РОЗКЛАД ІТО-ВІНЕРА ТА ВЛАСТИВОСТІ ЛОКАЛЬНОГО ЧАСУ ДЛЯ ҐАУССІВСЬКОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ*

©*2008 р. Олексій РУДЕНКО*

Інститут математики НАН України

Редакція отримала статтю 24 вересня 2008 р.

Нехай (T, ν) – сепарабельний метричний простір зі скінченною мірою на його борелівській σ-алгебрі, $\{\xi(t) \in \mathbb{R}^d, t \in T\}$ – центроване ґауссівське випадкове поле. Ми визначаємо локальний час в нулі для ξ, як границю виразу $\int\limits_T f(\xi(t))\nu(dt)$, коли функція f наближає дельта-міру в нулі та розглядаємо таке наближення дельта-міри: $f_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-d/2}\varepsilon^{-d}e^{-\|x\|^2/2\varepsilon^2}$. Границя розглядається в сенсі збіжності за ймовірністю або у деякому соболевському просторі. Ми знаходимо розклад Іто-Вінера для наближень локального часу та самого локального часу (якщо він існує у сенсі збіжності в соболевському просторі) у вигляді інтегралів від деякої випадкової функції. Цей розклад використано для доведення інваріантності локального часу відносно деякого класу перетворень пари (ξ, ν). Також ми доводимо існування границі за ймовірністю модифікованих наближень локального часу за слабкої умови на процес ξ та міру ν.

1 Вступ

Локальний час в точці є характеристикою випадкового процесу, яка описує його локальну поведінку в околі цієї точки. Відомо, що траєкторії випадкового процесу можуть не мати похідної, наприклад для одновимірного вінерівського процесу, але при цьому локальний час може існувати (для одновимірного вінерівського процесу він існує та є неперервним, див. [14]). У цьому випадку локальний час може служити

*Робота виконана у рамках спільного україно-російського науково-дослідного проекту "Асимптотична поведінка стохастичних потоків", державний реєстраційний номер 0108U003689

інструментом, який у деякому розумінні є замінником похідної (локальний час можна визначити як похідну, або щільність, міри відвідування відносно міри Лебега, див. [5]). На сьогодні існує багато методів вивчення властивостей локального часу. Одною з нових ідей, яка з'явилась в працях Д.Нуаларта [6, 7], П.Імкеллера [8] та їх співавторів, є використання розкладу Іто-Вінера та пов'язаних з ним оцінок. Вказані автори розглядають наближення для локальних часів самоперетину вінерівського процесу та дробового броунівського руху, знаходять і оцінюють елементи розкладу Іто-Вінера для цих наближень, та доводять існування локального часу (або перенормованого локального часу) у соболевському просторі.

Схожа ідея була використана А.А.Дороговцевим та В.В.Бакуном у [4], де були наведені умови існування локального часу як частинного випадку узагальненого адитивного функціоналу для вінерівського процесу. Окрім соболевських, автори використовують схожі за структурою простори (простори Гіда), які розширюють межі існування локального часу як елементу цих просторів. Простори Гіда також були використані для доведення існування локального часу кратного самоперетину двовимірного вінерівського процесу у [9]. Нові простори іншого типу, в яких існує локальний час для вінерівського процесу, введені Г.Уемурою у [15]. Спільною частиною у визначенні всіх згаданих просторів є елементи розкладу Іто-Вінера.

Ця стаття продовжує реалізацію ідей започаткованих у попередніх працях [11, 12]. В них розглядалися наближення локального часу в нулі для досить загального випадку центрованих ґауссівських випадкових полів. Було знайдене зображення математичного сподівання квадрата елементів розкладу Іто-Вінера для наближень[11]. За допомогою цього зображення отримана необхідна та достатня умова для збіжності цих наближень в соболевському просторі та детально проаналізовано випадок локального часу самоперетину для дробового броунівського руху [12].

В цій статті ми знаходимо зображення елементів розкладу Іто-Вінера для наближень локального часу та самого локального часу (в ситуації, яка була розглянута в [12]). Це дає додаткову інформацію про властивості локального часу. Як приклад, ми доводимо інваріантність локального часу відносно деяких перетворень процесу. Крім того, використано результат з [1] для отримання збіжності деяких нестандартних наближень локального часу за ймовірністю.

2 Основні конструкції та позначення

Введемо загальні позначення та зробимо припущення, які будуть використовуватись надалі.

Нехай T – сепарабельний метричний простір, $\{\xi(t), t \in T\}$ – ґауссівське випадкове поле зі значеннями в $\mathbb{R}^d$. Будемо вважати, що ймовірнісний простір є сепарабельним гільбертовим простором H з ґауссівською мірою μ на ньому, а σ-алгеброю випадкових подій є борелівські множини в H. Додатково будемо вважати, що для кожного $t \in T$ випадковий вектор $\xi(t)$ є лінійним вимірним ($\mathbb{R}^d$ – значним) функціоналом в H, тобто вимірним відображенням H у $\mathbb{R}^d$, яке має властивість лінійності. Окрім того, нехай ξ є вимірним відображенням $H \times T$ у $\mathbb{R}^d$.

Маючи будь-яке стохастично неперервне ґауссівське випадкове поле на T, ми можемо побудувати таке H і таке ξ, таким чином, щоб усі скінченновимірні розподіли ξ збігалися з аналогічними розподілами заданого поля (див. [11, 12]).

Маючи сепарабельний гільбертів простір з ґауссівською мірою на ньому, ми можемо побудувати розклад Іто-Вінера та соболевські простори. Назвемо скінченновимірними многочленами на H многочлени від скінченної кількості лінійних неперервних функціоналів на H, тобто функції такого вигляду

$$Q(g) = P((h_1, g), \ldots, (h_k, g)), g, h_i \in H, P - \text{многочлен від } k \text{ змінних.}$$

Відомо, що такий набір функцій є щільним у $L_2(H, \mu)$ (див. [3]). Нехай $K_n, n = 0, 1, \ldots,$ – мінімальний підпростір $L_2(H, \mu)$, який містить усі скінченновимірні многочлени на H степеня не вище n. Нехай G_n – ортогональне доповнення K_{n-1} до K_n для всіх $n \in \mathbb{N}$ і нехай P_n – проектор на G_n. При цьому, оскільки, як ми вже зауважили, $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$ є щільним у $L_2(H, \mu)$, маємо $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} G_n = L_2(H, \mu)$. Відповідний розклад $h = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n h, h \in L_2(H, \mu)$ називають розкладом Іто-Вінера (або chaos decomposition – див. [10]). Визначимо сім'ю норм на $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$:

$$\|h\|^2_{2,\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{\alpha} \|P_n h\|^2_2 ,$$

де $\| \cdot \|_2$ - норма в $L_2(H, \mu)$. Простір $D_{2,\alpha}$ визначимо як замикання $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$ за нормою $\|\cdot\|_{2,\alpha}$. Саме ці простори ми називаємо соболевськими (див. [16]). Елементи простору $D_{2,\alpha}$ при від'ємних α будемо називати узагальненими функціоналами (взагалі кажучи не кожному елементу цього простору можна природним чином поставити у відповідність деяку випадкову величину). Введені нами соболевські простори є частиною побудови числення Маллявена (див. [16, 10]).

Відомо, що розклад Іто-Вінера в деяких випадках можна отримати за допомогою розкладу в ряд з поліномів Ерміта.

Поліномами Ерміта ми називаємо такі поліноми:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}, n = 0, 1, \ldots .$$

За такого означення вони мають коефіцієнт одиниця біля члена найбільшого степеня і

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (H_n(v))^2 (2\pi)^{-1/2} e^{-v^2/2} dv = n!.$$

Окрім того, ми будемо використовувати відоме інтегральне зображення (див. [2]):

$$H_k(x) = e^{x^2/2} \int\limits_{\mathbb{R}} (-iy)^k e^{ixy} (2\pi)^{-1/2} e^{-y^2/2} dy \tag{1}$$

Якщо $m = (m_1, \ldots, m_d)$ – мультиіндекс (ми стандартно позначаємо $m! = m_1! \ldots m_d!$ та $|m| = m_1 + \ldots + m_d$), то відповідний d-вимірний поліном Ерміта:

$$H_m(x) = \prod_{k=1}^{d} H_{m_k}(x).$$

Нехай $\varkappa$ є стандартною ґауссівською мірою на $\mathbb{R}^d$ (тобто з середнім ноль та одиничною матрицею коваріації). Тоді поліноми Ерміта є ортогональною та повною системою в $L_2(\mathbb{R}^d, \varkappa)$. Звідси для будь-якої функції g з $L_2(\mathbb{R}^d, \varkappa)$ маємо розклад:

$$g(x) = \sum_{m=(0,\ldots,0)}^{(+\infty,\ldots,+\infty)} \gamma_m(g) H_m(x),$$

$$\gamma_m = \frac{1}{m!} \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(y) H_m(y) (2\pi)^{-d/2} e^{-\|y\|^2/2} dy,$$

де сума береться по всім мультиіндексам з невід'ємними цілими координатами. Оскільки сума збігається абсолютно в $L_2(\mathbb{R}^d, \varkappa)$, то порядок підсумовування не має значення.

Нехай η – стандартний d-вимірний ґауссівський вектор на ймовірнісному просторі H, який до того ж є лінійним функціоналом на цьому просторі. Розглянемо випадкову величину вигляду $g(\eta)$, де $g \in L_2(\mathbb{R}^d, \varkappa)$. В цьому випадку розклад

$$g(\eta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{|m|=n} \gamma_m(g) H_m(\eta),$$

який ми отримуємо з розкладу g по поліномах Ерміта за допомогою групування членів суми, є розкладом Іто-Вінера для $g(\eta)$. Для доведення цього достатньо помітити, що відображення

$$J(f) = f(\eta) \in L_2(H, \mu), f \in L_2(\mathbb{R}^d, \varkappa),$$

є ізоморфізмом між $L_2(\mathbb{R}^d, \varkappa)$ та підпростором $L_2(H, \mu)$ породженим координатами η, звідки сума збігається у $L_2(H, \mu)$. Окрім того, кожний член зовнішньої суми є скінченновимірним многочленом, ортогональним у $L_2(H, \mu)$ до всіх многочленів меншого степеня (за вибором η). Отже:

$$P_n(g(\eta)) = \sum_{|m|=n} \gamma_m(g) H_m(\eta). \tag{2}$$

Наведемо означення локального часу. Нехай ν – скінченна міра на σ-алгебрі борелівськіх множин в T. Введемо позначення:

$$L(f) = \int_T f(\xi(t))\nu(dt),$$

де f – деяка вимірна обмежена функція. Оскільки $L(f) \in L_2(H, \mu)$, то можемо розглянути розклад Іто-Вінера:

$$L(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f), \text{ де } a_n(f) = P_n(L(f)) \in G_n$$

Візьмемо сім'ю невід'ємних вимірних обмежених функцій $\{f_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$, таких що міри $f_\varepsilon(x)dx$ слабко збігаються при $\varepsilon \to 0+$ до δ_0 – дельта-міри в нулі.

Означення 1. Якщо сім'я $L(f_\varepsilon(\cdot - x))$ збігається за ймовірністю (або майже напевне або у деякому $D_{2,\alpha}$) при $\varepsilon \to 0+$, то його границя називається локальним часом у точці x для випадкового процесу ξ в сенсі збіжності за ймовірністю (або майже напевне або у деякому $D_{2,\alpha}$). Якщо границя існує, то ми кажемо, що відповідний локальний час існує.

Відмітимо, що локальний час може залежати від вибору f_ε. Тому зафіксуємо наступний вигляд f_ε:

$$f_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-d/2}\varepsilon^{-d}e^{-\|x\|^2/2\varepsilon^2}.$$

Надалі сім'ю $L(f_\varepsilon(\cdot - x))$ ми будемо називати наближеннями для локального часу в точці x для випадкового процесу ξ. Крім того, ми розглядаємо лише випадок $x = 0$ (цього достатньо, оскільки замість локального часу в точці x ми завжди можемо розглянути локальний час в нулі процесу зсунутого на x)

Саме така конструкція (з більш загальним виглядом f_ε) також вводилась в [11, 12]. В подальшому ми будемо згадувати деякі результати з [11, 12].

Введемо додаткові позначення. Нехай $K(s,t) = M\xi(s)(\xi(t))^T$ матричнозначна коваріаційна функція для ξ. Будемо припускати, що $\det K(t,t) > 0$ виконується ν-майже всюди. Це дає нам можливість працювати з виразами вигляду $K^{-1/2}(t,t)$, які визначені ν-майже всюди (насправді точки простору T в яких $\det K(t,t) = 0$ ми можемо просто викинути, оскільки нас цікавлять лише інтеграли по мірі ν).

3 Розклад Іто-Вінера локального часу в нулі для центрованого ґауссівського випадкового поля

Нехай ґауссівське випадкове поле ξ є центрованим. Будемо користуватися цим припущенням в усіх теоремах цього розділу.

В роботі [12] було доведено теореми про збіжність $L(f_\varepsilon)$, де f_ε таке, що ми мали наближення для локального часу в нулі (див. означення локального часу). Тобто було одержано результат про існування локального часу в нулі у сенсі збіжності в соболевському просторі. Помітимо, що умова

$$\int\limits_T \frac{\nu(ds)}{\sqrt{\det K(s,s)}} < +\infty \tag{3}$$

є достатньою (та необхідною, оскільки процес центрований) для збіжності $L(f_\varepsilon)$ у деякому $D_{2,\alpha}$ (при $\alpha < -\frac{d}{2}$ — див. [12]).

У роботі [11] нами було знайдено зображення математичного сподівання квадрата членів розкладу Іто-Вінера для $L(f)$ (нагадаємо, що члени розкладу ми позначили $a_n(f)$). В наступній теоремі знайдено зображення самого розкладу.

Теорема 1. *Нехай f є обмеженою вимірною функцією на $\mathbb{R}^d$, тоді*

$$a_n(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) \int\limits_T e^{\|K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\|^2/2} \frac{1}{n!} (\det K(t,t))^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (-\sum_{k=0}^{d} u_k v_k)^n$$
$$e^{i(K^{-1/2}(t,t)x,u)} e^{i(K^{-1/2}(t,t)\xi(t),v)} (2\pi)^{-3d/2} e^{-\|u\|^2/2-\|v\|^2/2} du dv \nu(dt) dx. \tag{4}$$

Доведення. Спершу знайдемо розклад Іто-Вінера для $f(\xi(t))$. Оскільки випадковий вектор $K^{-1/2}(t,t)\xi(t)$ є стандартним ґауссівським, то можемо використати формулу (2), де візьмемо: $g(x) = f(K^{1/2}(t,t)x)$:

$$P_n(f(\xi(t))) = \sum_{|m|=n} \gamma_m(g) H_m(K^{-1/2}(t,t)\xi(t)) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(K^{1/2}(t,t)y) \sum_{|m|=n} \frac{1}{m!} H_m(y) H_m(K^{-1/2}(t,t)\xi(t)) (2\pi)^{-d/2} e^{-\|y\|^2/2} dy.$$

Тепер необхідно проінтегрувати праву та ліву частину цього виразу по $\nu(dt)$ та поміняти місцями дію P_n та інтеграл по t, тобто довести, що після інтегрування правої частини ми отримали розклад Іто-Вінера для $L(f)$. Спочатку доведемо, що ми насправді можемо інтегрувати по $\nu(dt)$. Оскільки ми припустили, що ξ – вимірна функція від пари (t, ω), то $P_n(f(\xi(t)))$ – вимірна функція від t. Крім того, маємо наступну нерівність:

$$\int\limits_T |P_n(f(\xi(t)))| \nu(dt) \leqslant \int\limits_T \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(K^{1/2}(t,t)y)|$$
$$\sum_{|m|=n} \frac{1}{m!} |H_m(y) H_m(K^{-1/2}(t,t)\xi(t))| (2\pi)^{-d/2} e^{-\|y\|^2/2} dy \nu(dt) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)| \int\limits_T \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_{|m|=n} \frac{1}{m!} |H_m(K^{-1/2}(t,t)\xi(t)) H_m(y)|$$
$$(2\pi)^{-d/2} e^{-\|y\|^2/2} dy \nu(dt) =$$
$$= (2\pi)^{-d/2} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)| \sum_{|m|=n} \frac{1}{m!} \int\limits_T |H_m(K^{-1/2}(t,t)\xi(t))|$$
$$\nu(dt) \int\limits_{\mathbb{R}^d} |H_m(y)| e^{-\|y\|^2/2} dy.$$

Покажемо, що інтеграл

$$\int\limits_T |H_m(K^{-1/2}(t,t)\xi(t))|\nu(dt)$$

є скінченним майже всюди. Для цього достатньо показати, що скінченним є його математичне сподівання. Маємо

$$M\int\limits_T |H_m(K^{-1/2}(t,t)\xi(t))|\nu(dt) =$$
$$= \int\limits_T \int\limits_{\mathbb{R}^d} |H_m(x)|(2\pi)^{-d/2}e^{-\|x\|^2/2}dx\nu(dt) < +\infty$$

Тобто ми довели, що інтегрування виразу для $P_n(f(\xi(t)))$ по $\nu(dt)$ дає скінченну випадкову величину. Додатково зауважимо, що за теоремою Фубіні ми можемо міняти місцями інтеграли по y та по t.

Доведемо, що отриманий інтеграл є розкладом Іто-Вінера для $L(f)$. Для цього достатньо показати, що

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int\limits_T P_n(f(\xi(t)))\nu(dt) = \int\limits_T \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(f(\xi(t)))\nu(dt) = \int\limits_T f(\xi(t))\nu(dt),$$

де нескінченна сума є границею в L_2, і випадкова величина $\int\limits_T P_n(f(\xi(t)))\nu(dt)$ має бути версією елемента з G_n.

Існування границі в L_2 можемо довести просто за означенням, використовуючи рівномірну оцінку норми в L_2 для $f(\xi(t))$:

$$\|\sum_{n=0}^{N}\int\limits_T P_n(f(\xi(t)))\nu(dt) - \int\limits_T \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(f(\xi(t)))\nu(dt)\|_2 =$$
$$\|\int\limits_T \sum_{n=N+1}^{+\infty} P_n(f(\xi(t)))\nu(dt)\|_2 \leqslant \int\limits_T \|\sum_{n=N+1}^{+\infty} P_n(f(\xi(t)))\|_2\nu(dt)$$

Останній інтеграл збігається до нуля при $N \to +\infty$ за теоремою Лебеґа, оскільки

$$\|\sum_{n=N+1}^{+\infty} P_n(f(\xi(t)))\|_2 \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$$

Доведемо, що $\int_T P_n(f(\xi(t)))\nu(dt) \in G_n$. Нехай η є інтегровною з квадратом випадковою величиною. Якщо

$$M\eta \int_T P_n(f(\xi(t)))\nu(dt) = \int_T M\eta P_n(f(\xi(t)))\nu(dt),$$

то інтеграл є елементом G_n, оскільки $P_n(f(\xi(t)))$ є елементом G_n для будь-якого t (достатньо розглянути всі $\eta \in G_n^{\perp}$). Необхідна рівність випливає з теореми Фубіні, оскільки:

$$\int_T M|\eta P_n(f(\xi(t)))|\nu(dt) \leqslant \int_T \sqrt{M|\eta|^2 M|P_n(f(\xi(t)))|^2}\nu(dt) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{M|\eta|^2} \int_T \sqrt{M|f(\xi(t))|^2}\nu(dt) \leqslant \sqrt{M|\eta|^2}\nu(T) \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)| < +\infty$$

Таким чином, ми знайшли розклад Іто-Вінера для $L(f)$, і нам залишається лише привести його до вигляду, зазначеного в теоремі. Суму поліномів Ерміта ми перетворюємо за допомогою формули (1).

$$\sum_{|m|=n} \frac{1}{m!} H_m(y) H_m(K^{-1/2}(t,t)\xi(t)) =$$
$$= \sum_{|m|=n} \frac{1}{m!} e^{\|y\|^2/2} e^{\|K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\|^2/2} (2\pi)^{-d} (-1)^{|m|}$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^{d} u_k^{m_k} e^{i(y,u)} e^{-\|u\|^2/2} du \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^{d} v_k^{m_k} e^{i(K^{-1/2}(t,t)\xi(t),v)} e^{-\|v\|^2/2} dv =$$
$$= e^{\|y\|^2/2} e^{\|K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\|^2/2} (2\pi)^{-d} (-1)^n \frac{1}{n!}$$
$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} (u,v)^n e^{i(y,u)} e^{i(K^{-1/2}(t,t)\xi(t),v)} e^{-\|u\|^2/2-\|v\|^2/2} du dv$$

Зробимо заміну в інтегралі по y ($x = K^{1/2}(t,t)y$):

$$P_n(f(\xi(t))) = (2\pi)^{-3d/2} (-1)^n \frac{1}{n!} e^{\|K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\|^2/2} (\det K(t,t))^{-1/2}$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} (u,v)^n e^{i(K^{-1/2}(t,t)x,u)} e^{i(K^{-1/2}(t,t)\xi(t),v)} e^{-\|u\|^2/2-\|v\|^2/2} du dv dx.$$

Якщо проінтегрувати по $\nu(t)$ та поміняти місцями інтеграл по t з інтегралом по x (можливість цього була доведена ще для інтеграла по y), то отримаємо шукану формулу. $\square$

У отриманому розкладі ми записали інтеграли замість поліномів Ерміта, тому що такий вигляд дозволяє робити необхідні оцінки (див. нижче).

Позначимо через $L(\delta_0)$ границю $L(f_\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ у будь-якому $D_{2,\alpha}$, якщо вона існує. У наступній теоремі ми доводимо, що при такому граничному переході елементи розкладу Іто-Вінера збігаються майже напевне та знаходимо зображення для розкладу Іто-Вінера локального часу.

Нехай S_d – сфера радіуса 1 в $\mathbb{R}^d$ і σ – поверхнева міра на S_d, яка задовольняє рівність:

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx = \int_0^{+\infty} \int_{S_d} g(ry)\sigma(dy)r^{d-1}dr, g \in L_1(\mathbb{R}^d). \tag{5}$$

Така міра визначена коректно і однозначно та є інваріантною відносно обертання сфери S_d.

Теорема 2. *Нехай виконується умова (3). Маємо:*

$$\exists\, a_n(\delta_0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} a_n(f_\varepsilon) \text{ м.н.}$$

Для непарних $n = 2m+1$ маємо $a_{2m+1}(\delta_0) = 0$, а для парних $n = 2m$

$$a_{2m}(\delta_0) = \int_T R_{m,d}(\|K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\|^2)\frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}} \tag{6}$$

де $R_{m,d}$ є деяким многочленом степеня m, який залежить лише від m і d та визначений наступним чином

$$R_{m,d}(u^2) = (2\pi)^{-d}\frac{(-1)^m}{(2m)!}2^{m+d/2-1}\Gamma(m+d/2)\int_{S_d} H_{2m}(uy_1)\sigma(dy). \tag{7}$$

При цьому $a_n(\delta_0) \in G_n$ є членами розкладу Іто-Вінера для $L(\delta_0)$, тобто

$$L(\delta_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\delta_0)$$

Доведення. Перший крок доведення – підставити f_ε у формулу (4):

$$a_n(f_\varepsilon) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (2\pi)^{-d/2}\varepsilon^{-d}e^{-\|x\|^2/2\varepsilon^2}$$

$$\int\limits_T e^{\|K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\|^2/2}\frac{1}{n!}(\det K(t,t))^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}(-\sum_{k=0}^d u_k v_k)^n$$

$$e^{i(K^{-1/2}(t,t)x,u)}e^{i(K^{-1/2}(t,t)\xi(t),v)}(2\pi)^{-3d/2}e^{-\|u\|^2/2-\|v\|^2/2}dudv\nu(dt)dx =$$

$$= (2\pi)^{-2d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2/2}\int\limits_T e^{\|K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\|^2/2}\frac{1}{n!}(\det K(t,t))^{-1/2}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}(-\sum_{k=0}^d u_k v_k)^n e^{i\varepsilon(K^{-1/2}(t,t)x,u)}e^{i(K^{-1/2}(t,t)\xi(t),v)}$$

$$e^{-\|u\|^2/2-\|v\|^2/2}dudv\nu(dt)dx$$

Зробивши заміну змінної для x, ми занесли ε до інтеграла по u.

Зауважимо, що для непарних n одночасна зміна знаку у змінних x та u міняє знак виразу під інтегралом, в іншому залишаючи його незмінним, тобто для $n = 2m+1$ отримуємо $a_n(\delta_0) = a_n(f_\varepsilon) = 0$. Таким чином, залишається випадок $n = 2m$.

При $\varepsilon \to 0+$ вираз під інтегралом збігається — в ньому зникає множник $e^{i\varepsilon(K^{-1/2}(t,t)x,u)}$, який збігається до одиниці. Для того, щоб довести збіжність усього інтеграла майже напевне до інтеграла від границі виразу під інтегралом, застосуємо теорему Лебеґа. Але для цього нам спершу необхідно проінтегрувати по v.

Позначимо

$$I_n(a,b) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(a,x)}(b,x)^n(2\pi)^{-d/2}e^{-\|x\|^2/2}dx.$$

Нам потрібно обчислити цей інтеграл.

Лема 1.

$$I_n(a,b) = i^n\|b\|^n H_n(\frac{(a,b)}{\|b\|})e^{-\|a\|^2/2}.$$

Доведення. Оскільки випадок $d = 1$ елементарно зводится до формули (1), то можемо припустити, що $d \geqslant 2$. Введемо в $\mathbb{R}^d$ ортонормований базис $\{e_k : k = 1,\dots,d\}$, два перших вектори якого такі: $e_1 = \frac{b}{\|b\|}$ і $e_2 = \frac{a-e_1(a,e_1)}{\|a-e_1(a,e_1)\|}$. При цьому $a = (a,e_1)e_1 + \|a-e_1(a,e_1)\|e_2; b = e_1\|b\|$. Запишемо вираз під інтегралом у цьому базисі та проінтегруємо по кожній координаті по черзі. Інтеграл по координатах, починаючи з третьої, – це просто інтеграл від $e^{-x_i^2/2}$. Врахувавши це, отримаємо інтеграл по двох перших координатах. Ці інтеграли розділяются і для обох працює формула (1).

$$I_n(a,b) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{i((a,e_1)x_1+\|a-e_1(a,e_1)\|x_2)}\|b\|^n x_1^n(2\pi)^{-1}e^{-x_1^2/2-x_2^2/2}dx_1dx_2 =$$

$$= \|b\|^n \int_{\mathbb{R}} e^{i(a,e_1)x_1}x_1^n(2\pi)^{-1/2}e^{-x_1^2/2}dx_1$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\|a-e_1(a,e_1)\|x_2}(2\pi)^{-1/2}e^{-x_2^2/2}dx_2 =$$

$$= i^n\|b\|^n H_n((a,e_1))e^{-(a,e_1)^2/2}e^{-\|a-e_1(a,e_1)\|^2/2} =$$

$$= i^n\|b\|^n H_n(\frac{(a,b)}{\|b\|})e^{-\|a\|^2/2}.$$

□

Повернемося до доведення теореми. Використовуючи лему, отримаємо:

$$a_{2m}(f_\varepsilon) = (2\pi)^{-3d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2/2}\int_T e^{\|K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\|^2/2}\frac{1}{(2m)!}(\det K(t,t))^{-1/2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\varepsilon(K^{-1/2}(t,t)x,u)}I_{2m}(K^{-1/2}(t,t)\xi(t),u)e^{-\|u\|^2/2}du\nu(dt)dx =$$

$$= (2\pi)^{-3d/2}(-1)^m\frac{1}{(2m)!}\int_{\mathbb{R}^d}\int_T\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2/2}e^{i\varepsilon(K^{-1/2}(t,t)x,u)}$$

$$\|u\|^{2m}H_{2m}((K^{-1/2}(t,t)\xi(t),\frac{u}{\|u\|}))e^{-\|u\|^2/2}du\frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}}dx.$$

Нам достатньо довести, що інтеграл від модуля (в якому пропадає залежна від ε частина) є скінченним:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_T\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2/2}\|u\|^{2m}|H_{2m}((K^{-1/2}(t,t)\xi(t),\frac{u}{\|u\|}))|$$

$$e^{-\|u\|^2/2}du\frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}}dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2/2}dx$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \|u\|^{2m} \int\limits_T |H_{2m}((K^{-1/2}(t,t)\xi(t), \frac{u}{\|u\|}))| \frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}} e^{-\|u\|^2/2} du.$$

Останній інтеграл є скінченним майже напевне, якщо скінченне його математичне сподівання. Але, оскільки $(K^{-1/2}(t,t)\xi(t), \frac{u}{\|u\|})$ є стандартною ґауссівською випадковою величиною, то

$$M \int\limits_{\mathbb{R}^d} \|u\|^{2m} \int\limits_T |H_{2m}((K^{-1/2}(t,t)\xi(t), \frac{u}{\|u\|}))| \frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}} e^{-\|u\|^2/2} du =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} (2\pi)^{-1/2} |H_{2m}(z)| e^{-\|z\|^2/2} dz \int\limits_{\mathbb{R}^d} \|u\|^{2m} e^{-\|u\|^2/2} du \int\limits_T \frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}} < +\infty.$$

Оскільки, як вже було згадано раніше, умова (3) дає збіжність $L(f_\varepsilon)$ у деякому $D_{2,\alpha}$, то кожне $a_n(f_\varepsilon)$ збігається у L_2 при $\varepsilon \to 0+$ до елемента розкладу Іто-Вінера для локального часу $L(\delta_0)$. Звідси отримані нами вирази для границі $a_n(f_\varepsilon)$ майже напевне співпадають з цим розкладом.

Тепер приведемо отримані нами формули для $a_n(\delta_0)$ до вказаних в теоремі. Використаємо формулу (5):

$$a_{2m}(\delta_0) = (2\pi)^{-d} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \int\limits_T \int\limits_{\mathbb{R}^d} \|u\|^{2m}$$

$$H_{2m}((K^{-1/2}(t,t)\xi(t), \frac{u}{\|u\|})) e^{-\|u\|^2/2} du \frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}} =$$

$$= (2\pi)^{-d} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \int\limits_T \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{S_d} r^{2m+d-1}$$

$$H_{2m}((K^{-1/2}(t,t)\xi(t), \frac{u}{\|u\|})) e^{-r^2/2} \sigma(du) dr \frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}} =$$

$$= (2\pi)^{-d} (-1)^m \frac{1}{(2m)!} \int\limits_0^{+\infty} r^{2m+d-1} e^{-r^2/2} dr$$

$$\int\limits_T \int\limits_{S_d} H_{2m}(\|K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\| u_1) \sigma(du) \frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}} =$$

$$= (2\pi)^{-d} (-1)^m \frac{1}{(2m)!} 2^{m+d/2-1} \Gamma(m + d/2)$$

$$\int_T \int_{S_d} H_{2m}(\|K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\|u_1)\sigma(du)\frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}} =$$

$$= \int_T R_{m,d}(\|K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\|^2)\frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}}.$$

□

4 Симетрія локального часу в нулі

Маючи лінійний оператор на $\mathbb{R}^d$, ми можемо визначити його дію на функції задані на $\mathbb{R}^d$, як композицію функції з оператором. Також можна визначити дію на скінченні міри, як спряжену (відносно спарювання, яке задається інтегралом функції по мірі) до дії на неперевні обмежені функції спряженого оператора. Тоді неважно впевнитись, що дельта-міра в нулі є незмінною відносно дії ортогонального оператора в $\mathbb{R}^d$. Окрім того, оператор множення однієї з координат на константу діє на дельта-міру в нулі як множення на цю константу. Інтуїтивно зрозуміло, що локальний час, який може бути записаний формально за допомогою інтеграла від дії дельта-міри в нулі на випадковий процес, повинен успадковувати ці властивості — тобто формальні перетворення дельта-міри під інтегралом (за допомогою операторів, згаданих вище) мають призводити до перетворення самого локального часу. Ми доведемо, що такі перетворення можна робити насправді, а не тільки формально, за допомогою розкладу Іто-Вінера для локального часу, у випадку коли ґауссівське випадкове поле ξ є центрованим.

Теорема 3. *Припустимо, що ґауссівське випадкове поле ξ є центрованим. Нехай $V(t), t \in T$ – деяка неперервна функція зі значеннями у множині матриць розміру $d \times d$, така що $\det V(t) \neq 0$ ν-м.в. і*

$$\int_T |\det V(t)|\nu(dt) < +\infty.$$

Тоді для нового випадкового поля $\tilde{\xi}$ та міри $\tilde{\nu}$, які задані наступним чином:

$$\tilde{\xi} = V(t)\cdot\xi(t), \tilde{\nu}(dt) = |\det V(t)|\cdot\nu(dt),$$

локальний час існує (в сенсі збіжності в $D_{2,\alpha}$) тоді і тільки тоді коли він існує для вихідних ξ та ν. При цьому локальні часи в обох випадках збігаються.

Доведення. Умови, накладені на $V(t)$, гарантують, що $\tilde{\nu}$ — скінченна міра і випадкове поле $\tilde{\xi}$ є центрованим ґауссівським, для якого зберігаються всі умови, накладені на ξ (вимірність, невиродженість та стохастична неперервність). Тому для $\tilde{\xi}$ і $\tilde{\nu}$ виконується теорема 2. Очевидно, що умова (3) для цього випадку є еквівалентною тій самій умові для вихідних ξ та ν.

Зауважимо, що в формулі (6) для розкладу Іто-Вінера локального часу залежність від ξ та ν з'являється лише у вигляді залежності від набору випадкових величин $\{\|K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\| : t \in T\}$ (з точністю до ν-м.в.) та від міри $\frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}}$. Якщо умова (3) виконується, то обидва локальні часи існують у $D_{2,\alpha}$ при $\alpha < -\frac{d}{2}$ (якщо не виконується, то не існують при будь-яких α). Існування для більших α залежить від того, чи лежить отриманий локальний час у відповідному $D_{2,\alpha}$ (див. [12]). Остання умова залежить від самого локального часу, тобто від тих самих об'єктів, вказаних вище. Нам залишається показати, що ці об'єкти для пар $\tilde{\xi}, \tilde{\nu}$ та ξ, ν збігаються.

Коваріація нового процесу $\tilde{\xi}$, яку ми позначимо $\tilde{K}$, задовольняє рівність:

$$\tilde{K}^{-1/2}(t,t) = (V(t)K(t,t)V^T(t))^{-1/2}$$

для всіх t, для яких $\det V(t) \neq 0$ і $\det K(t,t) \neq 0$. Звідси для ν-майже всіх t маємо

$$\tilde{K}^{-1/2}(t,t)\tilde{\xi}(t) = (V(t)K(t,t)V^T(t))^{-1/2}V(t)K^{1/2}(t,t)K^{-1/2}(t,t)\xi(t),$$
$$(\det \tilde{K}(t,t))^{-1/2} = (\det K(t,t))^{-1/2}|\det V(t)|^{-1}.$$

Достатньо довести, що матриця $(V(t)K(t,t)V^T(t))^{-1/2}V(t)K^{1/2}(t,t)$ є ортогональною (тобто множення на цю матрицю зберігає норму). Перевіримо це:

$$\begin{aligned}&(V(t)K(t,t)V^T(t))^{-1/2}V(t)K^{1/2}(t,t)\cdot\\ &\qquad\cdot((V(t)K(t,t)V^T(t))^{-1/2}V(t)K^{1/2}(t,t))^T =\\ &= (V(t)K(t,t)V^T(t))^{-1/2}V(t)K(t,t)V^T(t)(V(t)K(t,t)V^T(t))^{-1/2} = I.\end{aligned}$$

□

5 Збіжність наближень локального часу в нулі за ймовірністю

Симетрію, яку ми отримали, можна використати, щоб пов'язати деякі наближення локального часу зі стандартними. Розглянемо наближення для локального часу вигляду

$$\tilde{L}_\varepsilon = \int\limits_T f_\varepsilon(K^{-1/2}(t,t)\xi(t)) \frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}}$$

За теоремою 3 ці наближення дають такий же локальний час (в нулі для центрованого ξ у сенсі збіжності в соболевському просторі) як і стандартні наближення з означення за виконання умови (3) (для доведення достатньо розглянути $V(t) = K^{-1/2}(t,t)$).

Ці наближення цікаві тим, що їх структура дозволяє дослідити збіжність за ймовірністю.

Теорема 4. *Припустимо, що ґауссівське випадкове поле ξ є центрованим. Якщо виконується умова (3), то сім'я $\tilde{L}_\varepsilon$ збігається за ймовірністю при $\varepsilon \to 0+$. Якщо для ξ існує локальний час в нулі у сенсі збіжності в L_2, то він дорівнює границі $\tilde{L}_\varepsilon$ за ймовірністю.*

Для доведення цієї теореми нам потрібно згадати деякі результати пов'язані з узагальненими функціоналами з $D_{2,\alpha}$ (за від'ємних α) та дією на них напівгрупи Орнштейна-Уленбека.

Спершу пов'яжемо узагальнені функціонали з мірами на H, як це зроблено у [13]. Для цього необхідно ввести поняття невід'ємного узагальненого функціоналу.

Означення 2. Узагальнений функціонал з $D_{2,\alpha}$ ($\alpha < 0$) називається невід'ємним, якщо його результат його дії, як функціонала на спряженому просторі $D_{2,-\alpha}$, на будь-яку невід'ємну випадкову величину є невід'ємним.

Як показує наступна теорема, такі функціонали насправді є мірами.

Теорема 5. *[13] Для будь-якого невід'ємного узагальненого функціоналу $\Phi \in D_{2,\alpha}, \alpha < 0$ існує κ – скінченна міра на σ-алгебрі борелівських підмножин H, така що для будь-якої обмеженої функції (випадкової величини) $F \in D_{2,-\alpha}$ виконується:*

$$\Phi(F) = \int\limits_H F(x)\kappa(dx)$$

Інший результат, який нам потрібний, пов'язаний з поведінкою щільності абсолютно неперервної компоненти дії напівгрупи Орнштейна-Уленбека на міри. Детальні означення і доведення можна знайти в [1], тут ми лише сформулюємо основний результат. Нехай $T_\lambda, \lambda \geqslant 0$ є напівгрупою Орнштейна-Уленбека, пов'язаною з ґауссівською мірою μ на

H. В [1] визначено дію цієї напівгрупи на обмежені вимірні функції в H (див. також [16]) результатом якої є функція, та на скінченні міри – результат такої дії є також мірою. Нехай ν – деяка скінченна міра на σ-алгебрі борелівських підмножин H. Символ $\frac{d(T_t\nu)^{a.c.}}{d\mu}$ означає щільність абсолютно неперервної компоненти міри $T_t\nu$ відносно μ.

Теорема 6. *[1]*

$$\frac{d(T_t\nu)^{a.c.}}{d\mu} \to \frac{d\nu^{a.c.}}{d\mu}, t \to 0+ \quad \text{за мірою } \mu$$

Тепер доведемо теорему 4.

Доведення. Рівність границі $\tilde{L}_\varepsilon$ і границі L_ε у L_2 є наслідком збігу локальних часів, які вони наближають (у сенсі збіжності в L_2). Збіг локальних часів було вказано нами вище, тому остання частина теореми вже доведена.

Доведемо, що границя $\tilde{L}_\varepsilon$ за ймовірністю існує (навіть якщо не існує в L_2). За виконання умови (3) сім'я $\tilde{L}_\varepsilon$ збігається до деякого L у $D_{2,\alpha}$ для достатньо малих α. Оскільки $\tilde{L}_\varepsilon$ є невід'ємними узагальненими функціоналами у тому ж $D_{2,\alpha}$, то таким самим є їх границя, тобто існує деяка міра κ на σ-алгебрі борелівських підмножин H, яка відповідає L. Це означає, що ми можемо розглядати одночасно $T_\lambda\kappa$ і $T_\lambda L$ — дії напівгрупи Орнштейна-Уленбека на міру і на узагальнений функціонал. Причому вони будуть пов'язані так само, як і початкові κ та L (це випливає з властивостей дії напівгрупи Орнштейна-Уленбека на міри та узагальнені функціонали). Більш того, оскільки $L \in D_{2,\alpha}$, то $T_\lambda L \in L_2$ і звідси $T_\lambda\kappa \ll \mu$ та $\frac{dT_\lambda\kappa}{d\mu} = T_\lambda L$. За теоремою 6 сім'я $\frac{dT_\lambda\kappa}{d\mu}$ збігається за мірою μ, коли $\lambda \to 0+$. Для доведення нашої теореми нам потрібно пов'язати $T_\lambda L$ та $\tilde{L}_\varepsilon$.

Знайдемо явний вигляд для $T_\lambda\tilde{L}_\varepsilon$:

$$T_\lambda\tilde{L}_\varepsilon =$$

$$= \int_T T_\lambda f_\varepsilon(K^{-1/2}(t,t)\xi(t))\frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}} =$$

$$= \int_T \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon(x)(2\pi(1-e^{-2\lambda}))^{-d/2}\cdot$$

$$\cdot \exp(-\frac{\|x - e^{-\lambda}K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\|^2}{2(1-e^{-2\lambda})})dx\frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}}$$

Формула для дії T_λ на $f_\varepsilon(K^{-1/2}(t,t)\xi(t))$ вказана у [1]. При $\varepsilon \to 0+$ цей вираз збігається майже напевно (за теоремою Лебеґа) до

$$\int\limits_T (2\pi(1-e^{-2\lambda}))^{-d/2} \exp(-\frac{e^{-2\lambda}\|K^{-1/2}(t,t)\xi(t)\|^2}{2(1-e^{-2\lambda})})\frac{\nu(dt)}{\sqrt{\det K(t,t)}} =$$

$$= e^{d\lambda}\tilde{L}_{e^{2\lambda}-1}.$$

Але ми знаємо, що

$$T_\lambda \tilde{L}_\varepsilon \to T_\lambda L, \varepsilon \to 0+$$

в L_2 при $\lambda > 0$, оскільки при $\lambda = 0$ є збіжність у деякому $D_{2,\alpha}$ (образ дії T_λ на $D_{2,\alpha}$, якщо $\lambda > 0$, лежить у $D_{2,\beta}$ для будь-якого β, причому у вказаних просторах оператор є неперервним). Звідси

$$T_\lambda L = e^{d\lambda}\tilde{L}_{e^{2\lambda}-1}.$$

Оскільки $e^{2\lambda} - 1 \to 0+$ при $\lambda \to 0+$, то, застосувавши теорему 6, отримуємо необхідне твердження. $\square$

[1] Руденко А. Приближение плотности абсолютно непрерывной компоненты мер в гильбертовом пространстве с помощью полугруппы Орнштейна-Уленбека // Укр. Мат. Журнал. – 2004. – **56**, № 12. – С. 1654–1664.

[2] Сегё Г. Ортогональные многочлены. – М.:, 1962.

[3] Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975.

[4] Dorogovtsev A. A., Bakun V. V. Random mappings and a generalized additive functional of a Wiener process // Theory of Prob. and its Appl. – 2003. – **48**, №1.

[5] Geman D., Horowitz J. Occupation Densities // The Annals of Probability. – 1980. – feb. – **8**, №1. – P. 1–67.

[6] Hu Y., Nualart D. Renormalized self-intersection local time for fractional Brownian motion // Annals of Prob. – 2005. – **33**, №3. – P. 948–983.

[7] Hu Y., Nualart D. Regularity of renormalized self-intersection local time for fractional Brownian motion // A Journal of Communications in Information and Systems (CIS). – 2007. – **7**, №1. – P. 21–30.

[8] Imkeller P., Perez-Abreu V., Vives J. Chaos expansions of double intersection local time of Brownian motion in R^d and renormalization // Stoch. Proc. and Appl. – 1995. – **56**. – P. 1–34.

[9] Imkeller P., Yan J.-A. Multiple intersection local time of planar Brownian motion as a particular Hida distribution // Journal of Functional Analysis. – 1996. – **140**. – P. 256–273.

[10] Malliavin P. Stochastic Analysis. – Springer, 1997.

[11] Rudenko A. Existence of generalized local times for Gaussian random fields // Theory of Stoch. Proc. – 2006. – **12(28)**, №1-2. – P. 142–154.

[12] Rudenko A. Local time as an element of the Sobolev space // Theory of Stoch. Proc. – 2007. – **13(29)**, №3. – P. 65–79.

[13] Sugita H. Positive generalized functions and potential theory over an abstract Wiener space // A Journal of Communications in Information and Systems (CIS). – 1987. – **25**, №3. – P. 665–696.

[14] Trotter H. F. A property of Brownian motion paths // Illinois journal of mathematics. – 1958. – **2**, №3. – P. 425–433.

[15] Uemura H. Unrenormalized intersection local time of Brownian motion and its local time representation // Journal of Math. - Kyoto Univ. – 2004. – **43**, №4. – P. 671–688.

[16] Watanabe S. Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus. – Springer, 1984.

ITO-WIENER EXPANSION AND PROPERTIES OF LOCAL TIME FOR GAUSSIAN RANDOM FIELD

Oleksiy RUDENKO

Institute of Mathematics of NASU,
3 Tereshchenkivska Str., Kyiv 01601, Ukraine

Let (T, ν) be a separable metric space with finite measure on its Borel σ-algebra, $\{\xi(t) \in \mathbb{R}^d, t \in T\}$ – centered Gaussian random field. We define local time at zero for ξ as a limit of $\int_T f(\xi(t))\nu(dt)$, with function f approximating delta-measure at zero as follows $f_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-d/2}\varepsilon^{-d}e^{-\|x\|^2/2\varepsilon^2}$. The limit is in the sense of convergence in probability or in some Sobolev space. We derive Ito-Wiener expansion for local time approximations and local time itself (if it exists in Sobolev space) in the form of integral from some random function. We use it to prove the invariance of the local time with regard to some class of transformations for pair (ξ, ν). Also we prove convergence in probability of modified local time approximations under some weak condition on process ξ and measure ν.