РОЗКЛАДИ ІТО-ВІНЕРА ДЕЯКИХ МОМЕНТІВ ЗУПИНКИ

©*2008 р. Антон ЯЩУК*

Інститут математики НАН України, Київ

Редакція отримала статтю 15 вересня 2008 р.

Розглянуто розклад Іто-Вінера для моменту виходу із обмеженої області d-вимірного вінерівського процесу. У випадку, коли момент виходу обмежені деякою константою, знайдено явний вигляд ядер у розкладі Іто-Вінера.

Цю статтю присвячено знаходженню ядер кратних стохастичних інтегралів, що фігурують у розкладі Іто-Вінера для моментів зупинки, пов'язаних з багатовимірним вінерівським процесом. Інтерес до визначення цих ядер, пов'язаний з інтегралом, побудованим за потоком Арат'я [1].

$$J(U) = \int\limits_0^U \int\limits_0^{\tau(u)} a(x(u,s))dx(u,s), \tag{1}$$

де $\tau(u)$ – "грубо кажучи"момент приклеювання процесу $x(u,s)$ до $x(v,s)$ з меньшим v. А саме, відомо, що (1) є квадратично-інтегровним мартингалом за U. При знаходженні його характеристики і виникає питання вигляду ядер у розкладі Іто-Вінера випадкової величини $\tau(u)$. Зауважимо, що знаходження ядер кратних стохастичних інтегралів, часто пов'язано з розв'язуванням деякого диференціального рівняння. В цій статті також ядра будуть знайдені у результаті розв'язування диференціального рівняння параболічного типу.

Наведемо необхідні позначення. Нехай $\{w(t) : t \geq 0\}$ стандартний вінерівський процес в $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{D}$ – зв'язна обмежена область в $\mathbb{R}^d$. Для довільного $x \in \mathcal{D}$ позначимо

$$\tau_x = \inf\{t : x + w(t) \in \partial\mathcal{D}\} \wedge T, T \in (0, +\infty).$$

УДК 519.21

Ясно, що τ_x є інтегровним з квадратом:

$$M\tau_x^2 < +\infty.$$

Як інтегровний з квадратом функціонал від w випадкова величина τ_x має розклад Іто-Вінера [2]

$$\tau_x = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(a_k(x)), \tag{2}$$

окремі доданки якого є кратними стохастичними інтегралами від w:

$$I_k(a_k(x)) = \sum_{k_1+\ldots+k_d=k} \int_0^T \ldots \int_0^T a_{k_1,\ldots,k_d}(x; s_1, \ldots, s_k) dw_1(s_1) \ldots dw_d(s_k).$$

Зазначимо, що $a_{k_1,\ldots,k_d}$ є симетричним за першими k_1 змінними s_i, за наступними k_2 змінними s_i і т.д.

Мета статті отримати явний вигляд ядер $a_\kappa(x), \kappa = \{k_1, \ldots, k_d\}$. Зауважимо, що розклади типу (2) виникають при вивченні крайових задач з розширеним стохастичним інтегралом для умовних математичних сподівань функціоналів від дифузійних процесів [3]. Для формування твердження про вигляд ядер a_κ введемо такі позначення:

Нехай $k = k_1 + \ldots + k_d$ і $M\{k_1, \ldots, k_d\}$ – усі розбиття множини $\{1, \ldots, k\}$ на d занумерованих груп з k_i елементами в i-й групі, $i = 1, \ldots, d$. Для $r \in M\{k_1, \ldots, k_d\}$ визначимо $r(j)$ – номер групи, в яку потрапив елемент j при розбитті r.

Нехай маємо розбиття r. Позначимо z_j – кількість елементів в $r(j)$-й групі, які не перевищують j. Через ν_i позначимо $\nu_i = k_1 + \ldots + k_{i-1}$. Зокрема $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = k_1$. Для зручності запису також означимо $z_0 = 0$, $r(0) = 0$, $\nu_0 = 0$. Нехай Π_i – множина усіх перестановок множини $\{1, \ldots, k_i\}$, $i = 1, \ldots, d$. Тоді наступна теорема дає явний вигляд ядер a_κ.

Теорема 1. *Нехай $a_{k_1,\ldots,k_d}(x; s_1, \ldots, s_{k_1+\ldots+k_d})$ – ядра із розкладу Іто-Вінера випадкової величини τ_x, тоді*

$$a_{k_1,\ldots,k_d}(x; s_1, \ldots, s_k) =$$

$$= \sum_{r_i \in \Pi_i, i \in \{1,\ldots,d\}} a^*_{k_1,\ldots,k_d}(x; s_{r_1(1)}, \ldots, s_{r_1(\nu_2)}, s_{r_2(\nu_2+1)}, \ldots, s_k),$$

де

$$a^*_{k_1,\ldots,k_d}(x;s_1,\ldots,s_k)=\sum_{r\in M\{k_1,\ldots,k_d\}} I_{\{s_{\nu_{r(1)}+z_1}\leqslant\ldots\leqslant s_{\nu_{r(k)}+z_k}\}}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathcal{D}^{k+1}}\cdots\int G(x,T;\xi_k,s_{\nu_{r(k)}+z_k})\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{k} G'_{1,r(j)}(\xi_j,s_{\nu_{r(j)}+z_j};\xi_{j-1},s_{\nu_{r(j-1)}+z_{j-1}})d\xi_0\ldots d\xi_k ds_0.$$

G – функція Ґріна рівняння теплопровідності в області $\mathcal{D}$, а через $G'_{1,i}$ позначено часткову похідну функції G за i-ю координатою першої змінної.

Доведення. Для знаходження ядер $a_{k_1,\ldots,k_d}$ використаємо перетворення Фур'є-Вінера.

Нехай $\varphi\in L_2([0,T],\mathbb{R}^d)$ з нормою

$$||\varphi||^2=\sum_{k=1}^{d}\int\limits_0^T\varphi_k^2(s)ds,$$

$$\varphi(s)=(\varphi_1(s),\ldots,\varphi_d(s)).$$

Позначимо

$$<\varphi,\xi>=\int\limits_0^T\varphi dw=\sum_{k=1}^{d}\int\limits_0^T\varphi_k(s)dw_k(s).$$

Природно вважати, що ξ є узагальненим ґаусівським випадковим елементом у просторі $L_2([0,T],\mathbb{R}^d)$, який має нульове середнє та тотожний коваріаційний оператор [4]. Визначимо стохастичну експоненту:

$$\mathcal{E}_\varphi=e^{<\varphi,\xi>-\frac{1}{2}||\varphi||^2}.$$

Вона має розклад Іто-Вінера:

$$\mathcal{E}_\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}I_k(\varphi^{\bigotimes k}),$$

де під $I_k(\varphi^{\bigotimes k})$ розуміється

$$I_k(\varphi^{\bigotimes k})=\sum_{k_1+\ldots+k_d=k}\frac{1}{k_1!\ldots k_d!}\int\limits_0^T\ldots\int\limits_0^T\varphi_1(s_1)\ldots\varphi_2(s_{k_1+1})\times\ldots$$

$$\ldots\times\varphi_d(s_k)dw_1(s_1)\ldots dw_d(s_k).$$

Перетворення Фур'є-Вінера [5] випадкової величини τ_x має вигляд

$$\widehat{\tau}_x(\varphi) := M\tau_x\mathcal{E}_\varphi =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+\ldots+k_d=k} \int\limits_0^T \ldots \int\limits_0^T a_{k_1,\ldots,k_d}(x;s)\varphi_1^{\bigotimes k_1} \ldots \varphi_d^{\bigotimes k_d} ds.$$

Це є аналітична функція по $\varphi \in L_2([0,T],\mathbb{R}^d)$ за рахунок оцінки ядер $a_{k_1,\ldots,k_d}$

$$\int\limits_0^T \ldots \int\limits_0^T a^2_{k_1\ldots,k_d} ds_1 \ldots ds_k \leq \frac{C}{k_1! \ldots k_d!},$$

де $C = M\tau_x^2$.

Тому, для того, щоб знайти ядра з розкладу τ_x, достатньо мати значення $\widehat{\tau}_x(\varphi)$ для $\varphi \in C^1([0,T],\mathbb{R}^d)$,$|\varphi| \leqslant K$. Цю константу K ми визначимо пізніше. Скористаємося теоремою Гірсанова [6].

Вважаємо, що Ω – це множина усіх неперервних на $[0,T]$ функцій f зі значеннями в $\mathbb{R}^d$, які задовольняють умову $f(0) = 0$, і P – вінерівська міра на Ω. Координатний процес є вінерівським процесом відносно P.

Введемо позначення:

$$\widetilde{w}_x(t) = w(t) - \int\limits_0^t \varphi(s)ds + x;$$

$\widetilde{P}$ – ймовірнісна міра на Ω, така, що $\frac{d\widetilde{P}}{dP} = \mathcal{E}_\varphi$;

$$\xi_{x,s}(\varphi)(t) = w(t) - w(s) + \int\limits_s^t \varphi(u)du + x \quad - \quad \text{випадковий процес по t},$$

який стартує в момент s;

$$\tau_{x,s} = \inf_{t \geq s}\{t : x + w(t) - w(s) \in \partial\mathcal{D}\} \wedge T;$$

$$\tau_{x,s}(\varphi) = \inf_{t \geq s}\{t : \xi_{x,s}(\varphi)(t) \in \partial\mathcal{D}\} \wedge T;$$

$$F_x : \Omega \to \mathbb{R},$$

$$F_x(g) := \inf\{t : x + g(t) \in \partial\mathcal{D}\} \wedge T.$$

Зауважимо, що F_x є вимірною і $F_x(w(\cdot)) = \tau_{x,0}$. Згідно з теоремою Гірсанова $\widetilde{w}$ є вінерівським процесом відносно $\widetilde{P}$. Тоді

$$M\tau_x\mathcal{E}_\varphi = \int\limits_\Omega F_x(\omega)\mathcal{E}_\varphi(\omega)dP = \int\limits_\Omega F_x(\widetilde{\omega} + \int\limits_0^{\cdot} \varphi(s))d\widetilde{P} = M\tau_{x,0}(\varphi).$$

Аналогічно

$$M\tau_{x,s}\mathcal{E}_\varphi = M\tau_{x,s}(\varphi).$$

Введемо функцію

$$u(x,t) = M\tau_{x,t}(\varphi) - t.$$

Відомо, що згідно з формулою Феймана-Каца [7] $u(x,t)$ задовольняє наступну задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{d}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \sum\limits_{k=1}^{d}\varphi_i\frac{\partial u}{\partial x_i} - 1 \\ u(x,t)\mid_{x\in\partial\mathcal{D}} = 0 \\ u(x,T) = 0, \end{cases}$$

Нехай $u^*(x,t) = u(x,T-t)$. Тоді u^* є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i^2} + \sum\limits_{i=1}^{d}\varphi_i\frac{\partial u^*}{\partial x_i} + 1 \\ u^*(x,t)\mid_{x\in\partial\mathcal{D}} = 0 \\ u^*(x,0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді суми

$$u^*(x,t) = v^*(x,t) + v(x,t),$$

де v^* і v задовольняють наступні задачі Коші відповідно:

$$\begin{cases} \frac{\partial v^*}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 v^*}{\partial x_i^2} + 1 \\ v^*(x,t)\mid_{x\in\partial\mathcal{D}} = 0 \\ v^*(x,0) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \sum\limits_{i=1}^{d}\varphi_i\frac{\partial v^*}{\partial x_i} + \sum\limits_{i=1}^{d}\varphi_i\frac{\partial v}{\partial x_i} \\ v(x,t)\mid_{x\in\partial\mathcal{D}} = 0 \\ v(x,0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Відомо [8], що розв'язок задачі (3) записується у вигляді

$$v^*(x,t) = \int_{\mathcal{D}} \cdots \int \int_0^t G(x,t;\xi,\tau) d\tau d\xi.$$

Розв'язок рівняння (4) шукаємо методом послідовних наближень, тобто будуємо послідовність функцій (v_n) наступним чином:

$$v_0(x,t) = v^*(x,t)$$

$$v_n(x,t) = \int_{\mathcal{D}} \cdots \int \int_0^t G(x,t;\xi,\tau) \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^*}{\partial \xi^i}(\xi,\tau) + \frac{\partial v_{n-1}}{\partial \xi^i}(\xi,\tau) \right) \varphi_i(\tau) d\tau d\xi,$$

$n \geqslant 1$, де під ξ^i розуміється і-та координата точки ξ.

Введемо позначення:

$$A_1(x,t) = \int_{\mathcal{D}} \cdots \int \int_0^t G(x,t;\xi,\tau) \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v^*}{\partial \xi^i}(\xi,\tau) \varphi_i(\tau) \right) d\tau d\xi,$$

$$A_n(x,t) = \int_{\mathcal{D}} \cdots \int \int_0^t G(x,t;\xi,\tau) \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial A_{n-1}}{\partial \xi^i}(\xi,\tau) \varphi_i(\tau) \right) d\tau d\xi$$

Методом математичної індукції можно отримати такі вирази для A_n і v_n

$$A_n(x,t) = \int_{\mathcal{D}^{n+1}} \cdots \int \int_{\Delta_{n+1}(t)} \cdots \int G(x,t;\xi_n,\tau_n) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^d G'_{1,i}(\xi_j,\tau_j;\xi_{j-1},\tau_{j-1}) \varphi_i(\tau_j) d\tau_0 \ldots d\tau_n d\xi_0 \ldots d\xi_n,$$

$$v_n(x,t) = \sum_{k=1}^n A_i(x,t) + A_n(x,t).$$

У цьому виразі під $\Delta_{n+1}(t)$ ми розуміємо симплекс

$$\Delta_{n+1}(t) = \{(s_0,\ldots,s_n) : 0 \leqslant s_0 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant t\}.$$

Для того, щоб послідовність $\{v_n\}$ збігалась, потрібно показати, що A_n досить швидко прямує до 0, коли n прямує до нескінченності. Використаємо оцінку функції Ґріна і її похідних [9]:

$$|G(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C_0|t-\tau|^{-\frac{d}{2}} \exp\left\{-b\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\},$$

$$\left|G'_{1,i}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C_i|t-\tau|^{-\frac{d+1}{2}} \exp\left\{-b\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\}.$$

За допомогою цих оцінок можна оцінити A_n. Нехай $C = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant d} C_i$, тоді

$$|A_n(x,t)| \leqslant C^{n+1} \underset{\mathcal{D}^{n+1}}{\int\cdots\int} \underset{\Delta_{n+1}(t)}{\int\cdots\int} (t-\tau_n)^{-\frac{d}{2}} \exp\left\{-b\frac{(x-\xi_n)^2}{t-\tau_n}\right\} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{d} |\varphi_i(\tau_j)| \,(\tau_j-\tau_{j-1})^{-\frac{d+1}{2}} \exp\left\{-b\frac{(\xi_j-\xi_{j-1})^2}{\tau_j-\tau_{j-1}}\right\} d\tau_0\ldots d\tau_n d\xi_0\ldots d\xi_n \leqslant$$

$$\leqslant (C^*)^{n+1}\left(\max_{s\in[0,t]}\sum_{i=1}^{d}|\varphi_i(s)|\right)^n \underset{\Delta_{n+1}(t)}{\int\cdots\int} \prod_{j=1}^{n}(\tau_j-\tau_{j-1})^{-\frac{1}{2}} d\tau_0\ldots d\tau_n \leqslant$$

$$\leqslant (C^{**})^{n+1}\, T^{\frac{n}{2}} \left(\max_{s\in[0,t]}\sum_{i=1}^{d}|\varphi_i(s)|\right)^n.$$

При другому переході область інтегрування $\mathcal{D}$ була змінена на ширшу $\mathbb{R}^d$, і кожен інтеграл по $\mathbb{R}^d$ оцінена константою. Тепер за константу K, якою були обмежені φ, візьмемо $K = \frac{1}{d(C^{**}T^{\frac{1}{2}}+1)}$. Тоді $|A_n(x,t)| \leqslant \alpha^n$, починаючи з деякого n, де $\alpha < 1$. А це означає, що послідовність v_n збігається і її границю можна подати у вигляді

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\mathcal{D}^{n+1}}{\int\cdots\int} \underset{\Delta_{n+1}(t)}{\int\cdots\int} G(x,t;\xi_n,\tau_n)\times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{d} G'_{1,i}(\xi_j,\tau_j;\xi_{j-1},\tau_{j-1})\varphi_i(\tau_j) d\tau_0\ldots d\tau_n d\xi_0\ldots d\xi_n$$

За функцією v знаходимо u

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\mathcal{D}^{n+1}}\cdots\int\int\limits_{\Delta_{n+1}(T-t)}\cdots\int G(x,T-t;\xi_n,\tau_n)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{d}G'_{1,i}(\xi_j,\tau_j;\xi_{j-1},\tau_{j-1})\varphi_i(\tau_j)d\tau_0\ldots d\tau_n d\xi_0\ldots d\xi_n$$

Перетворення Фур'є-Вінера випадкової величини τ зображається у вигляді:

$$M\tau_x\mathcal{E}_{\varphi}=u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\mathcal{D}^{n+1}}\cdots\int\int\limits_{\Delta_{n+1}(T)}\cdots\int G(x,T;\xi_n,\tau_n)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{d}G'_{1,i}(\xi_j,\tau_j;\xi_{j-1},\tau_{j-1})\varphi_i(\tau_j)d\tau_0\ldots d\tau_n d\xi_0\ldots d\xi_n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\mathcal{D}^{n+1}}\cdots\int\int\limits_{\Delta_{n+1}(T)}\cdots\int G(x,T;\xi_n,\tau_n)\times$$

$$\sum_{k_1+\ldots+k_d=n}\;\sum_{r\in M(k_1,\ldots,k_d)}\;\prod_{j=1}^{n}G'_{1,r(j)}(\xi_j,\tau_j;\xi_{j-1},\tau_{j-1})\cdot$$

$$\cdot\varphi_{r(j)}(\tau_j)d\tau_0\ldots d\tau_n d\xi_0\ldots d\xi_n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1+\ldots+k_d=n}\int\limits_{\Delta_{n+1}(T)}\cdots\int\sum_{r\in M(k_1,\ldots,k_d)}\int\limits_{\mathcal{D}^{n+1}}\cdots\int G(x,T;\xi_n,\tau_n)$$

$$\prod_{j=1}^{n}G'_{1,r(j)}(\xi_j,\tau_j;\xi_{j-1},\tau_{j-1})\varphi_{r(j)}(\tau_j)d\tau_0\ldots d\tau_n d\xi_0\ldots d\xi_n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1+\ldots+k_d=n}\int\limits_{[0,T]^n}\cdots\int I_{\{\tau_1\leqslant\ldots\leqslant\tau_n\}}\int\limits_{0}^{\tau_1}\sum_{r\in M(k_1,\ldots,k_d)}\int\limits_{\mathcal{D}^{n+1}}\cdots\int G(x,T;\xi_n,\tau_n)$$

$$\prod_{j=1}^{n}G'_{1,r(j)}(\xi_j,\tau_j;\xi_{j-1},\tau_{j-1})\varphi_{r(j)}(\tau_j)d\xi_0\ldots d\xi_n d\tau_0 d\tau_1\ldots d\tau_n.$$

Позначимо через R_i i-ту множину із розбиття r, що складається з k_i елементів. Для зручності припустимо, що кожна множина R_i впорядкована за зростанням, тобто на першому місці стоїть найменший елемент, далі найменший серед тих, що залишилися, і т.д. Перепозначимо змінні $\tau_k, k \geqslant 1$:

$$s_{\nu_i+j} = \tau_{q_{i,j}},$$

де $q_{i,j} = \min\{l : l \in R_i/\{q_{i,1}, \ldots, q_{i,j-1}\}\}$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, $j \in \{1, \ldots, k_i\}$. Зазначимо, що $q_{i,j}$ – це число, що стоїть на j-му місці у впорядкованій групі R_i. $q_{i,j}$ визначаються послідовно через попередні $q_{l,m}$, $l \in \{1, \ldots, i-1\}$ та $m \in \{1, \ldots, k_i\}$ і $l = i$, $m \in \{1, \ldots, j-1\}$. Перші k_1 змінних відповідають τ_i, що стоять у аргументах добутку функцій φ_1, наступні k_2 змінних – τ_i, що стоять у аргументах добутку функцій φ_2 і т.д. Неважко помітити, що $\tau_j = s_{\nu_{r(j)}+z_j}$, $\tau_0 = s_{\nu_{r(0)}+z_0} = s_0$. Тоді маємо

$$M\tau_x\mathcal{E}_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+\ldots+k_d=n} \int\limits_{[0,T]^n}\cdots\int a^*_{k_1,\ldots,k_d}(x; s_1, \ldots, s_n)\times$$
$$\times\varphi_1^{\otimes k_1}(s_1, \ldots, s_{k_1})\ldots\varphi_d^{\otimes k_d}(s_{\nu_d+1}, \ldots, s_{\nu_d+k_d})d\tau_1\ldots d\tau_n, \tag{5}$$

де

$$a^*_{k_1,\ldots,k_d}(x; s_1, \ldots, s_n) =$$
$$= \sum_{r\in M\{k_1,\ldots,k_d\}} I_{\{s_{\nu_{r(1)}+z_1}\leqslant\ldots\leqslant s_{\nu_{r(n)}+z_n}\}} \int\limits_{\mathcal{D}^{n+1}}\cdots\int G(x, T; \xi_n, s_{\nu_{r(n)}+z_n})$$
$$\times\prod_{j=1}^{n} G'_{1,r(j)}(\xi_j, s_{\nu_{r(j)}+z_j}; \xi_{j-1}, s_{\nu_{r(j-1)}+z_{j-1}})d\xi_0\ldots d\xi_n ds_0.$$

Функція $a^*_{k_1,\ldots,k_d}(x; s_1, \ldots, s_n)$ не обов'язково є симетричною відносно перших k_1 змінних (не враховуючи x), по других k_2 змінних і т.д. Тому шукане ядро $a(x; s_1, \ldots, s_n)$ є симетризацією a^* по перших k_1 змінних, k_2 других змінних і т.д. Тобто

$$a_{k_1,\ldots,k_d}(x; s_1, \ldots, s_n) =$$
$$= \sum_{r_i\in\Pi_i, i\in\{1,\ldots,d\}} a^*_{k_1,\ldots,k_d}(x; s_{r_1(1)}, \ldots, s_{r_1(k_1)}, s_{\nu_2+r_2(1)}, \ldots, s_{\nu_d+r_d(k_d)}).$$

Оскільки ядра знаходяться однозначно за $M\tau_x\mathcal{E}_\varphi$ і $a_{k_1,\ldots,k_d}$ мають потрібну симетрію за змінними і задовольняють (5), то $a_{k_1,\ldots,k_d}$ – шукані ядра. Теорему доведено.

1. Дороговцев А.А., Мерозначные процессы и стохастические потоки. – К.:Ин-т математики НАН Украины, 2007. – С.289.

2. Хида Т., Броуновское Движение. – М.:Наука, 1987. – С.304.

3. Dorogovtsev A.A., Smoothing problem in anticipating scenario. – Ukrain. Mat. Zh, 2005. – C.1218-1234.

4. Дороговцев А.А., Стохастический анализ и случайные отображения в гильбертовом пространстве. – К.:Наукова думка., 1992. – С.120.

5. Саймон Б.,Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. – М.:Наука, 1976. – 358с.

6. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.,Статистика случайных процессов. – М.:Наука, 1974. – С.696.

7. Оксендаль Б., Стохастические дифференциальные уравнения. – М.:Мир, 2003. – С.408.

8. Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа. – М.:Мир,1980. – С.427.

9. Ивасишен С.Д., Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев.:Выща Школа,1990. – С.198.

ITO-WIENER EXPANSION FOR STOPPING TIMES

Anton YASHCHUK

Institute of Mathematics of NASU,
3 Tereshchenkivska Str., Kyiv 01601, Ukraine

Ito-Winer expansion for a moment of the exit from the bounded domain of d-dimensional winer process is considered. In the case, when the moment of the exit from the bounded domain is bounded some constant, we find explicit air of kernels in Ito-Winer expansion.