ВІЛЬНІ НАПІВГРУПИ, ЩО ПОРОДЖУЮТЬСЯ АНАЛІТИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

©2008 р. Михайло СУМАРЮК

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Редакція отримала статтю 10 жовтня 2008 р.

Наводяться нові достатні умови при виконанні яких напівгрупа, породжена двома аналітичними функціями буде вільною напівгрупою. Показано застосування цих умов до конкретних прикладів напівгруп.

1 Вступ

Зображення вільних конструкцій груп та напівгруп за допомогою геометричних та алгебро-комбінаторних об'єктів, нині вже складає певний напрямок досліджень у теорії груп та напівгруп. Відомі, наприклад, зображення Магнуса формальними степеневими рядами [2], зображення унітрикутними матрицями нескінченного порядку [4], зображення вільних груп у вінцевих добутках [3], матричне зображення Санова [5, с.98] і т.ін.

Найчастіше будуються приклади вільних 2-породжених груп (напівгруп), тобто будується зображення вільної групи (напівгрупи) рангу 2, бо добре відомо, що така група (напівгрупа) містить ізоморфну копію будь-якої вільної групи (напівгрупи) скінченного або зліченного рангу.

Серед усіх зображень вільних алгебраїчних конструкцій, виділяються зображення елементарними функціями над полями нульової характеристики відносно дії суперпозиції функцій.

Зазначимо, наприклад, що у роботах С. Коена [8] та С. Уайта [9] доводиться, що перетворення дійсного або комплексного поля $f_1 : x \to x+1$ та $f_2 : x \to x^q$, де $q > 1$ – фіксоване натуральне число у випадку поля

УДК 512.53

$\mathbb{R}$ і довільне натуральне число у випадку поля $\mathbb{C}$, породжують вільну групу (напівгрупу).

У книзі [1] розглядається приклад групи, яку прийнято називати модулярною групою, що породжується певними двома дробово-лінійними перетвореннями, які у даній групі мають скінченні порядки 2 та 3, при цьому ця група розкладається у вільний добуток циклічних груп, що породжені її твірними елементами. Інші приклади вільних груп (напівгруп) дробово-лінійних перетворень досліджувалися у роботах [6-7].

У даній роботі наводяться нові достатні умови вільності напівгруп, що породжуються парою аналітичних функцій у деякій області комплексної площини, які розкладаються у степеневі ряди певного вигляду. Наведені умови застосовуються до напівгруп, породжених конкретно вибраними функціями, що дозволило побудувати нові зображення вільних функціональних напівгруп рангу 2.

2 Допоміжні відомості

Нехай $f, g : \Omega \to \Omega$ – аналітичні функції в області Ω комплексної площини $\mathbb{C}$, які розкладаються у степеневі ряди вигляду

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (z - x_0)^n, \tag{1}$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - x_0)^n, \ \ b_1 \neq 0, \tag{2}$$

які збігаються у даній області Ω і впорядковані за степенями $(z - x_0)$, де $x_0 \in \mathbb{R}$.

Символом $N[\Omega]$ позначатимемо сукупність усіх аналітичних функцій $f : \Omega \to \Omega$, які розкладаються у степеневий ряд виду (1); символом $P[\Omega]$ позначатимемо сукупність усіх аналітичних функцій $g : \Omega \to \Omega$, які разом із своїми n-кратними ($n \in \mathbb{N}$) суперпозиціями розкладаються у степеневий ряд виду (2). Зазначимо, що будь-яка n-кратна ($n \in \mathbb{N}$) суперпозиція функції f належить до $N[\Omega]$, що випливає із властивостей суперпозиції степеневих рядів, тобто підстановки ряду в ряд і перевіряється безпосередньо.

Дані функції $f, g : \Omega \to \Omega$ відносно дії суперпозиції функцій породжують напівгрупу, яку позначимо літерою S, оскільки визначена будь-яка суперпозиція подана у вигляді напівгрупового слова від функцій f та g.

Має місце наступне твердження.

Лема. *Якщо перетворення $f, g : \Omega \to \Omega$ є сюр'єктивними, то S – напівгрупа із скороченням справа.*

Доведення. Справді, для довільних функцій $\varphi, \psi, h \in S$ таких, що $\varphi \circ h = \psi \circ h$ ($\circ$ – операція суперпозиції функцій) випливатиме рівність $\varphi = \psi$. Нехай навпаки, існує така точка $z_0 \in \Omega$, для якої $\varphi(z_0) \neq \psi(z_0)$. Тоді із сюр'єктивності перетворень $f, g : \Omega \to \Omega$ випливає сюр'єктивність усіх елементів напівгрупи S, зокрема, перетворення $h : \Omega \to \Omega$, що задовольняє рівність $\varphi \circ h = \psi \circ h$, є сюр'єктивним. Тому існує точка $z_1 \in \Omega$ така, що $z_0 = h(z_1)$. У результаті дістанемо умову $\varphi(h(z_1)) \neq \psi(h(z_1))$, яка приводить до суперечності з рівністю $\varphi \circ h = \psi \circ h$ і доводить сформульоване твердження.$\square$

Нехай $\varphi : \Omega \to \Omega$ – деяка диференційовна функція. Тоді n-кратну суперпозицію цієї функції позначатимемо символом $\varphi^{(n)}$, тобто

$$\varphi^{(n)}(z) = (\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n})(z), \ z \in \Omega, \ n \in \mathbb{N},$$

а її похідну записуватимемо так: $D_z\varphi(z)$, де D_z – оператор диференціювання по змінній $z \in \Omega$.

3 Основна теорема

Нехай $D = \mathbb{R}$ або $D = (x_0 - a; x_0 + a)$, де x_0 – центр степеневих рядів (1), (2), а $a > 0$ – фіксоване додатне число. Тоді достатні умови вільності напівгрупи, породженої парою аналітичних функцій, сформулюємо у такому вигляді.

Теорема 1. *Нехай $f \in N[\Omega]$, $g \in P[\Omega]$ і виконуються наступні умови:*

1) дані функції є сюр'єктивними;

2) множина D міститься в області Ω і функції f та g переводять її в себе;

3) довільна n-кратна суперпозиція $g^{(n)}(z)$, $z \in \Omega$, відмінна від тотожного перетворення $e : \Omega \to \Omega$;

4) функції $f, g : D \to D$ є строго зростаючими на проміжку $D \cap [x_0; +\infty)$;

5) для довільного $x \in D \cap [x_0; +\infty)$ виконується нерівність $D_x g(x) > 0$, причому $g(x_0) \in D \cap (x_0; +\infty)$;

6) для довільного $x \in D \cap (x_0; +\infty)$ виконується нерівність $D_x f(x) > 0$;

7) правильною є нерівність $f(x_0) \geq x_0$.

Тоді напівгрупа S, породжена функціями f та g, є вільною напівгрупою рангу 2 відносно вільної бази $\{f, g\}$.

Доведення. Нехай $X = \{x_1, x_2\}$ – алфавіт з двох символів. Розглянемо два напівгрупові слова $u \equiv u(x_1, x_2)$ та $v \equiv v(x_1, x_2)$ над даним алфавітом X, які відрізняються своїми записами у розумінні графічного порівняння слів. Знайдемо значення слів u та v на функціях f та g відносно операції суперпозиції функцій, поклавши замість літери x_1 функцію f, а замість літери x_2 відповідно функцію g. У результаті дістанемо нові функції $u(f,g)$ та $v(f,g)$.

Оскільки всі n-кратні суперпозиції $f^{(n)} \in N[\Omega],\ g^{(n)} \in P[\Omega]$, причому $g^{(n)} \neq e$ (умова 3) і також $f^{(n)} \neq e$, бо тотожне перетворення e області Ω не належить до $N[\Omega]$, крім того, $N[\Omega] \cap P[\Omega] = \emptyset$, то напівгрупові слова $u(f,g), v(f,g)$ є нескоротними або незвідними над множиною функцій $\{f,g\}$.

Отже, для доведення сформульованої теореми слід показати, що із нерівності незвідних напівгрупових слів $u(f,g)$ та $v(f,g)$ над множиною двох літер $\{f,g\}$ у розумінні графічного порівняння слів, випливає, що ці слова є нерівними над множиною функцій $\{f,g\}$. Іншими словами, слід показати, що тотожність

$$u(f(z), g(z)) \equiv v(f(z), g(z)),\ z \in \Omega, \tag{3}$$

є невірною.

Припустимо, що тотожність (3) є правильною. Оскільки перетворення $f, g : \Omega \to \Omega$ є сюр'єктивними (умова 1), то згідно із наведеною лемою у попередньому пункті маємо, що S – напівгрупа із скороченням справа. Тому можемо вважати, що напівгрупові слова u та v закінчуються різними символами з множини літер $\{f,g\}$, бо якщо ці слова мають однакові закінчення, то скориставшись властивістю скорочення справа у напівгрупі S, їх спільні закінчення можна відкинути.

Нехай для визначеності слово u закінчується літерою f, а слово v закінчується літерою g. Тоді слова u та v подаються у вигляді

$$u(f,g) = \tilde{u}(f,g) \circ f^{(\alpha)}, \quad v(f,g) = \tilde{v}(f,g) \circ v^{(\beta)},$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, напівгрупове підслово $\tilde{u}$ слова u або закінчується літерою g, або є порожнім; аналогічно напівгрупове підслово $\tilde{v}$ слова v або закінчується літерою f, або є порожнім.

Таким чином, отримуємо тотожність.

$$(\tilde{u}(f,g) \circ f^{(\alpha)})(x) \equiv (\tilde{v}(f,g) \circ v^{(\beta)})(x), \tag{4}$$

яку розглядатимемо для всіх $x \in D$.

Знайдемо похідну лівої та правої частини тотожності (4) у точці x_0. У результаті прийдемо до рівності

$$D_x(\tilde{u}(f,g)(f^{(\alpha)}(x_0)))D_x f^{(\alpha)}(x_0) = D_x(\tilde{v}(f,g)(g^{(\beta)}(x_0)))D_x g^{(\beta)}(x_0), \tag{5}$$

де D_x – оператор диференціювання по змінній $x \in D$. Проаналізуємо одержану рівність. Оскільки функція $f^{(\alpha)} \in N[\Omega]$, то продиференціювавши почленно степеневий ряд виду (1), одержимо також степеневий ряд, який при $z = x_0$ набуває нульового значення. Таким чином, число $D_x f^{(\alpha)}(x_0) = 0$, а тому ліва частина рівності (5) перетворюється в нуль.

Розглянемо тепер праву частину рівності (5). Отже, обчислимо похідну

$$D_x g^{(\beta)}(x_0) = D_x g(g^{(\beta-1)}(x_0)) D_x g(g^{(\beta-2)}(x_0)) \cdot \ldots \cdot D_x g(x_0). \qquad (6)$$

Оскільки функція $g : D \to D$ є строго зростаючою на проміжку $D \cap [x_0; +\infty)$ (умова 4) і виконується нерівність $g(x_0) > x_0$ (умова 5), то всі числа

$$g^{(\beta-1)}(x_0)), g^{(\beta-2)}(x_0), \ldots, g(x_0), x_0$$

(у випадку, коли $\beta = 1$ маємо $g^{(0)}(x_0) \equiv x_0$) належать проміжку $D \cap [x_0; +\infty)$. Тому згідно із умовою 5 всі множники, що входять до правої частини рівності (6) є додатними і, як наслідок, число $D_x g^{(\beta)}(x_0)$ також є додатним. Зазначимо, що тоді напівгрупове слово $\tilde{v}$ не є порожнім, бо інакше рівність (5) буде суперечливою: права її частина не дорівнює нулеві, а ліва частина, як показано вище, перетворюється в нуль.

Нехай символ $[w]$ означає запис деякого слова w скінченної довжини у зворотному порядку. Тоді

$$[\tilde{v}] = f^{(\alpha_1)} \circ g^{(\beta_1)} \circ f^{(\alpha_2)} \circ g^{(\beta_2)} \circ \ldots \circ h_j^{(\gamma_j)} \ (j \in \{1, 2\}), \qquad (7)$$

де $h_1^{(\gamma_1)} = f^{(\alpha_k)}$, $h_2^{(\gamma_2)} = g^{(\beta_k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Знайдемо похідну функції $\tilde{v}(f, g)$ у точці $y_0 \equiv g^{(\beta)}(x_0)$. Тоді зважаючи на вигляд (7) зворотного слова $[\tilde{v}]$ до слова $\tilde{v}$ одержимо, що

$$D_x \tilde{v}(f, g)(y_0) = D_x f^{(\alpha_1)}(y_0) D_x g^{(\beta_1)}(f^{(\alpha_1)}(y_0)) \cdot \ldots \cdot D_x h_j^{(\gamma_j)}([w](y_0)), \quad (8)$$

де j – фіксоване число з множини $\{1, 2\}$, $[w]$ – зворотне слово до слова w, яке отримується із слова $[\tilde{v}]$ шляхом викреслювання його закінчення $h_j^{(\gamma_j)}$, зокрема, якщо $[w] = \emptyset$, то покладаємо

$$h_j^{(\gamma_j)}([w](y_0)) = 1, \ j \in \{1, 2\}.$$

Оскільки функція $g : D \to D$ є строго зростаючою на проміжку $D \cap [x_0; +\infty)$ і виконується нерівність $g(x_0) > x_0$ (умови 4 та 5), то звідси випливають нерівності

$$y_0 \equiv g^{(\beta)}(x_0) > g^{(\beta-1)}(x_0) > \ldots > x_0.$$

Також враховуючи нерівність $f(x_0) \geq x_0$ умови 7 та умову 4 одержимо нерівність $f^{(n)}(x_0) \geq x_0$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. Звідси отримуємо, що всі множники правої частини рівності (8) подаються у вигляді

$$D_x h^{(k)}(x),\ h \in \{f, g\},\ x \in D \cap (x_0; +\infty),\ k \in \mathbb{N}.$$

Для кожного $x \in D \cap (x_0; +\infty)$ маємо рівність

$$D_x h^{(k)}(x) = D_x h(h^{(k-1)}(x)) D_x h(h^{(k-2)}(x)) \cdot \ldots \cdot D_x h(x), \tag{9}$$

де $h \in \{f, g\}, h^{(0)}(x) \equiv x,\ x \in D \cap (x_0; +\infty), k \in \mathbb{N}$, причому всі точки

$$h^{(k-1)}(x), h^{(k-2)}(x), \ldots, h(x), x,\ h \in \{f, g\},\ k \in \mathbb{N},$$

належать проміжку $D \cap (x_0; +\infty)$. Тоді згідно із умовами 5 та 6 похідні функції $h \in \{f, g\}$ у вказаних точках є додатними. Звідси випливає, що число, визначене правою частиною рівності (9), також є додатним і, як наслідок, число $D_x \tilde{v}(f, g)(y_0)$ є додатним.

Таким чином, права частина рівності (5) є додатним числом, а ліва її частина перетворюється в нуль. Отримали суперечність. Це означає, що припущення щодо виконання тотожності (3) є невірним. У результаті отримуємо те, що й потрібно було довести. $\square$

4 Застосування

Розглянемо два многочлени

$$f(z) = a_0 + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \tag{10}$$

$$g(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m, \tag{11}$$

натурального степеня, де $z \in \mathbb{C}$ і всі коефіцієнти цих многочленів є дійсними невід'ємними числами, причому $a_n b_m \neq 0$ та $b_1 \neq 0$. Тоді $f \in N[\mathbb{C}]$ і $g \in P[\mathbb{C}]$.

Зазначимо, що будь-який многочлен φ ненульового степеня здійснює сюр'єктивне відображення комплексной площини $\mathbb{C}$ в себе, оскільки для будь-якого числа $z_0 \in \mathbb{C}$ алгебраїчне рівняння $\varphi(z) = z_0$ має принаймні один комплексний розв'язок (основна теорема алгебри).

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Многочлени f та g, визначені рівностями (10), (11) породжують вільну напівгрупу рангу 2.*

Доведення цього твердження отримується безпосередньо за допомогою теореми 1, оскільки многочлени f та g задовольняють її умовам очевидним чином.

Наслідок. *Перетворення комплексного поля* $f(z) = z^n$, $n > 1$, *та* $g(z) = z + 1$ *породжують вільну напівгрупу рангу 2.*

Напівгрупа, що наведена у цьому наслідку, є напівгрупою Коена-Уайта, яка досліджувалася у роботах [8, 9].

Наведемо без доведення інші системи функцій, які задовольняють умови теореми 1 і породжують вільні напівгрупи:

1) $f(z) = z^2$, $g(z) = 1 + z\exp(z^2 - 1)$, $z \in \mathbb{C}$;
2) $f(z) = 1 + (z + 2)^3$, $g(z) = 1 + (z + 2)\exp(z + 2)$, $z \in \mathbb{C}$;
3) $f(z) = 1 + z^3$, $g(z) = 1 + z\exp(\exp z)$, $z \in \mathbb{C}$.

[1] Курош А.Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

[2] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 456 с.

[3] Олійник А.С. Вільні групи автоматних підстановок // Доп. НАН України. – 1998. – №7. – С. 40-44.

[4] Олийнык А.С., Сущанский В.И. Свободная группа бесконечных унитреугольных матриц // Мат. заметки. – 2000. – **67**, №3, – С. 386-391.

[5] Общая алгебра. Т.I./О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков и др. Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. - М.:Наука,1990. - 592с.

[6] Игнатов Ю.А., Груздева Т.Н., Свиридова И.А. Свободные группы дробно-линейных преобразований. Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 1999. Т.5. Вып.1. С.116-120.

[7] Lyndon R.S., Ullman J.L. Groups generated by two parabolic linear fractional transformations. Can. J. Math. 1969. V21. №6. P.1388-1403.

[8] Cohen S.D. The group of translations and positive rational powers is free // Quart. J.Math. Oxford. – 1995. – **46**, №2. – P. 21-93.

[9] White S. The group, generated by and is free // Journal of Algebra. – 1988. – **118**. – P. 408-422.

FREE SEMIGROUPS GENERATED BY ANALYTICAL FUNCTIONS

Mykhaylo SUMARYUK

Taras Shevchenko Kyiv National University

New sufficient conditions are determined. Under their implementation the semigroup generated by two analytical functions will be a free semigroup. Such conditions aplications in specified examples of semigroups are shown.