# Рівнанє пятого степеня

написав

**КЛИМ ГЛЇБОВИЦКИЙ.**

## ВСТУП.

Великі успіхи, якими повінчались розслїди італїйских математиків середних віків, як Ferro'a, Tartagli-и, Cardano'a, Ferrari'ого і и. в квестиї розвязки рівнань третого і четвертого степеня, навели їх на гадку, щоби сеї методи ужити і до розвязки висших рівнань, а передовсїм до розвязки рівнань пятого степеня. Та минуло яких сто лїт, а справа не посунулась анї троха вперед. Правда, в роцї 1683. подав Tschirnhaus в розвідцї „Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data equatione" новий метод, який в спосіб незвичайно легкий веде до розвязки рівнаня другого та третого степеня, однак вже при рівнанях біквадратних жадає много роботи, а вже при рівнаню пятого степеня не дає ся пристосувати; тому-то Tschirnhaus не силував ся свого методу стосувати до сих рівнань, а лиш — як тодї було звичайом — індукцийно доказав правдивість свого твердженя. В XVIII. столїтю справа ся виринає на ново; підносять єї так знамениті мужі, як Euler, Bézout, Lagrange, Vandermonde та Malfatti, однак безуспішно. Закидувано твердженю Tschirnhaus'a лож, бо хоча резольвента 24. степеня, до якої провадив метод Tschirnhaus'a, дала ся заступити резольвентою 6. степеня, однак дальша редукция була вже неможлива, а проте ставалась неможлива розвязка рівнаня пятого степеня.

В виду того починає виринати гадка, що рівнанє пятого степеня альґебраічно розвязати ся не дасть, а перший, що підвїс сю гадку, був італійский математик Ruffini. Однак його розвідка в сїй квестиї[1]) є так тяжка та скомплїкована, що тяжко сказати, чи ті конклюзиї є всї правдиві, чи нї. Квестию сю підняв на ново Abel, один з найбільших математиків усїх часів. Заложив він — що було одиноко рациональне — що всї рівнаня пятого степеня можна альґебраічно розвязати, і як раз се заложенє довело його до внслїду, що рівнаня загальні, яких степень є висший як четвертий, не мають розвязки альґебраічної. Однак доказ сей не видавав ся йому самому зовсїм простий, тому-то вже два роки пізнїйше 1826. р. подав[2]) він новий доказ, що є вже більше простий та ясний.

Та всеж таки довгий час єще тревала у деяких математиків віра, що рівнанє пятого степеня можна розвязати; навіть такий математик як Hamilton не хотїв признати доказу Abel'a. Та Abel'ови годї вже було доказ свій представити в видї зовсїм ясним та зрозумілим, бо вже в 27. роцї житя зійшов з того сьвіта; се зробили Wantzel та Kronecker.

Рівночасно з Abel'ом підняв квестию рівнаня пятого степеня 20. лїтний незвичайно остроумний Galois та доказав, що з поміж рівнань неприводних дадуть ся альґебраічно лиш ті розвязати, що мають таке свойство, що всї коренї дадуть ся рационально представити через якінебудь два із тих коренів; загальні же рівнаня альґебраічно розвязати ся не дадуть, як се слїдно при помочи теориї ґруп. Та наколи докази Abel'a не є прозорі, то тим менше можна се сказати про докази Galois'a, бо він найтруднїйші дослїди подавав в формі дуже короткій, а часто і без доказу; та не стало йому і часу на близші поясненя, бо помер єще скорше як Abel в 21. роцї житя.

Колиж отже доказано, що рівнаня загальні альґебраічно розвязати ся не дадуть, лишала ся квестия, як — хоча і неальґебраічно — розвязати рівнанє пятого степеня. Зробив се Hermite 1858. р., та зовсїм незавнсимо від него Kronecker, при помочи функций елїптичних.

В нинїшнїй розвідцї подано всї ті розслїди та змаганя, та іменно в першій части поданий є доказ Abel'a та доказ Galois'a, в другій части є представлені дослїди Hermite'a.

---

[1]) Teoria generale delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto. Bologna 1799.

[2]) Crelle's Journal т. I. p. 66.

# ЧАСТЬ ПЕРША.

## Досліди Abel'a.[1])

1. Возьмім скінчене число яких-небудь величин:

$$x_1\ x_2 \qquad x_n,$$

і най $p'$, $p''$, будуть рациональними функциями тих величин, то:

$$p_1 = f(x_1\ x_2, \qquad \sqrt[n']{p'},\ \sqrt[n'']{p''},\ ----),$$

$f$ функция рациональна, а $n'$, $n''$, числа первi — то $p_1$ називати ся ме функциєю альґебраїчною першого ряду,

$$p_2 = f(x_1\ x_2, \qquad \sqrt[n']{p'},\ \sqrt[n'']{p''}, \qquad \sqrt[n_1']{p_1'},\ \sqrt[n_1'']{p_1''},\ ----)$$

є функция альґебраїчна другого ряду і т. д.

Загально функция альґебраїчна $\mu$-того ряду має вид:

$$v = f(r'\ r'' \qquad \sqrt[n']{p'},\ \sqrt[n'']{p''},\ ----),$$

де $p'$ $p''$. є функциї ряду $(\mu-1)$, а $r'$ $r''$, є функциї ряду $(\mu-1)$, або і нисшого.

Очевидно, що нїяка з величин $\sqrt[n']{p'}$, $\sqrt[n'']{p''}$, не дасть ся представити рационально через иньші того самого виду, як і через $r'$, $r''$, бо тоді число тих $\sqrt[n]{p}$ в функциї f зменшилоби ся о одиницю, і в сей спосіб через редукцию дійшлибисьмо до вираженя:

$$v = f(r', r'', \qquad),$$

що є ряду $(\mu-1)$, наколи v мало бути ряду $\mu$.

Функция ряду $\mu$ дасть ся також написати:

$$v = f(r', r'', \qquad \sqrt[n]{p}\ ),$$

де p є функция альґебраїчна ряду $(\mu-1)$, а $r'$, $r''$, є функциями ряду $\mu$, або і нисшого. А як кожда функция рациональна дає ся представити яко квот двох функций цїлковитих, то:

---

[1]) Пор. Crelle's Journal loc. cit. т. I., Abel: Oeuvres complètes т. II. та Maser: Abhdlgn. ü. algebraische Auflösung der Glgn von Abel u. Galois.

$$v = \frac{t_0 + t_1 p^{\frac{1}{n}} + \cdots + t_m p^{\frac{m}{n}}}{v_0 + v_1 p^{\frac{1}{n}} + \cdots + v_{m'} p^{\frac{m'}{n}}} = \frac{T}{V},$$

де T і V є рациональні цїлї функциї. Помножім чисельник і знаменник через $V_1, V_2, \ldots V_{n-1}$, де ті $V_s$ представляють $(n-1)$ вартостий функциї V, наколи в нїй за $p^{\frac{1}{n}}$ положимо $\alpha^s p^{\frac{1}{n}}$ $(s=1 \cdots n-1)$, де $\alpha$ є первісний корень рівнаня $\alpha^n - 1 = 0$, то дістанемо:

$$v = \frac{T\, V_1\, V_2 \ldots V_{n-1}}{V\, V_1\, V_2 \ldots V_{n-1}}.$$

Знаменник є цїлковита рациональна функция величин $r', r'' \cdots$ і p, а чисельник функция цїлковита величин $r', r'', \ldots p^{\frac{1}{n}}$, проте:

$$v = \bar{q}_0 + \bar{q}_1 p^{\frac{1}{n}} + \bar{q}_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + \bar{q}_r p^{\frac{r}{n}},$$

де $\bar{q}_0\, \bar{q}_1, \ldots \bar{q}_r$ є рациональні функциї величин $p, r', r'', \cdots$, що дасть ся еще через підставлене $\mu = an + \alpha$ (а і $\alpha$ числа цїлї) — чого не перепроваджуємо — привести до виду:

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \qquad 1)$$

де $p^{\frac{1}{n}}$ не дасть ся рационально представити через $p, q_0, q_2 \ldots q_{n-1}$.

2. Приймім, що виражене:

$$y = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \qquad 2)$$

сповняє рівнанє:

$$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_r y^r = o, \qquad 3)$$

яке по вставленю y перейде на:

$$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = o, \qquad 4)$$

де $r_s$ є рациональні функциї, утворені з $p, q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$.

Рівнанє 4) сповняє ся однак лиш для

$$r_0 = r_1 = r_2 = \ldots = r_{n-1} = o,$$

бо наколиби так не було, то положивши $p^{\frac{1}{n}} = z$ дістанемо рівнанє:

$$z^n - p = o, \qquad 5)$$

яке з рівнанем 4) має що найменше один корень спільний.

Наколи рівнаня 4) і 5) мають k коренів спільних, то можна утворити рівнанє степеня k, якого коренями є ті k коренів, а якого сочинники є рационально утворені з p, $q_0$, $q_1$, $q_{n-1}$; коли рівнанє се є:

$$s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \cdots + z^k = o, \qquad 6)$$

і оно є приводне, то наколи його розложимо на чинники неприводні, дістанемо один з них:

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots + z^\mu = o, \qquad 7)$$

де $t_s$ є такі самі функциї, як s або r. Кромі сего бачимо, що $\mu \geqq 2$, бо інакше $p^{\frac{1}{n}} = z$ далоби ся рационально представити через p, $q_0$, $q_1$, $q_{n-1}$, а се неможливо. Рівнане 7) має $\mu$ коренїв спільних з 5), а що всї коренї рівнаня 5) мають вид:

$$p^{\frac{1}{n}},\ \alpha p^{\frac{1}{n}},\ \alpha^2 p^{\frac{1}{n}},\quad \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} \qquad (\alpha^n + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha + 1 = 0),$$

то 7) мусить ся сповнити для вартости $\alpha z$, або:

$$t_0 + t_1 z\alpha + t_2 z^2\alpha^2 + \cdots + z^\mu \alpha^\mu = 0 \qquad 8)$$

а з відси:

$$t_0(1-\alpha^\mu) + t_1(\alpha-\alpha^\mu) z + \cdots + t_{\mu-1}(\alpha^{\mu-1} - \alpha^\mu) z^{\mu-1} = 0. \qquad 9)$$

Се рівнанє має такий самий вид, як 7), а що 7) є неприводне, то 9) мусить бути ідентично зером, т. є.

$$t_0(1-\alpha^\mu) = 0;$$

$t_0 = o$, бо 7) є неприводне, отже мусїлоб $1 - \alpha^\mu = o$, а се неможливо, бо $\alpha$ є коренем первісним рівнаня $\alpha^n - 1 = 0$ ріжним від одиниції.

Мусить проте в рівнаню 4) бути:

$$r_0 = r_1 = r_2 = \cdots = r_{n-1} = o. \qquad 10)$$

3. На основі 10) сповняє ся рівнанє 4), наколи за $p^{\frac{1}{n}}$ будемо класти $\alpha^s p^{\frac{1}{n}}$ (s=0 n—1); дістанемо тоді ряд:

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1}\alpha^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

а з відси:

$$q_0 = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n).$$

Наколи дальше помножимо $y_2$ через $\alpha^{n-1}$, $y_3$ через $\alpha^{n-2}$, $y_n$ через $\alpha$, а опісля $y_2$ через $\alpha^{n-2}$, $y_3$ через $\alpha^{n-3}$, дістанемо:

$$p^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha^{n-1} y_2 + \cdots + \alpha y_n)$$

$$q_2 p^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha^{n-2} y_2 + \cdots + \alpha^2 y_n) \qquad 10')$$

а з відси буде можна кожду з величин $p^{\frac{1}{n}}$ $q_0$ $q_2$ $q_{n-1}$ виразити рационально через коренї рівнаня 3).

Н. пр:

$$q_\mu p^{\frac{\mu}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha^{n-\mu} y_2 + \alpha^{n-2\mu} y_3 + \cdots + \alpha^{n-(n-1)\mu} y_n),$$

а з відси:

$$q_\mu = \frac{n^{\mu-1}(y_1 + \alpha^{-\mu} y_2 + \alpha^{-2\mu} y_3 + \cdots + \alpha^{-(n-1)\mu} y_n)}{(y_1 + \alpha^{n-1} y_2 + \alpha^{n-2} y_3 + \cdots + \alpha y_n)^\mu}.$$

Бачимо проте, що **наколи рівнане якесь дає ся альґебраічно розвязати, то на кождий корень рівнаня дістанемо виражене таке, що кожда функция, яка входить в се виражене, є рациональною функциєю коренїв даного рівнаня** (I.)

4. Переходимо тепер до другої части розслїдів Abel'a, себ-то до його розслїдів субституцийних.

Най v буде рациональна функция змінних независимих $x_1$ $x_2$ $x_n$. Число всїх можливих пермутаций тих величин є $\mu$. Наколи $A_1$ $A_2$ $A_\mu$ є $\mu$ тих ріжних перемін, то всї можливі вартости функциї v представляє ряд:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix},\ v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},\ \quad v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_\mu \end{pmatrix}.$$

Може ся видарити, що функция v є менше чим $\mu$ — вартостева, т. є. що між повисшими підставленями є н. пр. $m$ таких, що лишають вартість v без зміни, отже:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \quad = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix} \qquad 11)$$

Наколи ту возьмемо підставлене $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_{m+1} \end{pmatrix}$, дістанемо:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_{m+1} \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_{m+2} \end{pmatrix} = \quad = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_{2m} \end{pmatrix}.$$

Наколи підемо так дальше, доки не возьмемо всїх підставлень, дістанемо $\rho$ ріжних рядів по $m$ рівних вартостий, т. є. число всїх вартостий функциї v є $\mu=\rho m$.

Звідси слїдує твердженє (II.):

Число вартостий, які функция n величин через всї пермутациї тих величин може дістати, є подїльником добутка n'.

5. Наколи підставленє $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}$ дає через інтерацию ряд вартостий:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^0, v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^1, v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^2, \quad v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{p-1} v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^0,$$

а $p$ є найбільше число перве менше від $n$, то наколи число тих ріжних вартостий v є менше як $p$, то тодї між тими $p$ вартостями якесь:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^r = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{r'} \qquad \text{а з відси:}$$

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{r+p-r} = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{r'+p-r}$$

а як:
$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^p = v, \qquad \text{то:}$$

$$v = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^s, \qquad s=r'+p-r;$$

позаяк p є число перве, то дасть ся утворити рівність:

$$s\alpha - p\beta = 1,$$

$$v = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{p\beta+1} \qquad \text{отже:}$$

$$v = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix},$$

т. є. вартість функциї v не зміняє ся через наворотне (recurrent) підставленє ряду p, а проте не змінить ся, наколи пристосуємо два такі підставленя ряду $p_1$ утворені з тих самих букв н. пр.:

$$\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta & \xi\,\eta \\ \beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon & \eta\,\alpha \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon & \eta\,\alpha \\ \gamma\,\alpha\,\beta\,\delta \text{---} & \xi\,\eta \end{pmatrix}$$

Ті оба підставленя можна заступити через підставленє $\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \gamma\,\alpha\,\beta \end{pmatrix}$, а що підставленє з трох букв дасть ся представити через дві переставки (транспозициї), проте v не змінить ся, наколи до него пристосуємо паристе число переставок; а наколи так, то знова всї вартости v, як півстали через ужитє непаристого числа переставок, є між собою рівні. Позаяк далї кожде підставленє дає ся заступити через певне число переставок, проте v є що найбільше двовартостеве, а проте вид його, як усїх функций двовартостевих, є:

$$\varphi = S + S_1 \sqrt{\Delta^2}$$

де S і $S_1$ є функциї симетричні, а $\Delta$ є дискрімінантом величин $x_1$ $x_2$ $x_n$:

$$\Delta = (x_1 - x_2)\ (x_1 - x_3) \qquad (x_1 - x_n)\ (x_2 - x_3) \qquad (x_2 - x_n) \qquad (x_{n-1} - x_n).$$

Звідси слїдує:

Число ріжних вартостий, які функция n величин може принимати, не може бути менше, як найбільше число перве менше від n, так як в противнім разї зведе ся до 2, або до 1. (III.)

Не ма проте функциї 5 величин, яка би мала 3 або 4 вартости.

6. Пошукаймо тепер загального виду пятивартостевої функциї пятьох величин.

Найже v буде функция 5 величин $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$, яка не зміняє вартости при переміні величин $x_2, x_3, x_4, x_5$. Яко функция симетрична тих величин дасть ся представити рационально через сочинники рівняня:

$$(x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4)\ (x - x_5) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s,$$

але:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e,$$

з відси:

$$a = p + x_1, \quad b = q + px_1, \quad c = r + qx_1, \quad d = s + rx_1, \quad e = sz_1,$$

отже:

$$\begin{aligned} p &= a - x_1 \\ q &= b - ax_1 + x_1^2 \\ r &= c - bx_1 + ax_1^2 - x_1^3 \\ s &= d - cx_1 + bx_1^2 - ax_1^3 + x_1^4; \end{aligned}$$

функция v дає ся проте представити рационально через $x_1, a, b, c, d, e$:

$$v = \frac{t}{\varphi(x_1)},$$

де t і $\varphi(x_1)$ є рациональні функциї $x_1$; утворім:

$$v = \frac{t\varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ \varphi(x_4)\ \varphi(x_5)}{\varphi(x_1)\ \varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ \varphi(x_4)\ \varphi(x_5)} = \bar{r}_0 + \bar{r}_1 x_1 + \cdots + r_m x_1^m \qquad 12)$$

де $\bar{r}_0\ \bar{r}_1 \quad \bar{r}_m$ є рациональні функциї з огляду на a, b, c, d, e, бо знаменник є симетрична функция величин $x_1\ x_2 \quad x_5$, а тим самим цїлковита функция сочинників a, b, c, d, e, а чисельник яко цїлковита функция p, q, r, s є функция цїлковита величин $x_1$, a, b, c, d, e.

При помочи рівнаня:

$$x_1^5 = ax_1^4 - bx_1^3 + cx_1^2 - dx_1 + e \qquad 13)$$

можна привести v до виду:

$$v = r_0 + r_1x_1 + r_2x_1^2 + r_3x_1^3 + r_4x_1^4 \qquad 14)$$

бо наколи помножимо $x_1^5$ постепенно через $x_1$, $x_1^2$, $\quad x_1^{m-5}$, дістанемо (m - 4) рівнань, з яких на $x_1^5$, $x_1^6$, $\quad x_1^m$ дістанемо вираженя виду:

$$\alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1^3 + \varepsilon x_1^4.$$

Сочинники $r_0\ r_1$ в вираженю 14) є рациональні з огляду на a, b, c, d, e, а тим самим симетричні з огладу на $x_1\ x_2 \quad x_5$. Само v є симетричне що до $x_2\ x_3\ x_4\ x_5$, а що яко функция пятьох величин не може мати трох або чотирох вартостий, і що далї не є двовартостева, тому v може бути лиш або пятивартостева або симетрична.

7. Приймім проте, що маємо якусь функцию v, що має пять вартостий: $v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5$, і возьмім функцию $x_1^m v$. Наколи в нїй поміняти між собою $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ на всї способи, то ся функция мусить мати оден з видів:

$$x_1^m v_1, \quad x_1^m v_2, \quad x_1^m v_3, \quad x_1^m v_4, \quad x_1^m v_5.$$

Но ті 5 вартостий не можуть бути усї ріжні, бо тоді наколибисьмо переміняли постепенно $x_1$ з $x_1\ x_2\ x_5\ x_4\ x_5$, дісталибисьмо функцию 5 величин, що має 25 вартостий, а се неможливе на основі твердженя (I.).

Число вартостий, які може v приняти, коли в нїй поміняти $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ на всї можливі способи, мусить бути:

$$\mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Для $\mu = 1$ є v симетричне що до $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, має проте вид 14).

Для $\mu = 4$ є $v_1 + v_3 + v_3 + v_4$ функция виду 14), а з відси:

$$v_5 = \underbrace{(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5)}_{\varphi \text{ симетр.}} \quad (v_1+v_2+v_3+v_4) \text{ має вид } 14)$$

Для $\mu = 2$ є:

$$v_1 + v_2 = r_0 + r_1x_1 + r_2x_1^2 + r_3x_1^3 + r_4x_1^4 = \varphi(x_1),$$

а коли поміняти $x_1$ з $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 &= \varphi(x_1) \\ v_2 + v_3 &= \varphi(x_2) \\ & \\ v_{m-1} + v_m &= \varphi(x_{m-1}) \\ v_m + v_1 &= \varphi(x_m) \end{aligned}\right\} \quad m = 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Для $m = 5$ малибисьмо $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, а се неможливе, бо $\varphi(x_1)$ має мати пять вартостий:

Для $m = 3$ маємо:

$$v_1 + v_2 = \varphi(x_1),\quad v_2 + v_3 = \varphi(x_2),\quad v_3 + v_1 = \varphi(x_3),$$

а з відси:

$$2v_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3).$$

Права сторона сього рівнаня має більше, чим 5 вартостий, проте $m = 3$ треба відкинути.

Для $m = 4$

$$v_1 + v_2 = \varphi(x_1),\quad v_2 + v_3 = \varphi(x_2),\quad v_3 + v_4 = \varphi(x_3),\quad v_4 + v_1 = \varphi(x_4),$$

а з відси:

$$2v_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3) \quad \varphi(x_4);$$

се треба відкинути, бо права сторона має більше чим пять вартостий.

Для $m = 5$ маємо:

$$2v_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3) - \varphi(x_4) + \varphi(x_5);$$

се є більше, чим пятивартостеве, проте $m = 5$ треба відкинути.

$\mu = 2$ треба проте відкинути.

Для $\mu = 3$ дістанемо $v_1 + v_2 + v_3$, а звідси і

$$v_4 + v_5 = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5) - (v_1 + v_2 + v_3),$$

а се є функция виду 14). Подібно як для $\mu = 2$ і ту показати можна, що $\mu = 3$ треба відкинути.

Звідси слїдує, що кожда функция пятивартостева пятьох величин має вид:

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 \qquad 15)$$

де $r_0\ r_1\ r_2\ r_3\ r_4$ є функциї симетричні, а $x$ є одна з пятьох величин.

Наколи $v$ є функция рациональна, що може принимати $m$ ріжних вартостий $v_1\ v_2 \quad v_m$, то наколи утворимо добуток:

$$(v - v_1)(v - v_2) \quad (v - v_m) = q_0 + q_1 v + q_2 v^2 + \quad + q_m v^m = 0, \qquad 16)$$

то $q_0\ q_1 \quad q_m$ є симетричні функциї вартостий $v_1\ v_2\ v_m$

Наколибисьмо приняли, що v є коренем рівняня нисшого степеня, н. пр. рівняня:

$$t_0 + t_1 v + t_2 v^2 + \cdots + v^\mu = o \qquad \mu < m \qquad 17)$$

де t є симетричні функциї, то наколи $v_1$ є одна з вартостий, що сповняє рівнанє 17), то дістанемо:

$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots + t_0 = (v - v_1)P_1.$$

Поміняймо елемента функциї між собою, то дістанемо:

$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots + t_0 = (v - v_2)P_2$$

$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots + t_0 = (v - v_m)P_m$$

$(v-v_1)$, $(v \quad v_2)$, $\quad (v-v_m)$ є проте чинники рівняня 17), або $m=\mu$; а з відси твердженє:

*Наколи функция кількох величин має m ріжних вартостий, то можна найти рівнанє m-того степеня, що його сочинники є симетричними функциями, а коренями його є як раз ті вартости, но не найде ся рівнанє нисшого степеня, що моглоби мати за корені одну або більше з тих вартостий* (IV.).

8. Тепер можемо уже приступити до доказу, що *загальне рівнанє пятого степеня альґебраічно розвязати ся не дасть.*

Наколи загальне рівнанє пятого степеня:

$$x^5 \quad ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = o$$

має мати розвязку альґебраічну, то в склад його кореня ввійдуть функциї виду $v = R^{\frac{1}{m}}$ де R є рациональна функция сочинників рівняня, а *m* є число перве, так як кождий корень, що його виложник є числом зложеним, можна розділити на два або більше коренів, яких виложники є числами первими. v є на основі твердженя (I.) функция рациональна коренів. Маємо проте рівнанє:

$$v^{m'} - R = o.$$

Степеня сього рівнаня знизити не можна, як се слїдує з попередних розслїдів, проте v має на основі твер IV. m ріжних вартостий. А так як се є функция пятьох величин $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$, то m мусить бути подїльником добутку 5!, а що m є число перве, то оно мусить бути рівне 1, 2, 3, 5; но ми знаємо, що не ма функциї 5 величин, якаби мала три ріжні вартости, дальше m не може бути 1, бо корень рівняня не може бути рациональною функциєю сочинників (як було висше сказано), тому лишає ся $m = 5$, або $m = 2$.

Возьмім $m = 5$.

Загальний вид функциї пятивартостевої пятьох величин є:

$$\sqrt[5]{R} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 \qquad 18)$$

Наколи се мемо степенувати, а рівночасно представимо кожде $x^m$, де $m > 4$, в видї (на основі 18):

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$$

то дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[5]{R} - r_0 &= r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 \\ \sqrt[5]{R} - r_0' &= r_1' x + r_2' x^2 + r_3' x^3 + r_4' x^4 \\ & \\ \sqrt[5]{R} - r_0''' &= r_1''' x + r_2''' x^2 + r_3''' x^3 + r_4''' x^4 \end{aligned}\right\}$$

а з відси:

$$x = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}}$$

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\,(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5), \qquad \alpha^5 = 1.$$

Права сторона має 120 вартостий, наколи $s_1 R^{\frac{1}{5}}$ є коренем рівнаня пятого степеня:

$$z^5 - s_1{}^5 R = o;$$

треба проте відкинути $m = 5$ і лишає ся $m = 2$.

Кожда функция двовартостева має вид:

$$v = \alpha + \beta \sqrt{s^2},$$

де $\alpha$ і $\beta$ є функциї симетричні, а $s = \Delta$ є діскрімінант величин $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$.

Але кореня не буде можна представити через таку функцию, так як він є пятивартостевий, проте мусить бути:

$$\sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} = v,$$

де $\alpha$, $\beta \neq o$, а $v$ є рациональна функция коренів.

$$v_1 = \sqrt[m]{\alpha + \beta s}, \qquad v_2 = \sqrt[m]{\alpha - \beta s},$$

$$v_1 v_2 = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2},$$

де виражене під коренем є функция симетрична. Наколи $\sqrt[m]{\alpha^2-\beta^2 s^2}$ не є симетричний, то на основі попередно сказаного $m = 2$, але тоді: $v = \sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}}$ має чотири вартости, що не може бути, бо функция 5 величин не може бути 4-вартостева. Мусить проте бути $\gamma = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$ функция симетрична, отже:

$$v_1 v_2 = \gamma, \quad \text{а з відси:}$$

$$v_1 + v_2 = \sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}}} = p$$

$$v_1 + v_2 = \sqrt[m]{R} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{R}} = p.$$

Найже $p_1, p_2, \quad p_m$ є вартости, які дістанемо з $p$, наколи за $R^{\frac{1}{m}}$ положимо $R^{\frac{1}{m}}, \alpha R^{\frac{1}{m}}, \alpha^2 R^{\frac{1}{m}}, \quad \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}$, $(\alpha = \sqrt[n]{1})$, то наколи утворимо рівнанє:

$$(p-p_1)(p-p_2) \quad (p \quad p^m) = p^m - A_1 p^{m-1} + \cdots \pm A^m = o,$$

то в сочинники $A_1, A_2, \quad A_m$ увійдуть самі цілковиті степені R, бо в сочинниках при дробових степенях вийде яко чинник сума коренів одиниці, а та сума є зером. А коли так, то $A_1 \; A_2$ є симетричні функциї коренів $x_1 \; x_2 \quad x_5$, а так як функция 5 величин не може бути 3-, або 4-вартостева, а не є 2-вартостева, то не може мати виду $\alpha + \beta\sqrt{s^2}$ і не є симетрична, а може бути лиш 5-вартостева, т. є. має вид:

$$\sqrt[5]{R} + \frac{\gamma}{\sqrt[5]{R}} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 = p,$$

а з відси:

$$x = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + s_3 p^3 + s_4 p^4$$

А що $\qquad p = R^{\frac{1}{5}} + \frac{\gamma}{R} R^{\frac{4}{5}}$, то дістанемо:

$$x = t_0 + t_1 R^{\frac{1}{5}} + t_2 R^{\frac{2}{5}} + t_3 R^{\frac{3}{5}} + t_4 R^{\frac{4}{5}},$$

де $t_0, t_1, \quad$ є рациональні функциї R і сочинників рівнаня.

Звідси:

$$t_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) = p',$$

$$t'^5 R = p'^5 = u + u'\sqrt{s^2}$$

$$(p'^5 - u)^2 = u'^2 s^2.$$

Як бачимо рівнане се є 10. степеня що до $p'$, сочинники є симетричні, отже $p'$ малоби 120 вартостий, т. є. дісталнбисьмо супеечність.

Функций, що входять в склад кореня, не можна представити проте рационально через корені тогож рівнаня, що все дасть ся зробити в рівнаню, яке має розвязане альґебраічне; з відси отже слїдує, що рівнане пятого степеня, а тим самим і висших степенів, з загальними сочинниками не мають розвязки альґебраічної.

В сей спосіб маємо переведений доказ Abela о рівнанях висших степенів.

## Дослїди Galois.[1])

Galois перевів свої глубокі дослїди на основі ґрупи рівнаня. Ті його розслїди представимо ту в скороченю.

Возьмім рівнане степеня n:

$$f(x, R', R'', \cdots) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c^n = o \qquad 1)$$

та заложім, що сочинники $c_1\ c_2\ \ c_n$ належать до обсягу чисел рациональних $(R'\ R'', \cdots)$ та що $f(x)$ є неприводне.

Знаємо, що рівнане дає ся розвязати альґебраічно тодї, коли сповняє ся тотожно, наколи за x вставити вираженє, утворене з елементів обсягу рациональности, при помочи слїдуючих операций альґебраічних: додаваня, відниманя, множеня, дїленя, цїлковитого степенованя і витяганя кореня з виложником, що є числом первим. Ряд дїлань потрібних до утвореня такого вираженя альґебраічного зводить ся до:

1°. утвореня функций рациональних з елементів обсягу:

$$F_r\ (R'\ R''\ \ ).$$

2°. витяганя кореня $v_r$, що його виложник є числом первим, з тої функциї, при чім закладаємо, що $F_r$ не є точна степень ряду $p_r$ ніякої функциї з нашого обсягу, бо тодї $v_r$ само вже належалоби до того обсягу. Проте мусить бути:

$$v_r^{p_r} = F_r\ (R'\ R''\ \cdots).$$

---

[1]) Пор. Maser op. cit. Netto: Substitutionentheorie; Vogt: Leçons sur la résolution algébrique des équations.

$3^0$. долученя $v_r$ до обсягу рациональности та утвореня функциї рациональної $F_{r-1}(v_r R' R'' \quad)$ і витягненя з неї кореня $v_{r-1}$ о виложнику $p_{r-1}$; $F_{r-1}$ не може бути точною степенею ряду $p_{r-1}$ ніякої функциї з нового обсягу $(v, R' R'' \text{----})$, отже:

$$v_{r-1}^{p_{r-1}} = F_{r-1}(v_r R' R'' \text{----})$$

$4^0$. долученя $v_{r-1}$ до попередного обсягу рациональности, утвореня функциї $F_{r-2}(v_{r-1} v_r R' R'' \quad)$, рациональної в новім обсягу, і т. д.

Можна проте представити утворенє функциї альґебраїчної, про яку бесїда, т. є. такої, що сповняє тотожно рівнанє 1), при помочи ряду рівнань:

$$\left.\begin{array}{l} v_r^{p_r} = F_r(R' R'' \text{----}) \\ v_{r-1}^{p_{r-1}} = F_{r-1}(v_r R' R'' \quad) \\ v_{r-2}^{p_{r-2}} = F_{r-2}(v_{r-1} v_r R' R'' \text{----}) \\ \\ v_1^{p_1} = F_1(v_2 v_3 \quad v_r R' R'' \quad) \\ x_1 = F_0(v_1 v_2 v_3 \quad v_r R' R'' \quad) \end{array}\right\} \quad 2)$$

де F є функциї рациональні, а p числа беззглядно первї.[1])

Наколи G є ґрупа рівнаня 1) і має ряд зложеня:

$$G, G_1, G_2, \quad G_\mu, 1,$$

а $e_1 e_2 \quad e_\mu e_{\mu+1}$ є відповідні чинники зложеня, то дане рівнанє дасть ся розвязати при помочи постепенного розвязаня рівнань степенів $e_1 e_2 \text{----} e_{\mu+1}$; рівнаня ті мають се свойство, що кожде є неприводне в обсягу рациональности, розширенім через долученє до него коренів попередних рівнань і що в тім новім обсягу коренї виражають ся рационально через один із них; ґрупа рівнаня зводить ся через постепенне долучанє одного кореня кождого із тих рівнань на ґрупи:

$$G_1 G_2 \quad G_\mu, 1. \text{ }^{2})$$

Як бачимо істнує повна анальоґія між тими рівнанями а рівнанями 2). Очевидна проте річ, що постепенне долучанє нерациональностий v зводить ґрупу рівнаня G на ряд ґруп $G, G_1, G_2, \text{----} G_\mu, 1$, які творять ряд зложеня ґрупи G; їх чинники зложеня є точно рівні степеням повисших біноміяльних рівнань. Ґрупа G мусить

---

[1]) Пор. Netto loc. cit. ст. 236, Vogt: loc. cit. ст. 107.
[2]) Netto ibid. ст. 274 і 275, Vogt ibid. ст. 191.

проте бути зложена і мати чинники зложена, що б числами первими, наколи рівнане має ся дати розвязати альґебраічно.

Ся умова є необходима, але і достаточна. Бо приймім, що она ся сповнила, що йроте чинники зложеня ґрупи рівняня б числа перві. Приймім дальше, що ґрупу рівняня в звелисьмо через долучене **Функциї** рациональної коренів, що е означені через одну або більше резольвент, на ґрупу , яка належить до ряду зложеня. Наколи в ^ і е дальша ґрупа в ряді, а рк є число перве, що означає відношене Груп і , то[1]) можна утворити **Функцию** коренів, яка ся відносить до їругш і яка має для підставлень їрупи $p_к$ варгостий коренів рівняня біноміяльного, що його сочинники належать до ґрупи Наколи долучимо одну з тих вартостий т. є. один корень рівняня біноміяльного о виложнику рк , то їрупа зведе ся на ґрупу Наколи в сей спосіб будемо поступати почавиш від то будемо могли утворити ряд рівнань біноміяльних, які ведуть постепенно до розвязаня рівняня.

Можна проте сказати, що необходимою та достаточною умовою, щоби рівнане мало розвязкуальґебраічну, є, щоби чинники зложеня ґрупи рівняня були числами первими.

Рівняня загальні 3. та 4. степеня сповняють сю умову, так як ґрупа першого має чинники зложеня 2 і 3, їрупа другого 2, 3, 2, 2. Ґрупа симетрична — а такою є їрупа загального рівняня[2]) — п елементів на случай п > 4 має чинники зложеня 2 і > а ию сей другий не є числом первим, проте:

Рівнане загальне степеня п > 4 не має розвязки альґебраічно ї.

[1]) на основі твердженя : Наколи ґрупа G ряду г е ґрупою частною ґрупи G' ряду шг (m число беззглядно перве), то істнують функциї, що ся відносять до ґрупи G, такі, що їх m вартостий для підставлень ґрупи G' є коренями рівняня біноміяльного степеня m. (Vogt loc. cit. ст. 40).

[2]) Vogt loc. cit. ст. 79.

# ЧАСТЬ ДРУГА.

## Дослїди Hermite'a.

Розслїди Abel'a, Ruffini'ого та Galois'a показали, що годї на дорозї альґебраїчній шукати розвязки рівнаня пятого степеня; тому то Hermite[1]) почав шукати, чи би не дало ся представити коренів рівнаня пятого степеня при помочи якихсь функций, щоби відносили ся до нових помічних змінних. Тим помічним елєментом показались як раз функциї елїптичні. Hermite розвязку свою пристосував до рівнаня пятого степеня в видї Bring-Jerrarda:

$$x^5 + x + b = o,$$

бо до такого виду дає ся звести загальне рівнанє пятого степеня на основі трансформациї Tschirnhaus'a.

1. Заким приступимо до перетвореня загального рівнаня пятого степеня, мусимо ввести помічне твердженє. Функцию цїлковиту однородну другого степеня о $n$ змінних можна все представити яко суму $\nu$ функций першого степеня, де $\nu \leqq n$.[3])

Наколи функция $v$ є цїлковита однородна другого степеня о $n$ змінних $(x_1\, x_2 \quad x_n)$ і має в собі квадрат одної з тих змінних н. пр. $x_1{}^2$, то можна єї представити в видї:

$$v = \alpha x_1{}^2 + 2Qx_1 + R,$$

де $\alpha$ є стала, ріжна від зера, $Q$ функция першого, а $R$ другого степеня що до $(n-1)$ змінних $(x_2 \quad x_n)$.

Положім:

$$x_1 + \frac{Q}{\alpha} = X_1, \qquad R - \frac{Q_1{}^2}{\alpha} = v_1, \quad \text{то:}$$

$$v = (X_1 \sqrt{\alpha})^2 + v_1,$$

де $V_1$ є функция цїлковита однородна другого степеня $(n-1)$ арґументів.

Наколи $v$ не має в собі квадратів, а лиш добутки, то:

$$v = \beta x_1 x_2 + Qx_1 + Rx_2 + S,$$

[1]) Comptes rendus том 46 рік 1858.

[2]) Пор. Weber: Lehrbuch der Algebra т. I. ст. 175; також Klein: Vorlesungen über das Ikosaëder ст. 143.

[3]) Пор. Zajączkowski: Zasady algebry wyższej ст. 101.

де значінє $\beta$, Q, R, S є очевидне.

$$v = \beta \left(x_1 + \frac{R}{\beta}\right) \left(x_2 + \frac{Q}{\beta}\right) + S - \frac{QR}{\beta},$$

а наколи: $X_1 = \frac{1}{2} \left(x_1+x_2+\frac{Q+R}{\beta}\right)$, $X_2 = \frac{1}{2} \left(x_1-x_2-\frac{Q-R}{\beta}\right)$,

$$v_2 = S - \frac{QR}{\beta},$$

то: $$v = (x_1 \sqrt{\beta})^2 + (x_2 \sqrt{\beta})^2 + v_2,$$

де $v_2$ є функция цїлковита однородна другого степеня $(n-2)$ змінних, а $x_1$ $x_3$ є функциї степеня 1 о n змінних $(x_1 \, x_2 \quad x_n)$.

Наколи так дальше будемо поступати з $v_1$ $v_2$, представимо вкінци v яко суму квадратів, яких число не може бути більше як n.

Твердженє є проте доказане.

2. Возьмім тепер рівнанє пятого степеня:

$$x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = o \qquad 1)$$

та ужиймо підставленя:

$$u = a_0 + a_1x + \cdots + a_4x^4 \qquad 2)$$

де $a_0$ $a_1$ є числа сталї на разї незвісні. Піднесім 2) до степенї 2, 3, 4, та обнижім рівночасно при помочи рівнаня 1) виложники змінної так, щоби нїде не були висші як 4; дістанемо:

$$\left.\begin{array}{ll} u^2 = b_0 + b_1x + \cdots + b_4x^4, & u^5 = e_0 + e_1x + \cdots + e_4x^4 \\ u^3 = c_0 + c_1x + \cdots + c_4x^4 & \\ u^4 = d_0 + d_1x + \cdots + d_4x^4 & \end{array}\right\} \quad 3)$$

де $b_0$ $b_1$ $c_0$ $c_1$ $d_0$ $d_1$ $e_0$ $e_1$ є функциї цїлковиті однородні степеня 2, 3, 4 що до сталих $a_0$ $a_1$ $a_4$.

Означім через $s_1$ $s_2$ $s_5$ суми перших, других, пятих степений коренїв рівнаня 1), а через $S_1$ $S_2$ $S_5$ суми перших, пятих степений коренїв рівнаня з арґументом u, то тодї рівнаня 2) і 3) дадуть:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = 5a_0 + a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + a_4s_4 \\ S_2 = 5b_0 + b_1s_1 + b_2s_2 + b_3s_3 + b_4s_4 \\ \\ S_5 = 5e_0 + e_1s_1 + e_2s_2 + e_3s_3 + e_4s_4 \end{array}\right\} \quad 3')$$

Возьмім походну рівнаня:

$$f(x)=x^5-ax^4+bx^3-cx^2+dx+e \equiv (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5),$$

то дістанемо:

$$5x^4 - 4ax^3 + 3bx^2 - 2cx + d = \frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{(f)x}{x-x_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x-x_5} \qquad 4)$$

Але:

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = x^4+(x_1-a)x^3+(x_1{}^2-ax_1+b)x^2+(x_1{}^3-ax_1{}^2+bx_1-c)x+$$
$$+(x_1{}^4-ax_1{}^3+bx_1{}^2-cx_1+d)$$

$$\frac{f(x)}{x-x_5} = x^4+(x_5-a)x^3+(x_5{}^2-ax_5+b)x^2+(x_5{}^3-ax_5{}^2+bx_5-c)x+$$
$$+(x_5{}^4-ax_5{}^3+bx_5{}^2-cx_5+d);$$

Наколи се вставимо в 4), дістанемо:

$$5x^4-4ax^3+3bx^2-2cx+d=5x^4-(s_1+5a)x^3+(s_2-as_1+5b)x^2+\cdots$$
$$\cdots+(s_4-as_3+bs_2-cs_1+5d),$$

а з відси:

$$\left.\begin{aligned} 4a &= s_1 + 5a \\ 3b &= s_2 - as_1 + 5b \\ 2c &= s_3 - as_2 + bs_1 - 5c \\ d &= s_4 - as_3 + bs_2 - cs_1 + 5d \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

З відси обчислимо $s_1\ s_2 \cdots$, дальше з 3') $S_1\ S_2 \cdots$, а тоді дістанемо на основі взорів анальоґічних до 5) сочинники рівнаня арґументу $u$.

Найже се нове рівнанє має вид:

$$u^5 + q_1u^4 + q_2u^3 + q_3u^2 + q_4u + q_5 = o. \qquad 6)$$

Щоби усунути з того рівнаня $u^4$, $u^3$, $u^2$, треба визначити сталї $a_0$, $a_1$ в рівнаню 2) так, щоби:

$$q_1 = o, \quad q_2 = o, \quad q_3 = o.$$

Перше з тих рівнань є першого степеня що до тих сталих, друге другого, а трете третого степеня.

В тій цїли виражім з рівнаня $q_1=o$ сталу $a_0$ через $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$, і одержану вартість вставмо в рівнаня $q_2=o$, $q_3=o$. Ті два рівнаня перейдуть тодї на $q'_2=o$ і $q'_0=o$.

$q'_2=o$ є тепер функция цїлковита однородна степеня другого що до $a_1, a_2, a_3, a_4$, можна її проте після в горі поданого твердженя представити в виді:

$$f^2 + g^2 + h^2 + k^2 = o,$$

де f, g, h, k є функциї першого степеня.

То рівнане сповнить ся, наколи положимо $f=gi$, $h=ki$. Виражім з тих двох послїдних рівнань, які є степеня 1, сталї $a_1$ і $a_2$ через $a_3$ і $a_4$ і вставмо ті вартости в $q'_3=o$, то дістанемо рівнане $q_3''=o$, що є однородне і третого степеня що до $a_3$ і $a_4$. Наколи одно з тих чисел возьму після вподоби, дістанемо друге через розвязанє рівнаня 3. степеня. А тодї рівнанє 1) перейде на:

$$u^5 + pu + q = o \qquad 7)$$

а наколи положу $u = \rho t$, $p = -\rho^4$, то:

$$t^5 - t - A = o. \qquad 7')$$

Се є форма Bring-Jerrard'a. — Наколи так, то приступимо тепер до розвязаня того рівнаня при помочи функций елїптичних.

3. Між модулами функций елїптичних k і k', де:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{k} &= 2\sqrt[9]{q}\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}\right)^2 = \prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-p^{2m-1}}{1+p^{2m-1}}\right)^2, \\ \sqrt{k'} &= \prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}}\right)^2 = 2\sqrt[4]{p}\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1+p^{2m}}{1+p^{2m-1}}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

і де:

$$q = e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi i} = e^{\varrho\pi i}, \quad p = e^{\frac{-\pi i}{\varrho}}$$

і де k відносить ся до періодів $(\omega, \omega')$, k' до періодів $\left(\frac{\omega}{n}, \omega\right)$, істнує звязь:[1])

$$\sqrt{k'} = \sqrt{k^n}\prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{cn^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{dn^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}.$$

Наколи означимо через $\varepsilon$ одну з $(n+1)$ величин $\frac{2\omega}{n}$, $\frac{\omega'+16t\omega}{n}$ для $t = 0, 1, 2, \ldots \overline{n-1}$, то та звязь для модулїв буде:

$$\sqrt{k_\varepsilon} = \sqrt{k^n}\prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{cn^2(p\varepsilon)}{dn^2(p\varepsilon)}$$

Положім: $\sqrt{k} = u^2$, $\sqrt{k_\varepsilon} = v^2$, то $(n+1)$ вартостий v дістанемо з рівнаня:

$$v = u^n\prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{cn(p\varepsilon)}{dn(p\varepsilon)} \qquad 9)$$

---

[1]) Пор. Briot-Bouquet: Théorie des fonctions elliptiques ст. 318, 542, 624.

а що:[1])

$$\mathrm{cn}(z) = \frac{\Theta(o)}{\Theta_2(o)}\,\frac{\Theta_2(z)}{\Theta(z)}, \qquad \mathrm{dn}(z) = \frac{\Theta(o)}{\Theta_3(o)}\,\frac{\Theta_3(z)}{\Theta(z)},$$

а:[2])

$$\frac{\Theta_3(o)}{\Theta_2(o)} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

то дістанемо:

$$v = u^{\frac{n-1}{n}} \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{n}} \frac{\mathrm{cn}(p\varepsilon)}{\mathrm{dn}(p\varepsilon)} = u \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{n}} \frac{\Theta_2(p\varepsilon)}{\Theta_3(p\varepsilon)} =$$

$$= u \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2mp\varepsilon + m^2\omega')}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left((2m+1)p\varepsilon + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\omega'\right)}} \;{}^{3)} \qquad 10)$$

а з відси:

$$\xi = \frac{v}{u^n} = \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{cn}(p\varepsilon)}{\mathrm{dn}(p\varepsilon)}. \qquad 11)$$

Наколи в вираженю:[4])

$$\frac{\mathrm{cn}(nz)}{\mathrm{dn}(nz)} = \frac{\mathrm{cn}(z)\, \Pi \left[1 - \frac{\mathrm{dn}^2(o)}{\mathrm{cn}^2(o)}\, \mathrm{sn}^2(z)\right]}{\mathrm{dn}(z)\, \Pi \left[1 - k^2 \frac{\mathrm{cn}^2(o)}{\mathrm{dn}^2(o)}\, \mathrm{sn}^2(z)\right]}$$

положимо: $\frac{\mathrm{cn}(nz)}{\mathrm{dn}(nz)} = 1$ дістанемо на $\frac{\mathrm{cn}(z)}{\mathrm{dn}(z)}$ функцию дробову рациональну що до $k^2$ і $\mathrm{sn}^2(z)$. А наколи положимо $z = p\varepsilon$ дістанемо $\xi$ яко функцию симетричну $\frac{n-1}{2}$ величин:

$$\mathrm{sn}^2(\varepsilon),\ \mathrm{sn}^2(2\varepsilon), \qquad \mathrm{sn}^2\left(\frac{n-1}{2}\varepsilon\right) \qquad 12)$$

ті величини відтваряють ся в певнім порядку, наколи заступимо через $a\varepsilon$, де $a$ є число перве менше від $n$, а наколи кожду з тих величин 12) виразити рационально через $\mathrm{sn}^2(\varepsilon)$ і $k^2$, то дістанемо $\xi$ яко функцию рациональну що до $\mathrm{sn}^2(\varepsilon)$ і $k^2$:

$$\xi = F\left(\mathrm{sn}^2(\varepsilon),\ k^2\right).$$

---

[1]) Briot-Bouquet loc. cit. ст. 356.
[2]) ibidem ст. 319.
[3]) ibidem ст. 115.
[4]) ibidem ст. 519, 520.

Позаяк $\xi$ є симетричне що до вартостий 12), а ті вартости відтваряють ся в певнім порядку, наколи за $\varepsilon$ положу $a\varepsilon$, то:

$$F\left(sn^2(a\varepsilon),\ k^2\right) = F\left(sn^2(\varepsilon),\ k^2\right),$$

а наколи заступимо постепенно $\varepsilon$ через $\varepsilon$, $2\varepsilon$, $\frac{n-1}{2}\varepsilon$, то дістанемо:

$$\xi = \frac{2}{n-1}\sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} F\left(sn^2(p\varepsilon),\ k^2\right);$$

а як $\varepsilon$ має $(n+1)$ ріжних вартостий, то і $\xi$ буде мало $(n+1)$ вартостий ріжних, буде проте коренем рівнаня $(n+1)$ степеня що до $\xi$, а в сочинники того рівнаня увійде $k^2$. Наколи $\xi$ заступити через $\frac{v}{u^n}$, дістанемо рівнанє між $u$ і $v$ степеня $(n+1)$ що до $v$, а се рівнанє назве ся **модуловим рівнанєм**. — Наколи заступимо $u$ через $ue^{\frac{2h\pi i}{8}}$, то вартости на $\xi$ не змінять ся, отже $v$ відтворює ся з чинником $e^{\frac{2h\pi ni}{8}}$.

З взорів 8) слїдно, що $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, а також $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ є однозначні функциї величини $\rho$, наколи $s$ в вираженю:

$$\rho = r + si$$

є додатне і ріжне від зера; можна проте положити:

$$\sqrt[4]{k} = \varphi(\rho), \qquad \sqrt[4]{k'} = \psi(\rho),$$

де $\varphi$ і $\psi$ є функциї однозначні. Функциї ті мають слїдуючий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\psi\left(-\frac{1}{\rho}\right) &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-e^{-\frac{2m-1}{\varrho}\pi i}}{1+e^{-\frac{2m-1}{\varrho}\pi i}} = \varphi(\rho)\\
\varphi\left(-\frac{1}{\rho}\right) &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-e^{(2m-1)\varrho\pi i}}{1+e^{(2m-1)\varrho\pi i}} = \psi(\rho)\\
\psi(\rho+1) &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-e^{(2m-1)(\varrho+1)\pi i}}{1+e^{(2m-1)(\varrho+1)\pi i}} =\\
&= \prod\frac{1+e^{(2m+1)\varrho\pi i}}{1-e^{(2m-1)\varrho\pi i}} = \frac{1}{\psi(\rho)}
\end{aligned}\right\} \qquad 13)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\psi(\rho+2) = \frac{1}{\psi(\rho+1)} = \psi(\rho)\\
&\varphi(\rho+1) = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi\rho i}{8}}\, e^{\frac{\pi i}{8}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1+e^{2m\pi\rho i}}{1-e^{(2m-1)\pi\rho i}} = e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)}\\
&\varphi(\rho+2) = e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi(\rho+1)}{\psi(\rho+1)} = e^{\frac{2\pi i}{8}} \varphi(\rho)\\
&\varphi(\rho+2h) = e^{\frac{2h\pi i}{8}} \varphi(\rho)
\end{aligned}\right\} \qquad 13)$$

4. З $(n+1)$ вартостий на $v$, які дістанемо з взору 9), най вартість $V$ відносить ся до періодів $\left(\frac{\omega}{n}\ \omega'\right)$, а $v_t$ до періодів $\left(\omega'\ \frac{\omega'+16t\omega}{n}\right)$.

Вартости ті виразять ся взорами:

$$V = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(n\rho), \qquad v_t = \varphi\, \frac{\rho+16t}{n}. \qquad 14)$$

Покажемо, що так дійсно є.

Рівнанє 10) дає всї вартости $v$ яко однозначні функциї аргументу $\rho$ і наколи приймемо $\rho = si$, то на основі розвинень:[1])

$$\Theta_3(p\varepsilon) = \varphi(q) \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 + q^{2m-1} \cos\frac{2\pi p\varepsilon}{\omega} + q^{2(2m-1)}\right]$$

$$\Theta_2(p\varepsilon) = 2\sqrt[4]{q}\, \varphi(q) \cos\frac{\pi p\varepsilon}{\omega} \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 + q^{2m} \cos\frac{2\pi p\varepsilon}{\omega} + q^{4m}\right]$$

бачимо, що в обох вираженях маємо під знаком добутка величину додатну та дійсну, отже квот $\frac{\Theta_2}{\Theta_3}$ буде також дїйсний, а знак його буде такий, який має $\cos\frac{\pi p\varepsilon}{\omega}$; а що до $V$ належить $\varepsilon = \frac{2\omega}{n}$, то знак буде такий, як у $\cos\frac{2\pi p}{n}$, де $p = \left(1 \quad \frac{n-1}{2}\right)$. Наколи $\frac{n-1}{2}$ є паристе і рівне $2n'$, то наколи $n'$ перших чинників є додатні, а $n'$ слїдуючих відʼємні, то $V$ буде мало знак $(-1)^{n'}$; наколи

[1]) ibidem ст. 315.

$\frac{n-1}{2}$ є непаристе, рівне $2n'-1$, то наколи $n'-1$ чинників є додатних, а $n'$ від'ємних, то V має знак $(-1)^{n'}$; се значить, що V має все знак $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ а так як $\varphi(n\rho)$ є додатне і дійсне, то:

$$V = \sqrt{2}\, e^{n\pi\frac{\omega'}{\omega}i} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-e^{2mn\frac{\omega'}{\omega}\pi i}}{1+e^{2mn\frac{\omega'}{\omega}\pi i}} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(n\rho);$$

отже перший з взорів 14) є правдивий.

Щоби дістати $v_t$, треба покласти: $= \frac{\omega'+16t\omega}{n}$, або $\frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{\rho+16t}{n}$

$$v = u \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(2mp\varepsilon + m^2\omega'\right)}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2m+1)p\varepsilon + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\omega'}};$$

а наколи положимо $\rho+16t=\rho'$, дістанемо на основі 13):

$$u = \varphi(\rho'-16t) = \varphi(\rho').$$

Оно є дійсно додатне для $\rho'=s'i$, а також і:

$$v'_t = \varphi(\rho') \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi\varrho' i\left[\frac{2m+1}{n}p + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\right]}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi\varrho' i\left[\frac{2mp}{n} + m^2\right]}}$$

буде дійсне і додатне для $\rho'=s'i$; так само $\varphi\left(\frac{\rho'}{n}\right)$, як і $v_t$ буде дійсне та додатне:

$$v_t = \sqrt{2}\, e^{\frac{\omega'+16t\omega}{8n\omega}\pi i} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1+e^{2m\frac{\omega'+16t\omega}{n\omega}\pi i}}{1+e^{(2m-1)\frac{\omega'+16t\omega}{n\omega}\pi i}} = \varphi\left(\frac{\rho+16t}{n}\right);$$

отже і другий з взорів 14) є правдивий.

5. В склад v входить ω та ω', означені рівнанями:[1])

$$\omega = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad \omega' = 2i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}$$

Їх точки особливі є $u=o$ та $u=e^{\frac{2h\pi i}{8}}$.

Треба розслїдити проте, як ся поводить v в окруженю тих точок.

Возьмім точку $u = o$.

ω та ω' сповняють рівнанє:[2])

$$\omega \frac{d\omega'}{dk} - \omega' \frac{d\omega}{dk} = -\frac{2\pi i}{k'k^2};$$

з відси:

$$\frac{d\rho}{dk} = -\frac{2\pi i}{\omega^2 k(1-k^2)},$$

а так як:

$$\omega = \pi\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \cdots\right)^{3)}$$

то:

$$\frac{d\rho}{dk} = \frac{2}{\pi i}\left(\frac{1}{k} + Ak + \frac{Bk^3}{2} + \cdots\right) \quad \text{а з відси } (k^2=u^8):$$

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{\pi i}\left(8\log\frac{u}{u_0} + A(k^2-k_0^2) + \frac{B}{2}(k^4-k_0^4) + \cdots\right).$$

Наколи $u=u_0$ описує коло довкола точки зерової, то:

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{\pi i} 8.2\pi i \log\frac{u_0 e}{u_0}, \qquad \text{або:}$$

$$\rho = \rho_0 + 16.$$

V остає проте і дальше однозначне і представляє ся яко ряд степенний арґументу *u*: $\left(\alpha = \frac{n^2-1}{8}\right)$.

$$V = (-1)^\alpha \varphi(n\rho) = (-1)^\alpha \sqrt{2}\, e^{\frac{n\rho\pi i}{8}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1+e^{2mn\rho\pi i}}{1+e^{(2m-1)n\rho\pi i}} =$$

$$= (-1)^\alpha \sqrt{2}\, u^n \Pi \qquad 15)$$

[1]) ibidem ст. 363, 364.

[2]) ibidem ст. 450.

[3]) Пор. н. пр. Schwarz: Formeln u. Lehrsätze z. Gebr. der ellipt. Funct. ст. 53.

а $v_t = \varphi\left(\frac{\rho + 16t}{n}\right)$ переходить на $\varphi\left(\frac{\rho_0 + 16(t+1)}{n}\right) = v_{t+1}$;

проте $n$ иньших вартостий v творить довкола точки зерового систем циклїчний ($v_0\ v_1\ \ v_{n-1}$), а їх розвинене є:

$$v = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi\rho i}{8n}} \prod \frac{1 + e^{\frac{2m\rho\pi i}{n}}}{1 + e^{\frac{(2m-1)\rho\pi i}{n}}} = \sqrt{2}\, u^{\frac{1}{n}} \Pi. \qquad 16)$$

Возьмім другу точку особливу:

$$u = e^{2\pi i} = 1.$$

Функция елїптична, що ся відносить до модулу $k'$, має періоди:

$$\omega_1 = -\omega' i, \quad \omega_1' = \omega i, \quad \text{з відси} \quad \rho' = -\frac{1}{\rho}.$$

$\rho'$ заховує ся так як $\rho$ і має розвинене:

$$\frac{d\rho'}{dk'} = \frac{2}{\pi i}\left(\frac{1}{k'} + Ak' + \frac{B}{2} k'^3 + \quad\right),$$

а з відси:

$$\rho' - \rho'_0 = \frac{1}{\pi i}\left[\log\left(\frac{k'}{k_0'}\right)^2 + A(k'^2 - k_0'^2) + \frac{B}{2}(k'^4 - k_0'^4) + \cdots\right].$$

Наколи змінна $u$ зробить коло довкола точки $e^{2\pi i}$, очевидно в напрямі додатнім, та не обійме нїякої иньшої точки особливої, то $\left[\psi(\rho)\right]^8 = k'^2$ змінить арґумент о $2\pi$, а:

$$\rho' - \rho'_0 = \frac{2\pi i}{\pi i} \log \frac{k_0'^2 e}{k_0'^2} = 2,$$

отжеж: $\quad \rho' = \rho'_0 + 2, \quad$ а що $\quad \rho_0 = -\frac{1}{\rho'_0}, \quad$ то:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - 2\rho_0}.$$

$v_0 = \varphi\left(\frac{\rho}{n}\right) = \psi\left(-\frac{n}{\rho}\right) = \psi(n\rho')$ дійсне та додатне на відтінку (о — 1) остає однозначне, наколи змінна зробить коло довкола точки 1 на основі взорів 14).

V перейде по однім обороті докола точки 1) перейде на $(-1)^\alpha \varphi\left(\frac{n\rho_0}{1 - 2\rho_0}\right)$, а по $\gamma$ оборотах на $(-1)^\alpha \varphi\left(\frac{n\rho_0}{1 - 2\gamma\rho_0}\right)$, а так як $\varphi(\rho') = \pm\, \varphi(\rho)$, наколи зайде умова:[1])

---

[1]) Пор. Briot-Bouquet loc. cit. ст. 629.

$$\left.\begin{aligned} \rho' &= \frac{8a'+(4b'+1)\rho}{(4a+1)+2b\rho} \quad \text{та:} \\ (4a+1)\,(4b'+1) &- 16\,ba' = 1 \end{aligned}\right\} \quad 17)$$

то у нас буде:

$$\frac{\rho_0+16t}{n} = \frac{8a'(1-2\gamma\rho_0)+(4b'+1)n\rho_0}{(4a+1)\,(1-2\gamma\rho_0)+2bn\rho_0} = \frac{\left[8a'+(4b'+1)n-16a'\gamma\right]\rho_0}{4a+1+2\left[bn-(4a+1)\gamma\right]\rho_0}$$

при чім:

$$4(a+1)\;(4b'+1) - 16\,b\,a' = 1.$$

Щоби сповнити ті умови, положім:

$$bn - (4a+1)\,\gamma = o,$$

$$\frac{b}{4a+1} = \frac{\gamma}{n}.$$

Позаяк після умови *b* є перве зглядом $(4a+1)$, то $b = \pm\gamma$, $4a+1 = \pm n$, при чім беру або оба знаки горішні або долїшнї; *n* є число перве і непаристе, може проте мати вид:

$$n = 4n' + 1, \qquad \text{або} \qquad n = 4n' - 1.$$

Наколи $n = 4n' + 1$, то беру $n' = a$, $b = \gamma$ і дістану умову:

$$\rho_0 + 16t = 8a' + \left[(4b'+1)\,n - 16a'\gamma\right]\rho_0;$$

наколи положимо $a' = 2t$, дістанемо вартости на $(4b'+1)$ і на $t$ з взору:

$$n(4b'+1) - 32\gamma t = 1 \qquad 18)$$

а так як між $\varphi\left(\frac{n\rho_0}{1-2\gamma\rho_0}\right)$ і $\varphi\left(\frac{\rho_0+16t}{n}\right)$ є звязь $(-1)^\alpha$, то $V$ перейде на $v_t$. Взір 18) показує, яке $t$ належить до певної вартости $\gamma$. Наколи $\gamma = (1, 2, \quad n-1)$, то на $t$ дістанемо тих самих $(n-1)$ вартостий в певнім порядку.

Дістанемо проте докола точки $u = e^{2\pi i} = 1$ систем коловий вартостий $(V, v_1, v_2, \quad v_{n-1})$, а $v_0$ остає однозначне.

Возьмім дальше точку $u = e^{\frac{2\pi i}{8}}$

Наколи арґумент $u$ перейде осьму часть обводу, тодї:

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{\pi i}\, 8 \log \frac{u_0 e^{\frac{2\pi i}{8}}}{u_0}, \qquad \text{або:}$$

$$\rho = \rho_0 + 2,$$

отже V перейде на:

$$(-1)^{\alpha}\varphi(n\rho_0+2n)=e^{\frac{2n\pi i}{8}}V,$$

а $v_t$ на:

$$\varphi\left(\frac{\rho_0+16t+2}{n}\right)=\varphi\left(\frac{\rho_0+16(t-\alpha)+2n}{n}\right)=e^{\frac{2n\pi i}{8}}V_{t-\alpha}.$$

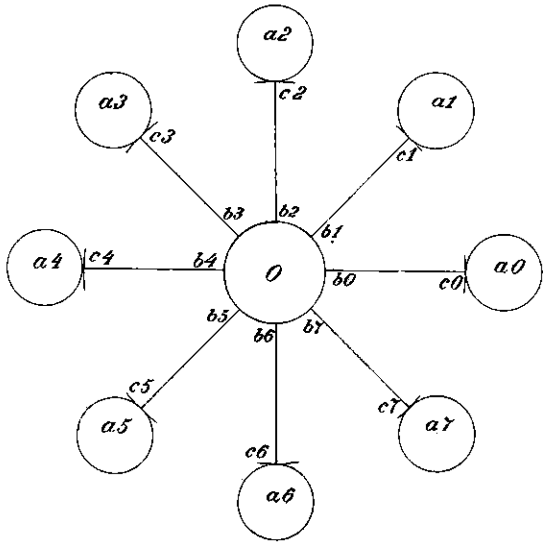
Наколи вийдемо з $b_0$ з вартостию v, то зачеркнувши осьму часть обводу в напрямі додатнім дістанемо в точцї $b_1$ вартість $e^{\frac{2n\pi i}{8}}V$, отже на лїниї $b_1\,a_1$ V буде мало вартости такі, як в відповідних точках на оси xx, помножені через $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$ Звідси наколи перейдемо $b_1a_1$ $\gamma$ разів та дістанемо в точцї $b_1$ якесь $v_{t_\gamma}$, то наколи вернемо до $b_0$ (т. є. окружимо точку $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$), дістанемо $v_{t\gamma+\alpha}$; наколи хочемо звідси дістати v, яке відповідає $\gamma$ окруженям точки $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$, треба найти індекс, який відносить ся до $\gamma$ окружень точки 1 та додати до нього $\alpha$.

Коли возьмемо загально точку $e^{\frac{2h\pi i}{8}}$ то будемо її окружали по луку $b_0\,b_1 \quad b_h=\frac{h}{8}$ части обвода, простій $b_h\,c_h$, колї, що є окруженем тої точки, з поворотом по $c_h\,b_h$ і $b_{h-1} \quad b_0$ (гл. фіґ.).

Наколи арґумент зачеркне $\frac{h}{8}$ частий обводу, то $\rho$ перейде на $\rho_0+2h$, а V на $e^{\frac{2hn\pi i}{8}}V$, а $v_t$ на $e^{\frac{2nh\pi i}{8}}v_{t-h\alpha}$. Наколи вийдемо з точки $b_0$ з вартостию V, перейдемо $\gamma$ разів $b_h\,a_h$, дістанемо в $b_h$ $e^{\frac{2hn\pi i}{8}}v_{t\gamma}$, а коли повернемо до $b_0$, дістанемо $v_{t\gamma+\alpha h}$. Вистане проте найти індекс, що ся відносить до $\gamma$ окружень точки $e^{2\pi i}$ і додати до нього $h\alpha$, а дістанемо індекс v, що ся відносить до $\gamma$ окружень точки $e^{\frac{2h\pi i}{8}}$

6. Функция елїптична о модулї відворотнім має періоди $\omega_1=\omega-\omega'$, $\omega_1'=\omega'$, а звідси звязь, яка є між $\rho$ та $\rho_1$, представить ся:

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\rho}-1,\qquad u_1=\varphi(\rho_1)=\psi\left(-\frac{1}{\rho_1}\right)=\frac{1}{\psi\left(-\frac{1}{\rho}\right)}=\frac{1}{u}.$$


a2
c2
a3
c3
a1
c1
b3
b2
b1
a4
c4
b4
0
b0
c0
a0
b5
b6
b7
c5
c7
a5
a7
c6
a6

Наколи в рівнаню модуловім заступимо *u* через $\frac{1}{u}$, то корені нового рівнаня (v) будуть відворотні до коренів рівнаня першого в якимсь порядку.

Зауважім:

$$(v) = (-1)^{\alpha}\psi\left(-\frac{1}{n\rho_1}\right) = \frac{(-1)^{\alpha}}{\psi\left(-\frac{1}{n\rho_1}-1\right)} = \frac{(-1)^{\alpha}}{\psi\left(-\frac{1+(n-1)\rho}{n\rho}\right)} =$$

$$= \frac{(-1)^{\alpha}}{\varphi\left(\frac{n\rho}{1+(n-1)\rho}\right)};$$

він буде відворотний до якогось кореня $v_\delta$, наколи:

$$\frac{\rho+16\delta}{n} = \frac{8a'+[(4b'+1)n+8a'(n-1)]\rho}{(4a+1)+[2bn+(4a+1)(n-1)]\rho}$$

під умовою:

$$(4b'+1)(4a+1)-16ba'=1.$$

Положім: $2bn+(4a+1)(n-1)=o$, або:

$$\frac{2b}{4a+1} = -\frac{n-1}{2n},$$ де $2b$ є перве до $(4a+1)$.

Наколи $n=4n'+1$, положу $a=n'$, $b=-2n'$, $a'=2\delta$, а тоді дістанемо $b'$ і $\delta$ з умови:

$$16(n-1)\delta + n(4b'+1) = 1 \quad \text{або:}$$

$$16\delta + 5b' = -1, \quad \text{отже } \delta = 4, \quad \text{або:}$$

$$(V) = \frac{1}{v_4}.$$

Возьмім иньше (v) н. пр. $(v_{t'})$, то:

$$(v_{t'}) = \psi\left(-\frac{n}{\rho_1+16t'}\right) = \frac{1}{\psi\left(-\frac{n}{\rho_1+16t'}-1\right)} =$$

$$= \frac{1}{\psi\left(-\frac{n(1-\rho)}{\rho+16t'-16t'\rho}-1\right)} = \frac{1}{\psi\left(-\frac{16t'+n-(16t'-1)\rho}{16t'-(16t'-1)\rho}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\psi\left(\frac{16t'-(16t'-1)\rho}{16t'+n-(16t'-1)\rho}\right)}.$$

Корень сей буде відворотний до $v_t$, наколи: 19)

$$\frac{\rho+16t}{n}=\frac{8(16t'+n)a'+16t'(4b'+1)-\left[(16t'-1)(4b'+1)+8(16t'+n-1)a\right]\rho}{(16t'+n)(4a+1)+32t'b-\left[(16t'+n-1)(4a+1)+2(16t'-1)b\right]\rho}$$

з умовою:

$$(16t'-1)(4b'+1)+8(16t'+n-1)a'=-1.$$

$$(16t'+n-1)(4a+1)+2b(16t'-1)=o.$$

$$\frac{4a+1}{2b}=-\frac{16t'-1}{16t'+n-1},$$ де $(4a+1)$ є перве до 26.

В рівнаню 19) знаменник правої сторони зведе ся до $n$, наколи положу $a=4t'$, $b=8t'+\frac{n-1}{2}$; тодї:

$$t=(16t'+n)\frac{a'}{2}+t'(4b'+1)=\frac{2a'+b'}{4};$$

$a'$ має бути просте паристе, $b'$ многократию 4; кладу тому:

$$a'=2a'',\qquad b'=4b'',\qquad \text{то:}$$

$$(16t'+n)a''+t'(16b''+1)=a''+b''$$

$$(16t'+n-1)a''+t(16t'-1)b''=-t'\qquad a''+b''=t$$

$$(16t'-1)t+na''=-t'.$$

Для $t'=o$ $\quad -t=-5a''$; наколи $a''=1$, то $t=5$, або:

$$(v_0)=\frac{1}{v_0}.$$

Для $t'=2$ $\quad 31t+5a''=-2$; звідси $t=3$, а:

$$(v_2)=\frac{1}{v_3}.$$

Для $t'=3$ $\quad 47t+5a''=-3$; звідси $t=1$, а:

$$(v_3)=\frac{1}{v_1}.$$

Для $t'=4$ $\quad 63t+5a''=-4$, $\quad t=2$, а:

$$(v_4)=\frac{1}{v_2}.$$

Остає $(v_1)$, яке в тім случаю рівнає ся $\frac{1}{V}$.

Для $n=5$ дістанемо 5 вартостий на $v$, іменно:

$$V,\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4.$$

7. Утворім функцию півсиметричну $(v_\alpha v_\beta)$ двох з тих величин, дальше таку функцию двох других та двох послїдних з тих величин

та возьмім функцию симетричну U тих трох функций півсиметричних:

$$U = (V-v_0)(v_1-v_4)(v_2-v_3).$$

Докола особливої точки u=o дістає та функция 5 вартостий:

$$U_0 = (V-v_0)(v_1-v_4)(v_2-v_3)$$
$$U_1 = (V-v_1)(v_2-v_0)(v_3-v_4)$$
$$U_2 = (V-v_2)(v_3-v_1)(v_4-v_0)$$
$$U_3 = (V-v_3)(v_4-v_2)(v_0-v_1)$$
$$U_4 = (V-v_4)(v_0-v_3)(v_1-v_2)$$

так як докола тої точки V' остає без зміни, а $v_t$ переходить на $v_{t+1}$ та маємо систем коловий $(v_0\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4)$.

Докола точки $u=e^{2\pi i}v_0$ остає однозначне, а пять прочих величин творить систем коловий. Порядок індексів дістаєм з взору:

$$32\gamma t-n(4b'+1) = -1, \qquad \gamma = 1, 2, 3, 4.$$

Для $\gamma = 1$ $\quad 8t - 5b' = 1,$ звідси: $t = 2.$

Для $\gamma = 2$ $\quad 16t - 5b' = 1,$ звідси: $t = 1.$

Для $\gamma = 3$ $\quad 24t - 5b' = 1,$ $t = 4.$

Для $\gamma = 4$ $\quad 32t - 5b' = 1,$ $t = 3;$

дістанемо проте систем коловий $(V, v_2, v_1, v_4, v_3)$, а вартости на U є:

$$(v_2-v_0)(v_4-v_3)(v_1-V) = U_1$$
$$(v_1-v_0)(v_3-V)(v_4-v_2) = U_3$$
$$(v_4-v_0)(V-v_2)(v_3-v_1) = U_2$$
$$(v_3-v_0)(v_2-v_1)(V-v_4) = U_4$$
$$(V-v_0)(v_1-v_4)(v_2-v_3) = U_0.$$

U принимає проте в окруженю точки особливої $u=e^{2\pi i}$ ті самі вартости, що докола точки зерової, а що вартости v докола всїх иньших точок особливих зводять ся до вартостий докола точки u=o і $u=e^{2\pi i}$, тому U має лише 5 вартостий на цїлій площи чисельній, отже сповняє рівнанє альґебраічне між *u* і U пятого степеня що до U.

8. Утворім се рівнанє, а вперед розслїдїм його свойства.

v є скінчене для усїх скінчених вартостий u, звідси і U є для всїх скінчених вартостий *u* скінчене. Для $u=\infty$ має V таку саму вартість, як $\frac{1}{v}$ для $u = \frac{1}{\infty}$.

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{u^5} \varPi \frac{1+u^{16(m-1)}}{1+u^{16m}}$$

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{\sqrt{2}\, u^5} + \cdots, \quad V = \sqrt{2}\, u^5 + \cdots$$

отже V є безконечностию 5. степеня, а 5 прочих v є безконечностями степеня $\frac{1}{5}$. Звідси $U_0$ (наколи пропустимо висші степенї) є:

$$U_0 = \left(a_0 u^5 - a_1 u^{\frac{1}{5}}\right)\left(a_2 u^5 - a_3 u^{\frac{1}{5}}\right)\left(a_4 u^{\frac{1}{5}} - a_5 u^{\frac{1}{5}}\right) =$$

$$= \left(b_0 u^{\frac{26}{5}} - b_1 u^{\frac{2}{5}}\right)\left(a_4 u^5 - a_5 u^{\frac{1}{5}}\right) = c_0 u^{\frac{27}{5}} + c_1 u^{\frac{3}{5}} + \cdots$$

U є проте безконечностию $\frac{27}{5}$ степеня Сума рядів від'ємних функциї U є 27.[1])

З того побачимо, якого степеня що до *u* є наше рівнанє. Найже рівнанє f(zu)=o буде степеня m що до $z_1$ а степеня m' що до *u*. Сума рядів u — яке є функциєю z на цїлїй площи чисельній — є зером, або сума рядів додатних рівнає ся сумі рядів від'ємних. Наколи в рівнаню місто *u* возьмемо $u_0+u'$, де $u_0$ є стала якабудь, то так як сума рядів від'ємних є та сама для функций u і u', то і сума рядів додатних остане та сама, т. є. не зависить від сталої $u_0$. Можна проте $u_0$ так дібрати, що не буде ся відносило до нїякого систему (u z) або $\left(u \frac{1}{z}\right)$, який сповняє рівнаня $f(zu) = o$ та $\frac{\partial f}{\partial u} = o$, і що для $u = u_0$ сочинник при $z^{m'}$ не стає ся зером. В кождій з точок корінних рівнаня m'-того степеня $f(zu_0) = o$ ряд функциї u' що до z рівнає ся степеневи рівнаня що до z (очевидно при рівнаня незведенім). Звідси наше рівнанє буде степеня 27. що до u.

---

[1]) Наколи возьму якусь функцию f(z) в точцї t на площи, то все істнує таке число цїле n, (додатне або від'ємне), що квот $\frac{f(z)}{(z-t)^n}$ не є в точцї t анї o анї $\infty$. То n називає ся **рядом** функциї (Lagnerre). Наколи f(z) не стає ся в точцї t анї o анї $\infty$, то ряд функциї є o, наколи стає ся o, ряд є додатний, наколи стає ся $\infty$, ряд є відємний.

Малисьмо $\xi = \frac{v}{u^5}$; положім тепер:

$$\Phi = \frac{U}{u'^5} = (\xi-\xi_0)\,(\xi_1-\xi_4)\,(\xi_2-\xi_3).$$

Сочинники рівнаня арґументу $\xi$ були функциями цїлковитими що до $k^2$ або $u^8$, отже такі будуть і сочинники рівнаня $\Phi$, а що $\Phi$ стає ся $\infty$ лише для $u=o$, то рівнанє буде мало вид:

$$u^{8\beta_0}\Phi^5+\sum_{p=1}^{4}u^{8\beta_p}(a_p+b_pu^8+c_pu^{16}+\cdots)\,\Phi^{5-p}+(a_5+b_5u^8+c_5u^{16}+\cdots)=o.$$

Наколи положимо $\Phi = \frac{U}{u'^5}$ та помножимо через $u^3$, дістанемо:

$$u^{8(\beta_0-9)}U^5+\sum_{p=1}^{4}u^{8(\beta_p-9)+15p}\,(a_p+b_pu^8+\cdots)U^{5-p}+u^3(a_5+b_5u^8+\cdots)=o.$$

Для вартостий *u* дуже малих є всї вартости U дуже малї степеня $\frac{3}{5}$.

Сочинник при $U^5$ положім $= 1$, то $\beta_0 = 9$. Позаяк дальше сочинники є функциї цїлковиті що до $u^8$, проте $\beta_0\ \beta_1\ \beta_2$ мусять бути додатні, а $8(\beta_p - 9) + 15\,p > 3$, або:

$$\beta_p \geqq 10 - 2\,p.$$

Рівнанє має бути дальше степеня 27. що до u, проте в вираженях в скобках підемо до такої степенї $u^8$, що повний степень сочинника не буде більший як 27. Наколи возьмемо $\beta_p = 10 - 2p$, дістанемо рівнанє:

$$U^5+\sum_{p=1}^{4}u^{8-p}\,(a_p+b_pu^8+c_pu^{16})\,U^{5-p}+u^3\,(a_5+b_5u^8+c_5u^{16}+d_5u^{24}) = o. \tag{20}$$

Се буде рівнанє жадане, в якім треба еще визначити сочинники.

9. В тій цїли возьмім функцию:

$$(U) = \big[(V) - (v_0)\big]\ \big[(v_1) - (v_4)\big]\ \big[(v_2) - (v_3)\big],$$

де арґумент є $\frac{1}{u}$.

$$(U) = \frac{-1}{V\, v_0\, v_1\, v_2\, v_3\, v_4} (V-v_2)\,(v_3-v_1)\,(v_4-v_0) = \frac{U}{u^6}$$

на основі 15) і 16); отже наше рівнане не змінить ся, наколи в нїм положу $\frac{1}{u}$ за u, і $\frac{U}{u^6}$ за U; дістанемо тодї:

$$\frac{U^5}{u^{30}} + \sum_{p=1}^{4} u^{p-8}\,(a_p + b_p u^{-8} + c_p u^{-16})\,\frac{U^{5-p}}{u^{6(5-p)}} +$$
$$+ u^{-3}\,(a_5 + b_5 u^{-8} + c_5 u^{-16} + d_5 u^{-24}) = 0.$$

або:

$$U^5 + \sum_{p=1}^{4} (a_p + b_p u^{-8} + c_p u^{-16})\, U^{5-p} + u^3(d_5 + c_5 u^{-8} + b_5 u^{-16} + a_5 u^{-24}) = 0. \tag{21}$$

Наколи порівнаєм 20) і 21), дістанемо для p=1:

$u^{-1}(a_1+b_1u^{-8}+c_1u^{-16}) = u^7(a_1+b_1u^8+c_1u^{16})$; се не може бути, тому сочинник при $U^4$ є зером.

Для p=2: $u^6(a_2+b_2u^{-8}+c_2u^{-16}) = u^6(a_2+b_2u^8+c_2u^{16})$, т. є. $b_2=c_2=0$.
Для p=3: $a_1u^{13}+b_3u^{15}+c_3u^{-3} = a_3u^5+b_3u^{13}+c_3u^{21}$, т. є. $a_3=b_3$, $c_3=0$.
Для p=4: $a_4u^{20}+b_4u^{12}+c_4u^4 = a_1u^4+b_4u^{15}+c_4u^{20}$, т. є. $c_4=a_4$;
а так само $d_5=a_5=c_5=b_5$. Рівнане перейде проте на:

$$U^5+a_2u^6U^3+a_3u^5(1+u^8)U^2+u^4(a_4+b_4u^8+a_4u^{16})U +$$
$$+ u^3(a_5+b_5u^8+b_5u^{16}+a_5u^{24}) = 0.$$

Для u=1, $v_0=1$, а пять иньших вартостий v дасть −1, а всї вартости U є рівні зеру, проте і сочинники при степенях U мусять бути зером для u = 1; т. є. $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $b_4 = -2a_4$, $b_5 = -a_5$, а рівнане перейде на:

$$U^5+a_4u^4(1-u^8)U+a_5u^3(1-u^8)^2(1+u^8) = 0.$$

Треба проте визначити єще тільки $a_4$ і $a_5$.

Вартости *u* дїйснїй додатній та дуже малій відповідає $\rho=si$, де s є додатне, дуже мале; звідси $e^{\rho\pi i} = q$ є додатне, дїйсне та дуже мале:

$$u = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}}\,(1-q^{2m-1}+\cdots).$$

Для m=1 (наколи пропустимо дальші вирази) дістанемо:

$$u = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}}\,(1-9)$$

$$v_0 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{5\cdot 8}}\, \Pi \left( \frac{1+q^{\frac{2m}{5}}}{1+q^{\frac{2m-1}{5}}} \right) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left( 1+q^{\frac{1}{5}} \right)$$

$$v_1 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left( e^{\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{\pi i}{5}\cdot 18} \right); \quad e^{\frac{\pi i}{5}\cdot 18} = e^{\frac{\pi i}{5}\cdot 20}\, e^{-\frac{2\pi i}{5}}$$

$$v_1 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left( e^{\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{-\frac{2\pi i}{5}} \right);$$

так само дістанемо:

$$v_2 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left( e^{\frac{4\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{-\frac{4\pi i}{5}} \right).$$

$$v_3 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left( e^{-\frac{4\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{4\pi i}{5}} \right).$$

$$v_4 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left( e^{-\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{2\pi i}{5}} \right).$$

$$v_1 - v_4 = i\, 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{2\pi}{5}\, q^{\frac{1}{40}} \left( 1+q^{\frac{1}{5}} \right).$$

$$v_2 - v_3 = i\, 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{4\pi}{5}\, q^{\frac{1}{40}} \left( 1+q^{\frac{1}{5}} \right).$$

Звідси:

$$U_0 = 2^{\frac{3}{2}}\, 5^{\frac{1}{2}}\, q^{\frac{3}{40}} \left( 1+q^{\frac{1}{5}} \right).$$

Підставмо се в рівнанє:

$$2^{\frac{15}{2}} 5^{\frac{5}{2}} \left( 1+q^{\frac{1}{5}} \right) + a_4 \left( 2^2 q^{\frac{1}{8}} (1-q^8)^2\, 2^{\frac{3}{2}} 5^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{40}} \left( 1+q^{\frac{1}{5}} \right) \right) +$$
$$+ a_5 2^{\frac{3}{2}} (1-q^3)(1-u^8)^2 (1+u^8) = o.$$

Вільний вираз:

$$2^{\frac{15}{2}} 5^{\frac{5}{2}} + a_5\, 2^{\frac{3}{2}} = o, \qquad a_5 = -\, 2^6\, 5^{\frac{5}{2}}.$$

Сочинник при $q^{\frac{1}{5}}$ $5 \cdot 2^{\frac{15}{2}} 5^{\frac{5}{2}} + a_4 \cdot 2^2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} 5^{\frac{1}{2}} = 0$, т. є. $a_4 = -\, 2^4 5^3$, а наше рівнанє буде:

$$U^5 - 2^4 5^3 u^4 (1-u^8)^2\, U - 2^6 5^{\frac{5}{2}} u^3 (1-u^8)^2 (1+u^8) = 0.$$

А се є форма Bring-Jerrard'a, треба лиш положити:

$$U = 2 \sqrt[4]{5^3}\, u \sqrt{1-8^8}\, t, \qquad \text{дістанемо:}$$

$$t^5 - t - \frac{2}{\sqrt[4]{5^3}} \frac{1+u^8}{u^2 \left( 1-u^8 \right)^{\frac{1}{2}}} = 0;$$

проте:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}\ \frac{1+u^8}{u^2\left(1-u^8\right)^{\frac{1}{2}}} = A.$$

Положім:

$$\frac{\sqrt[4]{5^5}\,A}{2} = a,\qquad \text{то дістанемо:}$$

$$1 + 2u^8 + u^{16} = a^2u^4 - a^2u^{15},\qquad \text{а що } u^4 = k, \text{ то:}$$

$$k^4 + a^2k^3 + 2k^2 - a^2k + 1 = 0.$$

Рівнанє се дає ся альґебраїчно розвязати; знаєм $k$, то можемо найти відповідну йому якусь вартість $q$ з взору:

$$q = \frac{1}{16}\,k^2 + \frac{1}{32}\,k^4 + \frac{21}{1024}\,k^6 + \frac{31}{2048}\,k^8 + \cdots$$

а звідси $\rho$ (бо $q = e^{\rho\pi i}$). Наколи маємо $\rho$, дістанемо 5 вартостий $v$, а дальше належачі до них 5 вартостий $U$; а наколи кожду з тих вартостий подїлимо через $2\sqrt[4]{5^3}\,u\,\sqrt[2]{1-u^8}$, дістанемо розвязку загального рівнаня пятого степеня.

*Тернопіль в маю 1897. р.*