Рівнанє $f(z) = o$ представляє при змінним параметрі z цїлу множінь (Mannigfaltigkeit) стичних, що їх обводня (Enveloppe) є параболя $a^2 - b = o$.

Возьмім дві вартости параметру z т. є. z_0 і z_1, то до них належати-муть стичні (фіґ. I.):

$$z_0^2 - 2az_0 + b = o.$$
$$z_1^2 - 2az_1 + b = o.$$

Они перетинають ся в точцї M $\left(a = \frac{z_0 + z_1}{2},\ \ b = z_0 z_1\right)$, а кут, під яким перетинають ся, є:

$$\delta = \operatorname{arc\,tg} \frac{2(z_1 \backsim z_0)}{1 + 4z_0 z_1},$$

де знак $\backsim$ показує, що величину меншу треба від більшої відняти.

---

[1]) Гадку заняти ся тим питанєм подав менї Др. Жоравский, проф. універс. краківского.

Ті стичні стикають ся з параболею в точках:

$$A\,(a = z_0,\quad b = z_0^2),\qquad B\,(a = z_1,\quad b = z_1^2).$$

Площа розпала ся тепер на слїдуючі части:

I.) $(A+A')$ представляє таку множінь вартостий змінних a і b, що для них рівнанє $f(z)=o$ в границях $(z_0 \cdots z_1)$ не має анї одного дїйсного кореня.

II.) $(C+C')$ представляє такі рівнаня, що в границях $(z_0 \cdots z_1)$ мають один корень дїйсний.

III.) B характеризує рівнаня, що в границях $(z_0 \cdots z_1)$ мають оба коренї дїйсні.

Так як площа (ab) представляє при зміняючих ся a і b цїлу безконечну множінь рівнань 2. ст., проте є річ очевидна, що згадані відношеня, що їх означимо через S_0, S_1, S_2, будуть:

$$S_0 = \frac{A + A'}{\text{Цїла пл.}},\quad S_1 = \frac{C + C'}{\text{Цїла пл.}},\quad S_2 = \frac{B}{\text{Цїла пл.}}.$$

Ті відношеня дадуть нам рівночасно імовірність, що в даних границях якесь рівнанє буде мати 0, 1, 2 дїйсних коренїв.

Вже з гори бачимо, що при скінчених z_0 і z_1 S_2 буде величина безконечно мала, бо B є дуже мала часть площі (ab):

$$B = \frac{1}{4}\, z_0 z_1 (z_0 + z_1) + \frac{1}{12}\,(z_1^3 + z_0^3),$$

як не тяжко обчислити.

Наші відношеня обчислимо наперед при скінчених A, A', C, C', а опісля розширимо їх до безконечности.

Переходити до безконечности можна в ріжний спосіб. Спосіб переходу, який ту відразу насуває ся, є перехід при помочи кола.

Наколи зачеркнемо сорозмірно великим лучем коло з точки M (Фіґ. I.), так щоби в собі заключало обі точки стичности, дістанемо — як се очевидно — при скінчених A, A', C, C':

$$s_0 = \frac{2r^2\delta - B}{r^2\pi},\quad s_1 = \frac{2r^2(\pi-\delta)}{r^2\pi},\quad s_2 = \frac{B}{r^2\pi};$$

а коли возьмемо: $\lim r = \infty$,

отже так, що в порівнаню з r^2 B можна пропустити, дістанемо:

$$S_0 = \frac{\delta}{\pi},\quad S_1 = \frac{\pi - \delta}{\pi},\quad S_2 = o.$$

Відношеня ті при великім r не є від r з а л е ж н і. Наколи проте r розширимо до безконечности, то дістанемо при узглядненю вартости δ відношеня:

$$S_0 = \frac{\operatorname{arc\,tg} \dfrac{2\,(z_1 \backsim z_0)}{1 + 4 z_0 z_1}}{\pi},\quad S_1 = \frac{\pi - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2\,(z_1 \backsim z_0)}{1 + 4 z_0 z_1}}{\pi},\quad S_2 = o.$$

2. Иньший вислїд дістанемо, наколи перейдемо до безконечности при помочи простокутника.

Нарисуймо простокутник так великий, щоби заключав в собі точки A, B, M (фіґ. II.). Обчислїм тут части A', A, C, C' (при чім берім лиш беззглядні вартости сорядних).

Отже:

$$A = \frac{1}{2}(a + a')(b + z_0 z_1) - B$$

Щоби обчислити A', мусимо знати сорядні точок N і P; они випадуть з перетинаня лїнїї $z_0^2 \; 2az_0 + b = o$ з лїнїєю $b = -b$, отже:

$$N \equiv \left(-b,\ a = \frac{z_0^2 - b}{2z_0}\right), \quad P \equiv \left(-b,\ a = \frac{z_1^2 - b}{2z_1}\right).$$

Проте:

$$\overline{NP} = \frac{z_1^2 - b}{2z_1} - \frac{z_0^2 - b}{2z_0} = \frac{(z_1 - z_0)(b + z_0 z_1)}{2z_0 z_1},$$

а часть A':

$$A' = \frac{(b^2 - z_0 z_1)(z_1 - z_0)}{4z_0 z_1}.$$

Цїлий простокутник є:

$$2b(a + a'),$$

отже при скінчених A, A', C, C' наші відношеня є:

$$s_0 = \frac{\frac{1}{2}(a + a')(b + z_0 z_1) + \frac{1}{4z_0 z_1}(b^2 - z_0^2 z_1^2)(z_1 - z_0) - B}{2b(a + a')},$$

$$s_1 = \frac{2b(a + a') - \frac{1}{2}(a + a')(b + z_0 z_1) + \frac{1}{4z_0 z_1}(b^2 - z_0^2 z_1^2)(z_1 - z_0)}{2b(a + a')},$$

$$s_2 = \frac{B}{2b(a + a')}.$$

Перейдїм до безконечности:

$$\lim a = \lim a' = \lim b = \infty,$$

то дістанемо по переведеню відповідних скорочень:

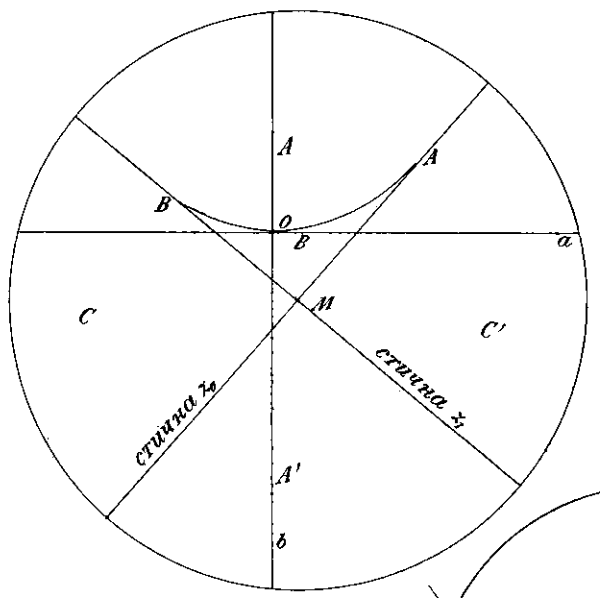
$$S_0 = \frac{z_1 + 4z_0 z_1 - z_0}{16 z_0 z_1},$$

$$S_1 = \frac{z_0 + 12 z_0 z_1 - z_1}{16 z_0 z_1},$$

$$S_2 = o.$$

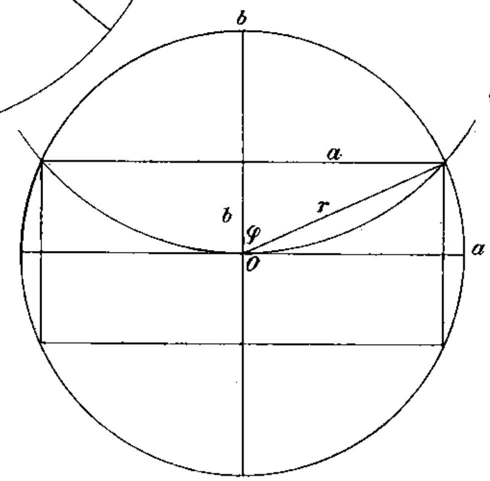
Маємо проте вислїд зовсім иньший, як при переході до безконечности при помочи кола.

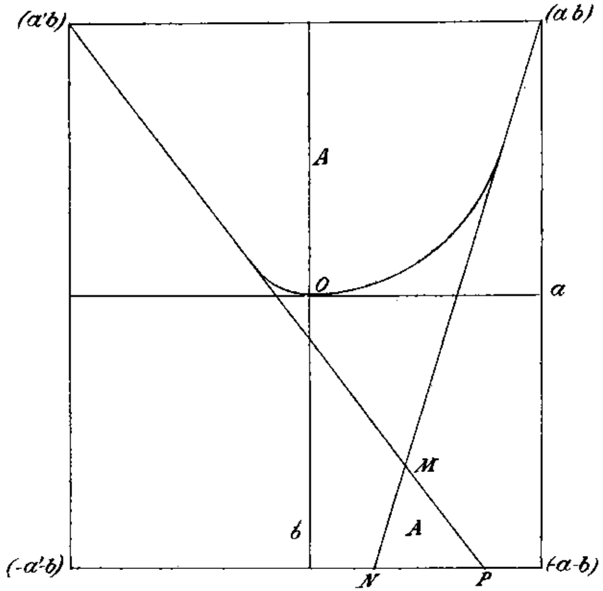
Котрий з тих вислїдів є імовірнїйший?



Фіг I

Фіг III





Фіг II

Ми випроваджували наші відношеня для **я к и х - н е б у д ь с к і н ч е н и х** вартостий арґументу z. Мусять они проте остати і для $z_1=z_0$. Для тих вартостий маємо, наколи возьмем коло:

$$S_0 = o, \quad S_1 = 1,$$

а наколи возьмемо простокутник:

$$S_0 = \frac{1}{4}, \quad S_1 = \frac{3}{4}.$$

В першім разї значить се, що в точцї $z_0=z_1$ (яка лежить на параболї) не ма зовсїм рівнань о коренях спряжених, а всї рівнаня мають один (отже і оба) корінь дїйсний; в другім случаю, що в сїй точцї є і такі і такі рівнаня, а се є неможливе, бо в границях (z_0 z_0) є лиш рівнаня 2 ст., які власне мають корінь z_0, і то корінь дїйсний (бо z_0 є дїйсне). Перший вислїд є проте імовірнїйший, так як він каже, що імовірність, що рівнане 2. ст. для дїйсної вартости z_0 має один корінь дїйсний, рівнає ся певности, а се є і без того очевидне.

3. Однак тих відношень не можна розширити для z_0 і z_1 безконечно великих, бо наколи $z_0=z_1=\infty$, то средоточка кола M посуне ся в безконечність; обі стичні стануть асимптотами, а так як параболя має лиш одну асимптоту, цїлу в безконечности, то дістанемо місто двох стичних одну асимптоту в безконечности і наша основна фіґура не має значіня.

Наколи однак іде нам о відношенє всїх рівнань 2 степеня з 0, 2 коренями дїйсними до всїх рівнань (в границях $-\infty$ $+\infty$), то возьмем за Кляйном (Klein) фіґуру III., де параболя відповідає рівнаням о 0 коренях, а проча часть площі рівнаням о двох дїйсних коренях.

Возьмім тут коло, яке опісля розширимо до безконечности.

Часть параболї, замкнена луком кола, має поле — як легко обчислити —:

$$\frac{1}{3}\, a^3 + (a^2+a^4) \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a},$$

отже відношенє:

$$s_0 = \frac{\frac{1}{3}\, a^3 + (a^2+a^4) \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a}}{(a^2+a^4)\pi},$$

яке для $\lim a = \infty$ дає:

$$S_0 = o,$$

що є очевидно абсурдом.

Колиж до безконечности перейдем при помочи простокутника, дістанемо:

$$S_0 = \frac{\frac{4}{3}a^3}{4a^3} = \frac{1}{3},$$

а се відношенє не залежить від a і є сталою величиною.

Очевидно: $$S_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

4. Зовсїм инакше представляє ся річ з точки аналїзи альґебраїчної.

Маємо рівнанє:

$$x^2 - 2ax + b = o,$$

то: $$x = a \pm \sqrt{a^2 - b}.$$

Рівнаня мають розвязки дїйсні для всїх від'ємних вартостий b, та для $a^2 > b$, наколи b є додатне, отже:

$$\begin{array}{rl} \text{корені дїйсні} & \left\{ \begin{array}{l} b = (o \quad -\infty) = (1) \\ b = (o \quad a^2) = (2), \end{array} \right. \\ \text{є для:} & \\ \text{спряжені для:} & b = (a^2 \quad +\infty) = (3). \end{array}$$

Вартостий (1) є безконечно много, так само (2) і (3), но очевидно, що множінь (1) є:

$$(1) \equiv (2) + (3),$$

а позаяк:

$$(3) = (a^2 \quad +\infty) = (a^2 \quad 2a^2) + (2a^2 \quad 3a^2) + \cdots \text{ in inf.}$$

а: $$(2) = (o \quad a^2) \backsim (a^2 \quad 2a^2),$$

то (3) є безконечно рази більше, чим (2), отже:

$$(3) \equiv \infty\,(2),$$

а проте:

$$(1) \equiv (2) + \infty\,(2) = (\infty + 1)\,(2).$$

Бачимо проте, що рівнань з розвязкою дїйсною є безконечне число, так само рівнань з розвязками спряженими, но наколи множінь рівнань з розвязками спряженими є першим числом надскінченим,[1]) то множінь рівнань з розвязками дїйсними є другим числом надскінченим, проте є більше рівнань з розвазками дїйсними.

Тернопіль 20. жовтня 1897. р.

---

[1]) Пор. н. пр. Dickstein: Pojęcia i metody matematyki I. ст. 37.