

ВПЛИВ АСИМЕТРІЇ ШАРНІРНОГО ЗАКРІПЛЕННЯ ВИДОВЖЕНИХ РЕБЕР ПОДАТЛИВОЇ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ ПЛАСТИНИ-СМУГИ НА ЇЇ ДЕФОРМАТИВНІСТЬ

На основі варіанта уточненої теорії трансверсально-ортотропних пластин, що враховує наближено всі компоненти просторових тензорів напружень і деформацій та вектора пружних переміщень, отримано аналітичний розв'язок задачі про деформативність навантаженої нормальним рівномірно розподіленим зусиллям трансверсально-ортотропної пластини-смуги за асиметричного шарнірного закріплення видовжених ребер. Оцінено вплив асиметрії шарнірного закріплення бічних граней на деформативність пластини-смуги.

Ключові слова: *пластина-смуга, трансверсальна ортотропія, видовжене ребро, асиметричне шарнірне закріплення, рівномірно розподілене навантаження, деформативність*

Вступ. Як навантажені елементи будівельних конструкцій, а також пристрої і технічні засоби різноманітного цільового призначення часто застосовують пластини-смуги із трансверсально ортотропних матеріалів [1–6]. Способи закріплення видовжених бічних граней суттєво впливають на їхню деформативність, що має важливе значення, зокрема під час конструювання приладів точної механіки [19]. Тому актуально отримати в межах теорій пластин прості інженерні оцінки деформативності для експертного прийняття рішення про можливість використання цих тонкостінних елементів на стадії проектування відповідальних об'єктів.

Деформативності пластин-смуг за дії різних силових і термосилових навантажень присвячена низка праць [7–11, 13–18]. Проте в них відсутня інформація про шарнірне закріплення протилежних бокових граней по видовжених ребрах, що лежать не в одній площині. Саме застосовуючи запропонований раніше варіант уточненої теорії трансверсально-ортотропних пластин, можна побудувати та реалізувати модель такого закріплення, апроксимуючи компоненти вектора пружного переміщення за нормальною до серединної площини координатою.

1. Формулювання задачі та її розв'язання. Розглянемо два випадки шарнірного закріплення пластини-смуги товщиною $2h$ та шириною $2l$ по видовжених ребрах, навантаженої рівномірно розподіленим нормальним зусиллям P по верхній лицевій площині. У першому вона симетрично закріплена по нижніх ребрах бічних граней (див. рис. 1, схема *a*), а в другому – асиметрично по верхньому ребру лівої бічної грані та нижньому ребру правої (схема *б*). В обох випадках її напружено-деформований стан визначають через функції узагальнених переміщень: u – переміщення точок серединних площин пластини-смуги у тангенціальному напрямку x_1 ; γ – кут повороту відносно осі x_3 нормального до серединної площини елемента перед деформуванням; w – переміщення точок серединних та w_1 лицевих площин уздовж нормальної координати x_3 .

Ці функції є розв'язками системи двох лінійних звичайних диференціальних рівнянь, кожне з яких другого порядку [13]:

$$u'' + \beta w_1' = 0, \quad (1)$$

✉ v.pakosh@ukr.net

$$w_1'' - \frac{20}{3} \frac{E_0}{\Lambda} (w_1 / h + \lambda u') = 4\bar{P}, \quad (2)$$

$$\gamma'' - \bar{\kappa}_1^2 (\gamma + w) = 0, \quad (3)$$

$$\gamma' + w'' = \bar{P}, \quad (4)$$

де $\bar{\kappa}_1^2 = \Lambda / \bar{D}$, $\beta = 2\lambda E_0 / \bar{B}$, $\bar{P} = P / \Lambda$.

Тут і надалі використовували введені в праці [12] позначення для узагальнених жорсткісних характеристик податливих до трансверсальних деформацій зсуву та стиснення пластин: $\bar{B} = 2Eh(1 + \alpha) / \delta^2$ – жорсткість на розтяг, $\bar{D} = h^2 \bar{B} / 3$ – згинна та $\Lambda = 2k'hG'$ – зсувна; E та ν – модуль Юнга й коефіцієнт Пуассона в серединних та еквідистантних їм площинах; E' та ν' – ті ж величини в площинах, перпендикулярних до серединної; G' – трансверсальний модуль зсуву, $\alpha = (1 + \nu)(\nu')^2 (E / E') / \delta^2$; $K' = 14 / 15$; $\delta^2 = (1 - \nu^2)$; $\lambda = \nu / (1 - \nu)$; $E_0 = E'(1 - \nu) / (1 - \nu - 2\nu\nu')$ [10].

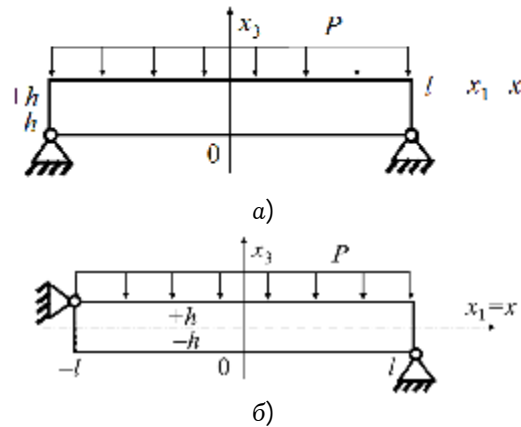


Рис. 1. Симетричне (а) та асиметричне (б) шарнірне закріплення видовжених ребер

Системи диференціальних рівнянь (1), (2) та (3), (4) є незалежними. Їхні розв'язки мають вигляд

$$u = (4\bar{P}\beta b^2 + C_1)x + C_2 - \beta b(C_7 \operatorname{ch} x / b + C_8 \operatorname{sh} x / b), \quad (5)$$

$$w = \frac{\bar{P}x^2}{2} - \frac{P}{D} \left(\frac{x^4}{24} + C_5 \frac{x^3}{6} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x \right) + C_6, \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{P}{D} \left(\frac{x^3}{6} + C_5 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \right), \quad (7)$$

$$w_1 = C_7 \operatorname{sh}(x / b) + C_8 \operatorname{ch}(x / b) - 4\bar{P}b^2, \quad (8)$$

де $b = h / k$, $k^2 = \frac{20}{3} \frac{hE_0}{\Lambda} \frac{1}{1 + \alpha}$.

Однак розв'язки (5)–(8) взаємозв'язані для обох випадків шарнірного закріплення видовжених ребер крайовими умовами, якщо $x_1 = \pm l$.

Умови навантаження на лицевих площинах $x_3 = \pm h$ враховано під час виведення рівнянь рівноваги [12], а на бічних гранях $\{(x_1, x_3) : |x_1| = l, |x_3| \leq h\}$ мають вигляд

$$N(\pm l) = 0, \quad M(\pm l) = 0, \quad (9)$$

де розтягувальне зусилля N і згинний момент M визначили за формулами [12]

$$N = \bar{B}e_1^0 + 2h\lambda E_0 e_3^0,$$

$$M = \bar{D}e_1^1.$$

Крайові умови в точках шарнірного закріплення перерізу пластини-смуги такі

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad u_1(-l, -h) = 0, \quad u_3(-l, -h) = 0, \\ u_1(l, -h) = 0, \quad u_3(l, -h) = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad u_1(-l, h) = 0, \quad u_3(-l, h) = 0, \\ u_1(l, h) = 0, \quad u_3(l, h) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Підставляння виразів для апроксимацій тангенціального $u_1(x_1, x_3)$ та нормального $u_3(x_1, x_3)$ переміщень [12]

$$u_1(x_1, x_3) = u(x) + x_3 \gamma(x),$$

$$u_3(x_1, x_3) = w(x) + (x_3 / h) w_1(x)$$

в умови (10) і (11) дає співвідношення

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad u(-l) - h\gamma(-l) = 0, \quad w(-l) - w_1(-l) = 0, \\ u(l) - h\gamma(l) = 0, \quad w(l) - w_1(l) = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad u(-l) + h\gamma(-l) = 0, \quad w(-l) + w_1(-l) = 0, \\ u(l) - h\gamma(l) = 0, \quad w(l) - w_1(l) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

З рівностей (9) та (10), (11) отримуємо вирази для постійних інтегрування C_i , $i = \bar{1}, 4$

у випадку а):

$$C_1 = C_2 = C_4 = C_5 = C_7 = 0,$$

$$C_3 = -\bar{P}l^2 / 2,$$

$$C_6 = -\frac{\bar{P}}{2} l^2 - \frac{5}{24} \frac{P}{D} l^4 - 4\bar{P}b^2 - 4\bar{P}lb - \frac{1}{3} \frac{\beta^3 k}{D \beta},$$

$$C_8 = \left(4\bar{P}lh / k + \frac{1}{3} \frac{\beta^3 k}{D \beta} \right) / sha \quad (14)$$

та у випадку б):

$$C_1 = C_5 = 0, \quad C_2 = \frac{\bar{P}l^2 h}{D} / (cha - 1), \quad C_3 = -\bar{P}l^2 / 2,$$

$$C_4 = -4\bar{P}lbcha \left(1 + \frac{b}{l} tha \right),$$

$$C_6 = -\frac{5}{24} \frac{P}{D} l^4 \left(1 + \frac{12}{5} \frac{\varepsilon^2}{\bar{\kappa}_1^2} \right) + \frac{Pl^3 h}{\beta b D} \frac{sha}{cha - 1},$$

$$C_7 = \frac{Pl^3 h}{\beta b D} / (cha - 1),$$

$$C_8 = -4\bar{P}lb \left(1 + \frac{h}{\beta l^2} \right) / \left(sha - \frac{\varepsilon}{\beta b} cha \right), \quad (15)$$

де $a = l/b$, $\varepsilon = h/l$, $\bar{\kappa}_1^2 = \kappa_1^2 / h^2$.

Слід зауважити, що для випадку б) бракує умов для визначення сталої інтегрування C_2 , оскільки рівності (13) є взаємозалежні. Тому, припускаючи, що прогин w малий проти товщини h , використали рівність $u(0) = 0$.

За відшуканими формулами для узагальнених переміщень деформативність [8] для обох випадків шарнірного закріплення видовжених ребер пластини-смуги матиме вигляд

$$а) \quad d_1 = w^{(1)}(0) - w_1^{(1)}(0) = d_k \left[1 + \frac{12}{5} \frac{\varepsilon^2}{\bar{\kappa}_1^2} (1 + 8\varepsilon^2 / k^2) \right], \quad (16)$$

$$б) \quad d_2 = w^{(2)}(0) - w_1^{(2)}(0) = -d_k \left[\left(1 + \frac{12}{5} \frac{\varepsilon^2}{\bar{\kappa}_1^2} \right) - \frac{8}{5} \varepsilon - \frac{9b}{5} \frac{\varepsilon^4}{k^2 \bar{\kappa}_1^2} \right], \quad (17)$$

де $d_k = \frac{5Pl^4}{24D}$ – аналог деформативності пластини-смуги за застосування класичної теорії Кірхгофа–Лява.

2. Аналіз результатів і висновки. Порівняння величин, які визначають за формулами (16) і (17), свідчить, що деформативність за асиметричного закріплення видовжених протилежних ребер пластини-смуги зменшується. Якщо в цих формулах знехтувати величини, що мають порядок малості $O(\varepsilon^2)$, то для різниці деформативностей отримаємо:

$$\Delta = |d_2 - d_1| \approx \frac{8}{5} \varepsilon d_k.$$

Тобто, для пластин-смуг середньої товщини (при $\varepsilon = h/l \approx 0,1$) спосіб закріплення дає суттєву поправку у значеннях їх деформативності. Тому в таких випадках необхідно враховувати розташування лінії шарнірного закріплення видовжених бокових граней пластин-смуг.

1. Васильченко О. В., Квітковський Ю. В., Миргород О. В., Стельмах О. А. Будівельні конструкції та їх поведінка в умовах надзвичайних ситуацій: навч. пос. – Харків: ХНАДУ, 2015. – 488 с.
2. Винников Ю. Л., Пічугін С. Ф., Довженко О. О. Будівельні конструкції. – Полтава: АСМІ, 2015. – 402 с.
3. Державні будівельні норми України. ДБН А.2.2-3:2014. – Київ: Мінрегіон України, 2014. – 38 с.
4. Державні будівельні норми України. ДБН В.1.2-14-2018. Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель, споруд, будівельних конструкцій та основ. – Київ: Мінрегіон України, 2018. – 30 с.
5. Кріпак В., Колякова В. Взаємозалежність конструктивних і розрахункових схем будівлі // Будівельні конструкції. Теорія і практика. – 2021. – № 8. – С. 17–21.
6. Мардер А. П., Єврейнов Ю. М., Пламеницька О. А. та ін. Конструкції будівельні // Архітектура: короткий словник-довідник. – Київ: Будівельник, 1995. – С. 133–139.
7. Марчук М. В., Горячко Т. В., Пакош В. С., Лесик О. Ф. Вплив податливості до трансверсального стиснення на деформативність і напружений стан шарнірно закріпленої по видовжених торцях пластини-смуги // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 180–184.
8. Марчук М. В., Пакош В. С., Лесик О. Ф., Сачук Ю. В. Деформативність трансверсально-ортотропної пластини-смуги за шарнірного закріплення нижніх або верхніх пар видовжених ребер // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2021. – Вип. 19. – С. 88–93.

9. Марчук М. В., Пакош В. С., Харченко В. М. Власні частоти шаруватих композитних пластин-смуг з податливими до трансверсальних зсуву та стиснення складниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – № 2. – С. 151–156.
Те саме: Marchuk M. V., Pakosh V. S., Kharchenko V. M. Natural frequencies of layered composite plates-strips with components compliant to transverse shear and compression // J. Math. Sci. – 2014. – 203, No. 2. – P. 185–192.
<https://doi.org/10.1007/s10958-014-2099-1>.
10. Марчук М. В., Пакош В. С., Харченко В. М. Термопружний стан рівномірно нагрітої шарнірно закріпленої на торцях нижньої лицевої площини композитної пластини-смуги // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 181–185.
11. Механика композитов: в 12-ти т. Т. 8: Статика элементов конструкций / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, И. Г. Емельянов и др. – Киев: А.С.К., 1999. – 384 с.
12. Осадчук В. А., Марчук М. В. Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 43–50.
13. Пакош В. С., Харченко В. М., Хом'як М. М., Лесик О. Ф. Вплив податливості до трансверсального стиснення на деформативність шарнірно закріпленої пластини-смуги // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2020. – Вип. 18. – С. 140–144.
14. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки / Пер. с англ. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
15. Bhavikatti S. S. Theory of Plates and Shells. 3rd Edition. – New Delhi: New Age International Publishers, 2016. – 312 p.
16. Marchuk M. V., Pakosh V. S. The influence pliability to shear and compression on the deformability uniformly heated of composite plate-strip // Sci. and Education a New Dimension, Natural and Techn. Sci. – 2015. – III (8), Issue: 73. – P. 79–81.
17. Reddy, J. N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. 2nd Edition. – Boca Raton: CRC Press, 2006. – 568 p.
18. Ugural Ansel C. Plates and Shells: Theory and Analysis. 4th Edition. – Boca Raton: CRC Press, 2017. – 618 p.
19. Ventsel Eduard, Krauthammer Theodor. Thin Plates and Shells Theory: Analysis, and Applications. 1st Edition. – CRC Press, 2001. – 682 p.

INFLUENCE OF ASYMMETRY OF THE HINGED FIXING FOR ELONGATED RIBS OF PLATE-STRIP PLIABLE TO TRANSVERSAL SHEAR DEFORMATIONS AND COMPRESSION ON ITS DEFORMABILITY

On the basis of a variant of the refined theory of transversely orthotropic plates, which takes into account approximately all components of the spatial tensors of stresses and strains and the vector of elastic displacements, an analytical solution to the problem of the deformability of a transversely orthotropic plate-strip loaded with a normal, uniformly distributed force under asymmetric hinge fastening of elongated ribs was obtained. The impact of the asymmetry of the hinged fastening of the lateral faces on the level of deformability of the plate-strip in comparison with the symmetric case was evaluated.

Key words: plate-strip, rib, transverse orthotropy, elongated rib, asymmetric hinged fastening, uniformly distributed load, deformability.

¹Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;

²Нац. ун-т «Львівська політехніка» Львів;

³Західноукраїнський нац. ун-т МОН України, Тернопіль;

⁴Держ. підпр. «Констр. бюро «Південне»
ім. М. К. Янгеля», Дніпро