МЕТОД ЛІ-АЛГЕБРИЧНИХ АПРОКСИМАЦІЙ У ТЕОРІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Оксана БІГУН, Микола ПРИТУЛА

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська 1, Львів 79602

Редакція отримала статтю 29 вересня 2003 р.

Проведено огляд літератури, присвяченої застосуванням Лі–алгебричного підходу у задачах математичної фізики. Оцінено сучасний стан розробленості тематики та окреслено коло подальших досліджень.

Метод Лі–алгебричних дискретних апроксимацій вперше запропонував Ф. Калоджеро у 1980 році для обчислення власних значень лінійних диференціальних операторів [8]. Ф. Калоджеро назвав цей метод „новою технікою“ обчислення власних значень диференціальних операторів. Основна ідея методу полягає у заміні оператора множення на незалежну змінну x та оператора диференціювання d/dx на деякі матричні оператори X та Z. Вибір матричних (а, значить, лінійних) операторів X та Z здійснюється так, що в просторі алгебричних многочленів степеня n дія операторів X та Z співпадає із дією операторів x та d/dx.

Нехай, для прикладу, g є многочленом степеня n, який у точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ набуває значень $g_0, g_1, \ldots, g_n$ відповідно. Тоді за інтерполяційною формулою Лагранжа

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i l_i(x),$$

де $l_i(x) = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} \prod\limits_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)$, $i = \overline{0, n}$, – базисні многочлени Лагранжа. Нехай $P_n(x; f)$– многочлен Лагранжа, побудований за вузловими точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$ та значеннями $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ функції $f \in C[a, b]$ у цих точках. Матриці

$$X = \operatorname{diag}(x_0, \dots, x_n)$$

та

$$Z = \|Z_{ij}\|_{i,j=\overline{0,n}}, \qquad (1)$$

де

$$Z_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{k=0, \\ k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}, & \text{якщо } i = j, \\ \frac{\pi_i}{\pi_j} \frac{1}{x_i - x_j}, & \text{якщо } i \neq j, \end{cases}$$

а $\pi_j = \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} (x_j - x_k)$, $j = \overline{0,n}$, справджують рівності

$$P_n\left(x; \frac{dl_j(x)}{dx}\right) = \sum_{k=0}^{n} Z_{kj} l_j(x), \quad P_n(x; x l_j(x)) = \sum_{k=0}^{n} X_{kj} l_j(x).$$

Таким чином, задача на власні значення

$$Af = \lambda f, \qquad (2)$$

де A– диференціальний оператор порядку r, зводиться до задачі

$$\hat{A}\hat{f} = \hat{\lambda}\hat{f}, \qquad (3)$$

де $\hat{A}$– відповідна матриця, що є многочленом від матриць X і Z, а $\hat{f} \in \mathbb{R}^{n+1}$– вектор значень функції $f \in C[a,b]$ у вузлових точках $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Отже, задача (2) на власні значення для диференціального оператора A зводиться до задачі (3) на власні значення для матриці $\hat{A}$. Очевидно, якщо власні функції задачі (2) є многочленами, то розв'язки $\hat{\lambda}$ задачі (3) точно співпадають із розв'язками λ задачі (2).

Ф. Калоджеро довів, що у випадку, коли $f \in C^{\infty}[a,b]$

$$\frac{\lambda - \hat{\lambda}}{\hat{\lambda}} \cong \left(\frac{c}{n+1}\right)^{n-1}, \qquad (4)$$

де $(n+1)$– кількість вузлових точок $x_0, x_1, \dots, x_n$ в інтерполяції Лагранжа [9].

Таким чином, швидкість збіжності запропонованого Ф. Калоджеро методу є надзвичайно високою. У загальному випадку скінченно-різницевої апроксимації метод обчислення власних значень задачі (2) має порядок збіжності p, тобто

$$\frac{\lambda - \hat{\lambda}}{\hat{\lambda}} \cong \left(\frac{c}{n}\right)^{p},$$

а в даному випадку формула (4) вказує на факторіальну швидкість збіжності.

Таку високу швидкість збіжності методу Ф. Калоджеро пояснює „n–кратною колокацією“ при наближенні похідних функції. Хоча похідна функції $f \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ є локальною характеристикою, похідна многочлена n-го степеня g залежить від його значень у всіх вузлових точках $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a,b]$. Отже, лінійний оператор Z у базі $e_0, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ стандартних ортів задається матрицею (1), усі елементи якої відмінні від нуля, тоді як лінійний оператор скінченно-різницевої апроксимації у цій же базі задається, як правило, тридіагональною матрицею. Отже, запропонований Ф. Калоджеро метод вимагає більшої кількості обчислень при розв'язуванні задачі (3), ніж скінченно-різницевий метод. Проте завдяки „заповненості“ матриці Z максимальною кількістю даних про функцію $f(x) \in C[a,b]$ отримано суттєвий виграш у факторіальній швидкості збіжності методу. Обгрунтування дієздатності методу Ф. Калоджеро провів спільно з Е. Франко [9] експериментальним шляхом. Він розв'язав цим методом ряд важливих задач на власні значення і порівняв результати зі вже відомими точними власними значеннями. Проведені ним таким чином числові тести засвідчили дієвість методу та підтвердили теоретичні оцінки (4) швидкості збіжності. Проте строге доведення збіжності та аналіз апроксимаційних властивостей лінійних операторів X та Z не були проведені. Ф. Калоджеро узагальнив даний метод для випадку багатьох змінних [7] $x = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ та тригонометричної інтерполяції. Використовуючи техніку Калоджеро, Дюранд [11] отримав загальну формулу інтерполювання Лагранжа з точністю до $o(x^n)$.

У 1988 р. з'явились дві статті [1, 2], присвячені Лі–алгебричному методу дискретних апроксимацій лінійних і нелінійних динамічних систем. Назва методу „Лі–алгебрична дискретна апроксимація“ у цих працях була вжита вперше. Основною задачею дослідження у цих працях є задача Коші для системи еволюційних рівнянь із частинними похідними

$$\begin{cases} u_t = K(t,x,\partial)u + f(t,x), \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^q, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi, \quad \varphi \in B, \end{cases} \tag{5}$$

де $B-$ деякий банаховий простір. До розгляду введена алгебра Гайзенберга–Вейля $\mathcal{G} = \bigoplus_{j=1}^{q} \{x_j, \frac{\partial}{\partial x_j}, 1\}$, яка є алгеброю Лі. Як і в методі, що його використовував Ф. Калоджеро, запропоновано розглядати лінійні оператори $X_j^{(n)}, Z_j^{(n)}, I^{(n)} \in \bigotimes_{k=1}^{q} \mathbb{R}^{n_k}$, які названо „квазізображеннями“

операторів алгебри Гейзенберга–Вейля $x_j, \frac{\partial}{\partial x_j}$ та **1** відповідно. Шляхом побудови квазізображення диференціального оператора K у просторі лінійних операторів над $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{Z}_+$, задача (5) зводиться до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} du_{(n)}/dt = K_{(n)}(t)u_{(n)} + f_{(n)}(t), \\ u_{(n)}|_{t=0} = \varphi_{(n)}, \quad \varphi_{(n)} \in B_{(n)}, \end{cases} \tag{6}$$

де $B_{(n)}$ скінченновимірний простір $\mathbb{R}^N, N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_q$. Аналогічно до методу Ф. Калоджеро, редукція (6) задачі (5) на простір $B_{(n)}$ отримана шляхом q-вимірної алгебричної інтерполяції на q-вимірному кубі $D \supset \Omega$.

При використанні даного методу зроблено важливе припущення, що диференціальний оператор K належить до універсальної огортуючої алгебри $U(\mathcal{G})$ алгебри $\mathcal{G}$ Гайзенберга–Вейля. Це на практиці означає, що K можна представити як суму деяких суперпозицій операторів $x_j, \frac{\partial}{\partial x_j}$ та **1**.

У праці [1] наведену схему апроксимацій запропоновано розглядати у контексті загальної апроксимаційної схеми, викладеної у Треногіна [3], хоча відповідні умови теореми про збіжність загальної апроксимаційної схеми у цій праці перевірені не були.

У вищезгаданій статті наведено приклади застосування Лі–алгебричної схеми дискретних апроксимацій до розв'язування задачі Коші для неоднорідного рівняння теплопровідності та нелінійного рівняння Кортевега-де Фріза. Побудовано відповідні редукції даних задач на скінченновимірний простір $B_{(n)}$, хоча числові тести не проводились.

Лі–алгебричний підхід застосовувався також і до точного, аналітичного знаходження розв'язків еволюційних рівнянь із частинними похідними. Зокрема, у праці Вея та Нормана [14] показано, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = AU,\ t \geq 0, \\ U(0) = I, \end{cases} \tag{7}$$

для оператора $U(t) : B \to B$, де B– банаховий простір, можна зобразити у вигляді

$$U(t) = e^{f_1(t)A_1} \cdot e^{f_2(t)A_2} \cdot \ldots \cdot e^{f_m(t)A_m}, \tag{8}$$

якщо диференціальний оператор A задачі (7) має вигляд

$$A = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)A_i,$$

а диференціальні оператори $A_1, \ldots, A_m$ утворюють базис скінченновимірної алгебри Лі, $f_1(t), \ldots, f_m(t)$ — деякі функції, що залежать лише від алгебри Лі $\mathcal{L} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ та коефіцієнтів $a_1(t), \ldots, a_m(t)$.

Функції $f_1(t), \ldots, f_m(t)$ Вей та Норман пропонують знаходити із задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, яку вони отримують підстановкою (8) у (7).

Вольф застосовує метод Вея та Нормана для знаходження точного розв'язку рівняння Фокера–Планка [15]. Казас у праці [10] пропонує метод факторизації Фера для знаходження функцій $f_1(t), \ldots, f_m(t)$ замість розв'язування відповідної задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. У праці Казаса присутня ідея, подібна до ідеї, використаної в методі Лі–алгебричної дискретної апроксимації. А саме, Казас пропонує використовувати надійні зображення алгебри Лі якомога нижчої розмірності та зводити задачу Коші (7) до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{U}}{dt} = \hat{A}\hat{U}, \quad t > 0, \\ \hat{U}|_{t=0} = \hat{I}, \end{cases} \tag{9}$$

де $\hat{A}$– точне зображення оператора A у скінченновимірному просторі квадратних матриць деякого розміру $l \in \mathbb{Z}_+$, $\hat{I} \in \mathbb{R}^{l\times l}$– одинична матриця. Для розв'язування задачі (9) Казас пропонує використовувати факторизацію Фера. Порівнюючи вираз, отриманий для $\hat{U}(t)$ із формулою (8), Казас отримує функції $f_1(t), \ldots, f_m(t)$. При цьому алгебра $\mathcal{L}$ не обов'язково повинна бути розв'язною. Якщо алгебра $\mathcal{L}$ не є розв'язною, то метод перетворюється на наближений: добуток експонент операторів обривається на певному кроці, причому такі наближення збігаються до точного розв'язку із квадратичною швидкістю. Незважаючи на позірну подібність прийомів, що застосовуються у методі Вея і Нормана, у інтерпретації Казаса та методі Лі–алгебричних дискретних апроксимацій, ці два методи суттєво відрізняються своїми основними ідеями.

У методі Вея і Нормана центральною є ідея зображення оператора півгрупи $U(t)$ у вигляді експоненти $U(t) = e^{f_1 A_1} e^{f_2 A_2} \ldots e^{f_m A_m}$. При цьому, розв'язок $u(t,x)$ рівняння $u_t = Au$ з початковою умовою $u|_{t=0} = \varphi(x)$ шукається у вигляді $u(t,x) = U(t)\varphi(x)$. Подальші викладки пов'язані із технічною стороною побудови відповідного оператора півгрупи. У Лі–алгебричній схемі оператор півгрупи явно не використовується: центральною є ідея редукції вихідної задачі на простір алгебричних чи тригонометричних многочленів, яка здійснюється шляхом використання квазізображення алгебри Гайзенберга–Вейля.

У повідомленні М. Люстика [12] подано алгоритм застосування методу Лі–алгебричних дискретних апроксимацій до квазілінійних задач без обгрунтування збіжності схеми у цьому випадку. У цій праці запропоновано також використати узагальнену нерівність Гарді, доведену Вальдроном [13], до побудови оцінок апроксимації та доведення стійкості Лі–алгебричної схеми дискретних апроксимацій.

Отже, в оглянутій літературі чітко сформульована схема методу Лі–алгебричних дискретних апроксимацій без теоретичного доведення її збіжності. Для випадку задач на власні значення для диференціальних операторів проведено числові тести, що засвідчили високу ефективність схеми Лі–алгебричних апроксимацій для випадку вищезгаданих задач. У випадку лінійних та нелінійних динамічних систем математичної фізики доведення збіжності методу та числові тести не проводились.

Спираючись на проведений вище огляд літератури, можемо окреслити такі напрямки подальших досліджень:

1) дослідити апроксимаційні властивості квазізображень алгебри Гайзенберга–Вейля, побудованих з використанням алгебричної та тригонометричної інтерполяції Лагранжа та Ерміта;

2) дослідити умови збіжності Лі–алгебричної схеми дискретних апроксимацій розв'язання динамічних систем;

3) вивчити вплив вибору типу інтерполяції та вузлових точок на збіжність та точність методу;

4) провести числові тести;

5) побудувати модифікацію даного методу, що була б придатною для безпосереднього застосування до задач Коші із граничними умовами Діріхле або Неймана та дослідити збіжність цієї модифікації;

6) порівняти даний метод із методом скінченних різниць та методом скінченних елементів у сенсі теоретичного обгрунтування, меж застосовності та ефективності.

Деякі з окреслених щойно завдань вже виконані повністю або частково. Так, побудовано оцінки апроксимації для квазізображень алгебри Гайзенберга–Вейля у просторі алгебричних многочленів [5], проведено числові тести методу для рівняння теплопровідності [6], побудовано модифікацію Лі–алгебричного методу дискретних апроксимацій для розв'язування задач Коші із граничними умовами Діріхле та доведено відповідні оцінки апроксимації в цьому випадку [4], обчислено квазізображення операторів алгебри Гайзенберга–Вейля у випадку алгебричної та тригонометричної інтерполяції Ерміта.

[1] *Митропольский Ю. А., Прикарпатский А. К., Самойленко В. Гр.* Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций линейных и нелинейных динамических систем математической физики // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**. – С. 453–458.

[2] *Самойленко В. Гр.* Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций динамических систем математической физики и оценки её точности.– Асимптотические методы в задачах мат. физики. – К.: Ин-т математики АН У С С Р, 1988. – С. 144–151.

[3] *Треногин В. А.* Функциональный анализ.– М.: Наука, 1980.

[4] *Bihun O. H.* Modification of the Lie-algebraic scheme and approximation error estimations.– Matematical Studies. – V. 20, № 2 (2003). – P. 179–184.

[5] *Bihun O. H., Luśtyk M. S.* Approximation properties of the Lie-algebraic scheme. – Matematical Studies.– V. 20, № 1 (2003). – P. 85–91.

[6] *Bihun O., Luśtyk M.* Numerical tests and theoretical estimations for a Lie-algebraic scheme of discrete approximations. – Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science. 6 (2003). – P. 3–10.

[7] *Calogero F.* Interpolation, differentiation and solution of eigenvalue problems in more than one dimension // Lett. Nuovo Cimento. – Vol. 38, 13 (1983). – P. 453–459.

[8] *Calogero F.* Isospectral matrices and polynomials // Il Nuovo Cimento. – Vol. 58B 2 (1980). – P. 169–180.

[9] *Calogero F., Franco E.* Numerical tests of a novel technique to compute the eigenvalues of differential operators // Il Nuovo Cimento. – Vol. 89B 2 (1985). – P. 161–208.

[10] *Casas F.* Solution of linear partial differential equations by Lie algebraic methods // J. of Comp. and Appl. Math. – 76 (1996). – P. 159–170.

[11] *Durand L.* Lagrangian differentiation, integration and eigenvalues problems // Lett. Nuovo Cimento. – Vol. 38, 9 (1983). – P. 311–317.

[12] *Luśtyk M.* Lie-algebraic discrete approximation for nonlinear evolution equations // Mathematical Methods and Physicomechanical Fields. – Vol. 42, № 1 (1999). – P. 7–10.

[13] *Waldron S.*A multivariate form of Hardy's inequality and L_p– error bounds for multivariate Lagrange interpolation schemes // SIAM J. Math. Anal. – Vol.28, No.1 (1997). – P. 233–258.

[14] *Wei J., Norman E.* On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials // Proc. Amer. Math. Soc. – 15 (1964). – P. 327–334.

[15] *Wolf F.* Lie algebraic solutions of linear Fokker–Plank equations // J. Math. Phys. – 29 (1988). – P. 305–307.

METHOD OF LIE-ALGEBRAIC APPROXIMATIONS IN THE THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS

Oksana BIHUN, Mykola PRYTULA

Ivan Franko Lviv National University
1 Universytetska Str., Lviv 79602, Ukraine

The paper contains a detailed review of the literature devoted to the Lie-algebraic approach in problems of mathematical physics. The present state of studies in this field is evaluated and directions of further investigations are suggested.