

ТЕСТУВАННЯ СХЕМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ В-СПЛАЙНІВ ДЛЯ ПЛАСТИНИ-СМУГИ В МЕЖАХ ГІПОТЕЗ КІРХГОФА–ЛЯВА ТА С. П. ТИМОШЕНКА

Згинання пластини-смуги поперечним постійним навантаженням розглянуто як тестову задачу для методу скінченних елементів (МСЕ) з використанням В-сплайнів. Диференціальні рівняння з крайовими умовами та відповідні варіаційні формулювання наведено для тонкої пластини-смуги в межах класичної теорії (гіпотези Кірхгофа–Лява) та для податливих до поперечного зсуву пластин (гіпотези С. П. Тимошенка). За плоского деформованого стану розглянуто В-сплайни як одновимірні базисні функції, які мають вищий порядок гладкості, ніж стандартні апроксимації МСЕ (на основі поліномів Лагранжа). Для врахування однорідних крайових умов декілька базисних В-сплайнів, носії яких виходять за межі заданої області, потребують модифікації, яку виконано за допомогою техніки кратних вузлів, за якою отримуємо відкриті В-сплайни. Обчислено внески в матрицю жорсткості одиночного елемента розбиття від інтегралів базисних функцій та їхніх похідних. Продемонстровано процедуру асемблювання елементів для формування глобальної системи лінійних алгебричних рівнянь. Здійснено порівняння отриманих результатів з аналітичними розв'язками й зауважено їхнє добре узгодження. Ці аналітичні й методологічні напрацювання перспективні для застосування в TDD (Test Driven Development) методології створення програмного забезпечення, зокрема, й для двовимірних моделей.

Ключові слова: *пластина-смуга, метод скінченних елементів, В-сплайни, тестування програмного забезпечення.*

Вступ. Метод скінченних елементів (МСЕ) вже давно став потужним інструментом досліджень для багатьох теоретичних і прикладних задач [15]. Існує широкий вибір як комерційних, так і відкритих (вільних) програмних пакетів [14], однак, з'являються нові ідеї, об'єкти дослідження, інформаційні технології та комп'ютерні ресурси, які стимулюють його подальший розвиток. Стандартні схеми МСЕ переважно використовують як сплайн-апроксимації поліноми до третього порядку (найчастіше – квадратичні), що визначені на компактному носії (елементі), а невідомі параметри є значеннями шуканих функцій у вузлах елементів [25]. Навпаки, за використання В-сплайнів носії – декілька комірок розбиття, де сплайн має ненульові значення, а коефіцієнти лінійного подання невідомих величин (переміщень) не інтерполюють значення у вузлах [11, 13]. Водночас, враховуючи адитивність інтеграла по області, що є сумою внесків кожної комірки, можна адаптувати і використовувати термін “скінченний елемент” і для В-сплайнів, розуміючи саме внесок окремої комірки. Такі етапи МСЕ, як варіаційне формулювання задачі, розбиття області на елементи простої геометрії, апроксимація невідомих (шуканих) функцій лінійною комбінацією сплайнів, формування системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), стосуються й схем МСЕ з використанням В-сплайнів, що позиціонує їх як проміжні між стандартними схемами й такими, що вільні від процедури розбиття (meshfree FEM) [16].

Мета дослідження – побудувати схеми МСЕ з використанням В-сплайнів для задачі циліндричного згину нескінченної в одному з напрямів пластини-смуги, яку зводять до типової крайової задачі Діріхле в найпростішому одновимірному випадку. Важливий не сам числовий розв'язок (який

✉ khomnick98@gmail.com

порівнюватимемо з відомим аналітичним), а деталі реалізації МСЕ (послідовність і специфіка етапів робочого процесу, аналітичні результати деяких розрахунків тощо). Їх опускають під час розв'язування практичних задач, де акцентують на отриманні та інтерпретації числових результатів, а програмний код використовують вже як інструмент. Очевидно, наявний програмний продукт не відмінняє потребу створення нового, а також модифікацію та розширення функціональності існуючих програм. Етап тестування є вкрай важливим і затратним [17, 23]. Тестові задачі, які верифікують програмні модулі для різних "реперних" точок реалізації функціональності, сприяють "візуалізації" очікуваних проміжних результатів, локалізації помилок у кодї, формалізації тестових процедур, скороченню часу і підвищенню ефективності програмної розробки загалом, що також має навчальний ефект.

1. Математичне формулювання тестових задач. Згин пластини поперечним навантаженням – одна з типових задач, що добре висвітлена в літературі [1–7, 10, 18, 20, 21, 24]. Для тонких пластин з ізотропних матеріалів, як правило, адекватною є класична теорія на основі гіпотез Кірхгофа–Лява, а для податливих до поперечних зсувів композиційних пластин використовують теорії на основі гіпотези С. П. Тимошенка.

Пластина-смуга є частковим випадком прямокутної пластини, видовженої в одному з напрямів (нехай U), до якої правомірно застосувати гіпотезу плоского деформованого стану. Тоді невідомі всі характеристики напружено-деформованого стану (НДС) (переміщення, деформації та напруження) будуть функціями тільки координат (X та Z) точок деякого плоского перерізу, нормального до напрямку видовження U (в прямокутній системі координат (X, Y, Z) , де вісь Z напрямлена по товщині). Властивості матеріалу, крайові умови, навантаження та інші характеристики, що є входними параметрами задачі, вздовж U також не змінюються. Тоді двовимірні рівняння теорії пластин можна звести до одновимірної моделі, де невідомі величини є функціями тільки координати. Це дає змогу отримати аналітичні розв'язки [19, 24], іноді – навіть у поліномах, що зручно для тестування обчислювальних методів, зокрема, нових схем МСЕ.

Математична модель, яка описує циліндричний згин смуги з урахуванням податливості до поперечного зсуву (в межах гіпотез С. П. Тимошенка), містить систему рівнянь для прогинів $w(x)$ та кутів повороту $\gamma(x)$:

$$\Lambda(\gamma' + w'') = p(x), \quad D\gamma'' - \Lambda(\gamma + w) = 0, \quad (1)$$

де штрих означає похідну по x , $\Lambda = 2tk'G'$ – жорсткість на поперечний зсув, $D = 2Et^3 / 3 / (1 - \nu^2)$ – циліндрична жорсткість, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, $2t$ – товщина пластини, $k' = 5/6$, $p(x) = q = \text{const}$. Систему (1) доповнюють умови шарнірного підкріплення на обох краях $x = 0$ та $x = l$:

$$w(0) = 0, \quad \gamma'(0) = 0 \quad \text{і} \quad w(l) = 0, \quad \gamma'(l) = 0. \quad (2)$$

Еквівалентна до (1), (2) варіаційна задача полягає в мінімізації функціоналу повної потенціальної енергії [8]:

$$\int_0^l [\Lambda(\gamma + w')^2 + D(\gamma'')^2 - 2q\gamma] dx \rightarrow \min, \quad (3)$$

де

$$w(x) \in H_0^1(w(x)) = \{w(x) \mid \{w, w'\} \in L_2[0, l], w(0) = w(l) = 0\}, \quad (4)$$

$$\gamma(x) \in H^1(\gamma(x)) = \{\gamma(x) \mid \{\gamma, \gamma'\} \in L_2[0, l]\}, \quad (5)$$

$L_2[0, l] = \{f(x) \mid \int_0^l f^2(x) dx < \infty\}$ – простір функцій, інтегрованих з квадратом на заданому відрізку $[0, l]$.

Зауважимо, що прогини $w(x)$ повинні задовольняти однорідні головні крайові умови. Це створює специфічні вимоги до вибору базисних функцій МСЕ. Однорідні природні крайові умови, пов'язані з похідними кутів повороту $\gamma(x)$, у функціоналі (3) виконуються автоматично, а тому жодних додаткових вимог враховувати не потрібно.

Внаслідок граничного переходу $E/G' \rightarrow 0$ (тоді $\gamma + w' = 0$) отримуємо математичну модель у межах гіпотез Кірхгофа–Лява (бігармонійне рівняння)

$$\Delta \Delta w = q \quad (6)$$

та крайові умови

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0 \quad \text{і} \quad w(l) = 0, \quad w'(l) = 0, \quad (7)$$

де $\Delta(\dots) = d^2(\dots) / dx^2$ – оператор Лапласа в одновимірному випадку.

Аналітичний розв'язок цього рівняння дорівнює першому доданку розв'язку для задачі (1), (2), який наведений у додатку А.

Еквівалентна до (6), (7) варіаційна задача

$$\int_0^l [D(w')^2 - 2qw] dx \rightarrow \min, \quad (8)$$

де

$$w(x) \in H_0^2(w(x)) = \{w(x) \mid \{w, w', w''\} \in L_2[0, l], w(0) = w(l) = 0\}. \quad (9)$$

Тут вимоги гладкості до прогинів $w(x)$ значно строгіші, ніж для задачі (3), $H_0^2 \subset H_0^1$, що створює суттєві труднощі для стандартних схем МСЕ, де базисні функції належать класу неперервних функцій C^0 .

За крайових умов іншого типу для задач (3) або (8) потрібно брати, можливо, дещо інші простори функцій. Наприклад, якщо смуга жорстко защемлена по краях, то

$$w(0) = 0, \quad \gamma(0) = 0 \quad \text{і} \quad w(l) = 0, \quad \gamma(l) = 0 \quad (10)$$

або

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0 \quad \text{і} \quad w(l) = 0, \quad w'(l) = 0. \quad (11)$$

Відповідно, $w(x), \gamma(x) \in H_0^1$ – для задачі (3) та умов (10) і $w(x) \in H_{0,1}^2$ – для задачі (8) та умов (11). Тут $H_{0,1}^2(w(x)) = \{w(x) \in H_0^2, w(0) = w(l) = 0\}$, тобто $H_{0,1}^2 \subset H_0^2$, що також є перепорою для застосування стандартних схем МСЕ.

Для визначеності зафіксуємо числові характеристики. Нехай $l = 10$, $E/G' = 50$, $\nu = 2/10$, $k' = 5/6$. Оскільки задача лінійна, то можна покласти $q/D \rightarrow 1$. Оцінимо $D/\Lambda = t^2(E/G') / (3k'(1-\nu^2))$ для різних значень параметра тонкостінності $s = l/(2t)$. Для $t = 1$ (товста пластина, $s = 5$): $D/\Lambda \approx 50 / (2,5 * 1) = 20$; для $t = 1/2$ (пластина середньої товщини, $s = 10$): $D/\Lambda \approx 50 / (4 * 2,5) = 5$; для $t = 1/4$ (тонка пластина, $s = 20$): $D/\Lambda \approx 50 / (16 * 2,5) = 5/4 \sim 1$. Отже, для коректного порівняння, наприклад, прогинів тонких пластин згідно з гіпотезами Кірхгофа–Лява або

С. П. Тимошенка (відповідно, моделі (6) і (1)) у розглянутих надалі тестових схемах МСЕ формально можна брати

$$q = 1, \quad q/D = 1 \quad \text{і} \quad D/\Lambda = 1. \quad (12)$$

В інтегралах варіаційних задач (3) і (8) зустрічаються добутки функцій та їхніх похідних до другого порядку включно, причому другі похідні присутні тільки в задачі (8). Задача (3) складніша, ніж (8) в тому сенсі, що невідомою в ній є вектор-функція, а в іншій – скалярна функція. З метою поступового ускладнення етапів тестування нових схем МСЕ розглянемо також задачу для мембрани [21]:

$$\Delta u(x) + a^2 u(x) + f(x) = 0, \quad (13)$$

де $u(x)$ – невідома функція, що задовольняє однорідні нульові умови:

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \quad (14)$$

Варіаційна задача, еквівалентна до (13), (14):

$$\int_0^l [(u')^2 - a^2 u^2 - 2fu] dx \rightarrow \min, \quad (15)$$

де $u(x) \in H_0^1(u(x))$. Якщо параметр a^2 дорівнює нулю, то маємо класичний оператор Лапласа для одновимірних задач з однорідними головними умовами.

Тестові розв'язки наведено в додатку А та зображено на рис. 1, причому прогини $w_{KL}(x)$ і $w_T(x)$ (гіпотези Кірхгофа–Лява або С. П. Тимошенка, відповідно) в площині рисунка для тестових параметрів (12) практично не розрізняються.

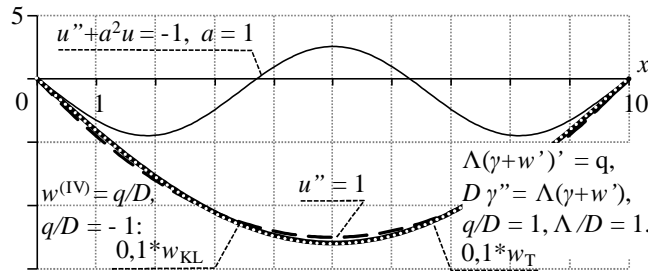


Рис. 1. Аналітичні розв'язки тестових задач

2. **Загальна схема застосування МСЕ** передбачає такі етапи:

- 1) розбиття області на скінченну кількість елементів, що не перекриваються;
- 2) подання шуканого розв'язку лінійною комбінацією базисних функцій:

$$u(x) = \sum_{i=1}^N c_i B_i(x), \quad B_i(x) \in H_0^1; \quad (16)$$

3) підставлення (16) у функціонал (13) та отримання дискретної задачі, яку зводять до СЛАР для c_i :

$$A_{ij} c_j = F_i, \quad (17)$$

де $A_{ij} = A_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ – коефіцієнти симетричної матриці жорсткості, а F_i – дискретне навантаження (вектор правої частини, ВПЧ). Оскільки, як правило, базисні функції $B_i(x)$ мають компактний носій

$\text{supp } B_i = \{x \mid B_i(x) \neq 0, x \in [0, l]\}$, то матриця системи (18) має розріджену структуру, що дає змогу застосувати ефективні методи для її збереження і розв'язування.

Зауважимо, що стандартні схеми МСЕ в поданні (16) використовують поліноми лагранжевого типу [25], а коефіцієнти c_i є значеннями базисних функцій у вузлах: $c_i = B_i(x_i)$, причому виконується умова інтерполяції $B_i(x_j) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера. Використовуватимемо В-сплайни, для яких ця умова не виконується [11, 13]. Також носій В-сплайна не можна ототожнювати зі скінченним елементом, оскільки $\text{supp } B_i \cap \text{supp } B_j \neq \emptyset$, якщо $|i - j| < p + 1$, де $p > 0$ – деяке число, що залежить від порядку полінома $B_i(x)$. Через адитивність інтеграла для розбиття області $[0, l]$ на NEL відрізків матимемо:

$$\int_0^l u(x)v(x)dx = \sum_{i=1}^{NEL} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x)v(x)dx, \quad (18)$$

де $u(x)$, $v(x)$ – базисні функції або їхні похідні, а x_i – вузли рівномірного розбиття (нерівномірне можливе, але тут не розглядаємо). Під "скінченним елементом" в МСЕ з використанням В-сплайнів як базисних функцій розумітимемо відрізок $[x_{i-1}, x_i]$. На кожному з таких відрізків-елементів маємо $k + 1$ В-сплайнів (аналог базисних функцій лагранжевих елементів), де k – степінь В-сплайна.

Для асемблювання (формування) СЛАР (17) у стандартних схемах МСЕ використовуємо умову інтерполяції для спільних вузлів сусідніх елементів, а для схем на базі В-сплайнів – умову адитивності (18). З урахуванням симетрії матриці $A_{ij} = A_{ji}$ достатньо обчислювати інтеграли, що визначають взаємовплив i -го відрізка і наступних k відрізків (сусідів) праворуч. Матриця жорсткості A_{ij} та вектор F_i формуємо зі суми внесків матриць $M_{i,pq}^{(k)}$ і векторів $F_i^{(k)}$ кожного з елементів:

$$[M_{i,pq}^{(k)}]_{m,n=1}^{k+1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i+m-1,(p)}^{(k)} B_{i+n-1,(q)}^{(k)} dx, \quad [F_i^{(k)}]_{m=1}^{k+1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i+m-1}^{(k)} dx, \quad (19)$$

де k – степінь полінома базисного сплайна ($k \in \{2, 3\}$), $s, p \in \{0, 1, 2\}$ – порядок диференціювання, $i = 1, \dots, NEL$, $NEL = l/h$, $h = x_i - x_{i-1}$ – постійний крок розбиття, $x_0 = 0$, $x_{NEL} = l$.

Після знаходження c_i невідомі функції можна обчислити за формулою (16) у довільній множині точок, не обов'язково на межі відрізків розбиття.

3. В-сплайни як базисні функції МСЕ. Для визначення В-сплайнів степеня k використовують рекурентні формули Кокса–де Бюра [12, 22]

$$B_i^{(k)}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{(k-1)} + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{(k-1)}, \quad (20)$$

причому $B_i^{(0)}(x) = 1$, якщо $x_i \leq x < x_{i+1}$, інакше – $B_i^{(0)}(x) = 0$. На практиці обмежуються квадратичними і кубічними В-сплайнами (додаток Б).

В-сплайн $B_i^{(k)}(x)$ має компактний носій, тобто він відмінний від нуля на проміжку $x_i \leq x < x_{i+k+1}$, $\text{supp } B_i^{(k)} = [x_i, x_{i+k+1}]$, і є поліномом степеня k на кожному з інтервалів, $B_i^{(k)} \in P_k([x_i, x_{i+k+1}])$, з неперервними похідними до

$(s-1)$ -го порядку включно, $d^{(s-1)}B_i^{(k)}(x)/dx^{(s-1)} \in C_0([x_i, x_{i+k+1}])$. Точки розбиття $x_i \leq x_{i+1} \leq \dots \leq x_{i+k+1}$ називають вузловим вектором, причому деякі з них можуть повторюватися (кратні вузли). Найчастіше використовують рівномірне (уніформне) розбиття з некрatними вузлами $x_{i+j} = x_i + jh$, $j = \{1, 2, \dots, k+1\}$, де $h = (x_{i+k+1} - x_i) / (k+1)$ – постійний крок. За K кратних вузлів інтервал носія $x_{i+k+1} - x_i > 0$ для $B_i^{(k)}(x)$ ділимо на меншу кількість рівних частин, $h = (x_{i+k+1} - x_i) / (k - K + 1)$.

Для базисних В-сплайнів, якщо $x_i = 0$, $h = 1$, із (21) отримаємо спрощену формулу (зі заміною аргументу x на t , щоб підкреслити використання локальної системи координат)

$$b_k(t) = (t/k) b_{k-1} + ((k+1-t)/k) b_{k-1}, \quad t \in [0, k+1]. \quad (21)$$

з умовами для початку рекурсії $b_0(t) = 1$, якщо $0 \leq t < 1$, інакше – $b_0(t) = 0$. Використовуючи масштабування та зміщення аргументу відносно початку носія В-сплайна x_i ,

$$t \leftarrow (x - x_i) / h = x / h - i, \quad x_i = ih, \quad (22)$$

можемо транслювати базисні В-сплайни до глобальної координати $x \in [0, l]$, отримавши систему кардинальних В-сплайнів:

$$B_i^{(k)}(x) = b_k(x/h - i). \quad (23)$$

Оскільки $x = x_i + ht$, $t \in [0, k+1]$ для кардинальних сплайнів у межах їхнього відрізка-носія, то похідні порядку s для кардинальних В-сплайнів у h^s разів менші за відповідні локальні похідні для базисних В-сплайнів:

$$\frac{d^{(s)}}{dx^s} B_i^{(k)}(x) = \frac{d^{(s)}}{dt^s} b_k(t) \left(\frac{dt}{dx} \right)^s = \frac{1}{h^s} \frac{d}{dt} b_k(t). \quad (24)$$

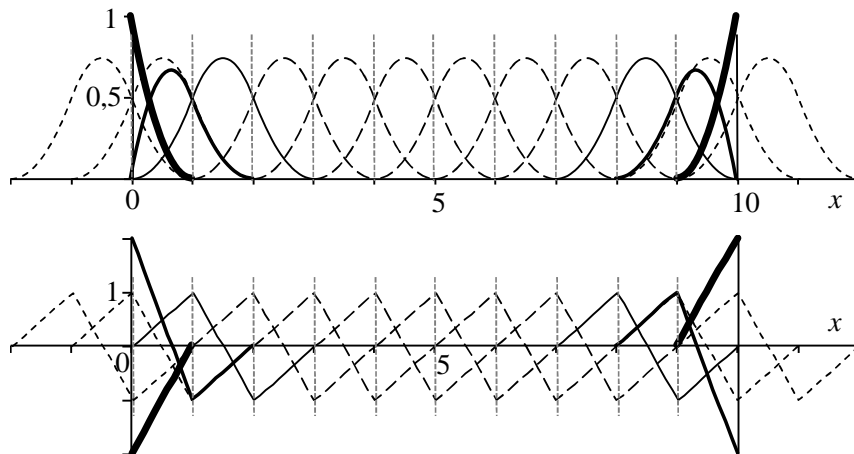


Рис. 2. Квадратичні В-сплайни (зверху) та їхні похідні (знизу) для $x \in [0, 10]$, $h = 1$.

Другі похідні є кусково-постійними функціями класу $L_2[0, 10]$ з розривами в точках розбиття (тут не зображено)

Кількість сплайнів, що мають спільний носій з відрізком $[0, l]$, дорівнює $N = L/h + k$, тобто 12 або 13, відповідно, для $k=2$ або $k=3$ і $h=1$, якщо $l=10$. На рис. 2 і 3 зображені графіки квадратичних і кубічних В-сплайнів та їхніх похідних для одиничного розбиття області $x \in [0, l]$, $h=1$. Крайні $k=2$ або $k=3$ (ліворуч і праворуч) сплайни модифікували для задоволення крайових умов, використовуючи кратні вузли (позначено жирнішими лініями та крапками). Аналогічні позначення ліній і для похідних (див. формули в додатку Б). Треба зауважити, що тільки $k-1$ елементів-відрізків з обох країв мають інші набори базисних функцій, а для решти вони однакові, що врахуємо, обчислюючи внески відрізків-елементів у СЛАР (17).

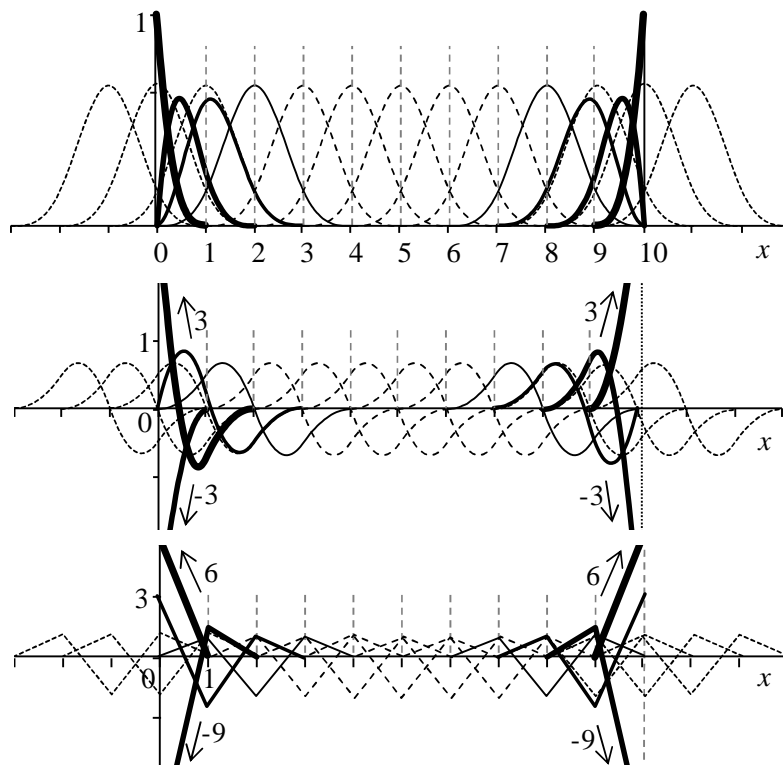


Рис. 3. Кубічні В-сплайни, перші та другі похідні (зверху вниз) для $x \in [0, 10]$, $h=1$

Для квадратичних В-сплайнів різні набори функцій будуть тільки на першому та останньому елементах-відрізках, а решту – однакові. Матимемо матриці інтегралів від добутоків:

– базисних функцій – тип А:

$$M_{1,00}^{(2)} = \frac{h}{60} \begin{bmatrix} 12 & 7 & 1 \\ 7 & 17 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_{i,00}^{(2)} = \frac{h}{120} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 27 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

– перших похідних – тип В1:

$$M_{1,11}^{(2)} = \frac{1}{3h} \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{i,11}^{(2)} = \frac{1}{6h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

– базисних функцій і перших похідних (або навпаки) – тип С1:

$$M_{1,01}^{(2)} = [M_{1,10}^{(2)}]^T = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -12 & 10 & 2 \\ -10 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_{i,01}^{(2)} = M_{i,10}^{(2)T} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -8 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

– других похідних – тип В2:

$$M_{1,22}^{(2)} = \frac{1}{h^3} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{i,22}^{(2)} = \frac{1}{h^3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Тут $i = 2, 3, \dots, NEL - 1$. Крім того, умови "симетрії" для правого краю

$$M_{1,00}^{(2)} = {}^T M_{NEL,00}^{(2)}, \quad M_{1,11}^{(2)} = {}^T M_{NEL,11}^{(2)}, \quad M_{1,22}^{(2)} = {}^T M_{NEL,22}^{(2)}, \quad (29)$$

$$M_{1,01}^{(2)} = {}^T M_{NEL,01}^{(2)}, \quad M_{1,10}^{(2)} = {}^T M_{NEL,10}^{(2)}, \quad M_{NEL,01}^{(2)} = M_{NEL,10}^{(2)T}, \quad (30)$$

де верхній індекс "Т" перед матрицею вказує на транспонування відносно другої (неголовної) діагоналі ("Т" після матриці або вектора означає транспонування в загальноприйнятому сенсі, відносно головної діагоналі). Всі матриці – симетричні, крім типу С1 (27).

Внески у ВПЧ можна знайти (для постійного навантаження) як інтеграли від базисних функцій або як добуток матриць $M_{i,00}^{(2)}$ на одиничний вектор праворуч (тобто як суми рядків матриць $M_{i,00}^{(2)}$). Другий підхід є універсальним, оскільки за довільного вузлового вектора навантажень $[Q_i^{(2)}]_{m=1}^{k+1} = [q_i^{(2)}, q_{i+1}^{(2)}, q_{i+2}^{(2)}]^T$ можна знайти $F_i^{(k)} = M_{i,00}^{(k)} \cdot Q_i^{(k)}$, тобто навантаження на елементі теж апроксимувати комбінацією базисних сплайнів. У результаті отримали:

$$F_1^{(2)} = \frac{h}{6} [2, 3, 1]^T, \quad F_i^{(2)} = \frac{h}{6} [1, 4, 1]^T, \quad F_{NEL}^{(2)} = \frac{h}{6} [1, 3, 2]^T = {}^T F_1^{(2)}. \quad (31)$$

Аналогічно для кубічних В-сплайнів маємо різні набори базисних сплайнів на двох перших і двох останніх відрізках-елементах. Одержали такі матриці інтегралів від добутоків:

– базисних функцій – тип А ($S_A = h / 10080$):

$$S_A M_{1,00}^{(3)}, \quad S_A M_{2,00}^{(3)}, \quad S_A M_{i,00}^{(3)}:$$

$$\begin{bmatrix} 1440 & 882 & 186 & 12 \\ 882 & 2142 & 1218 & 168 \\ 186 & 1218 & 1126 & 200 \\ 12 & 168 & 200 & 40 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 90 & 357 & 180 & 3 \\ 357 & 2128 & 1806 & 119 \\ 180 & 1806 & 1126 & 258 \\ 3 & 119 & 258 & 40 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 40 & 258 & 120 & 2 \\ 258 & 2376 & 1866 & 120 \\ 120 & 1866 & 2376 & 258 \\ 2 & 120 & 258 & 40 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

– перших похідних – тип В1 ($S_{B1} = 1 / (240h)$):

$$S_{B1} M_{1,11}^{(3)}, \quad S_{B1} M_{2,11}^{(3)}, \quad S_{B1} M_{i,11}^{(3)}:$$

$$\begin{bmatrix} 432 & -306 & -114 & -12 \\ -306 & 333 & -3 & -24 \\ -114 & -3 & 93 & 24 \\ -12 & -24 & 24 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 27 & 12 & -36 & -3 \\ 12 & 57 & -46 & -23 \\ -36 & -46 & 68 & 14 \\ -3 & -23 & 14 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 & 14 & -24 & -2 \\ 14 & 68 & -58 & -24 \\ -24 & -58 & 68 & 24 \\ -2 & -24 & 24 & 12 \end{bmatrix} \quad (33)$$

– базисних функцій і перших похідних (або навпаки) – тип С1 ($S_C = 1/1440$):

$$S_C(M_{1,01}^{(3)} = [M_{1,10}^{(3)}]^T), S_C(M_{2,01}^{(3)} = [M_{2,10}^{(3)}]^T), S_C(M_{i,01}^{(3)} = [M_{i,10}^{(3)}]^T):$$

$$\begin{bmatrix} -720 & 558 & 150 & 12 \\ -558 & 45 & 411 & 102 \\ -150 & -201 & 245 & 106 \\ -12 & -42 & 34 & 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -45 & -12 & 54 & 3 \\ -198 & -225 & 348 & 75 \\ -114 & -328 & 300 & 142 \\ -3 & -35 & 18 & 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -20 & -18 & 36 & 2 \\ -142 & -300 & 366 & 76 \\ -76 & -366 & 300 & 142 \\ -2 & -36 & 18 & 20 \end{bmatrix} \quad (34)$$

– других похідних – тип В2 ($S_{B2} = 1/(12h^3)$):

$$S_{B2}M_{1,22}^{(3)}, S_{B2}M_{2,22}^{(3)}, S_{B2}M_{i,22}^{(3)}:$$

$$\begin{bmatrix} 144 & -198 & 42 & 12 \\ -198 & 279 & -69 & -12 \\ 42 & -69 & 31 & -4 \\ 12 & -12 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & -12 & 0 & 3 \\ -12 & 19 & -6 & -1 \\ 0 & -6 & 12 & -6 \\ 3 & -1 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 & 2 \\ -6 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & -6 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Тут $i = 3, 4, \dots, NEL - 2$. Умови "симетрії" для правого краю такі:

$$M_{i,00}^{(3)} = {}^T M_{NEL-2+i,00}^{(3)}, M_{i,11}^{(3)} = {}^T M_{NEL-2+i,11}^{(3)},$$

$$M_{i,22}^{(3)} = {}^T M_{NEL-2+i,22}^{(3)}, \quad (36)$$

$$M_{i,01}^{(3)} = {}^T M_{NEL-2+i,01}^{(3)},$$

$$M_{i,10}^{(3)} = {}^T M_{NEL-2+i,10}^{(3)}, \quad i = 1, 2. \quad (37)$$

Для задачі (3) – пластина в межах гіпотез С. П. Тимошенка – маємо векторне поле двох невідомих (w, γ). Матрицю жорсткості елемента складають 2×2 -блоки, які обчислюємо за формулами

$$M_{i, \text{Тим}}^{(n)} [2k, 2m] = \begin{bmatrix} \Lambda M_{i,11}^{(n)} [k, m] & \Lambda M_{i,10}^{(n)} [k, m] \\ \Lambda M_{i,01}^{(n)} [k, m] & \Lambda M_{i,01}^{(n)} [k, m] + DM_{i,11}^{(n)} [k, m] \end{bmatrix}, \quad (38)$$

де $k, m = 1, \dots, n+1$, $n = 2, 3$ (див. рис. 4).

b -g	-d -h -n -x	n -u	-s -n -s -z	n -u	0 -q -n -x	a=23/15, b=4/3, c=77/60, d=1, e=53/60, f=47/60, g=1/2, h=5/12, k=23/60, n=1/3, p=19/60, q=7/24, s=1/6, t=19/120, u=1/8, v=1/10, x=1/12,
-g a	h -e x -p	-u k	x -y z -t	-u k	z v x -p	
-d h	d u 0 -z	-s x	n 0 -s -x	0 z	d -u -d -h	
-h -e	u c q v	-n -y	0 f n -y	-q v	-u c h -e	
-n x	0 q n u	-s z	-s n n u	-n x	-d h b g	
-x -p	-z v u k	-z -t	-x -y u k	-x -p	-h -e g a	
$i = 1$		$i = 2, 3, \dots, NEL - 1$		$i = NEL = 10$		α

A -B	-L -K -N -P -E -f	α -R	E - μ - Δ - ϵ -h - η	E -a	b -c -d -e -f -g
-B C	K -Q S -T f -Y	-R β	-f π ζ - ω η - σ	-a F	-h i j -k g -n
-L K	D R -h -X -d -t	E -f	γ - ϕ - ψ - λ - χ - Ω	b -h	G -p -q -r -d -j
-K -Q	R U V u v -z	- μ π	- ϕ δ q -h Σ - θ	-c i	-p H r -s e -k
-N S	-h V K Z d W	- Δ ζ	- ψ q G p b h	-d j	-q r G p b h
-P -T	-X u Z M x y	- ϵ - ω	- λ -h p H c i	-e -k	-r -s p H c i
-E f	-d v d x E a	-h η	- χ Σ b c E a	-f g	-d e b c E a
-f -Y	-t -z W y a F	- η - σ	- Ω - θ h i a F	-g -n	-j -k h i a F
$i = 1$		$i = 2$		$i = 3, 4, \dots, NEL - 2$	
$A = 9/5, B = 1/2, C = 68/35, D = 111/80, E = 1/20, F = 17/315, G = 17/60, H = 109/210,$ $K = 31/80, L = 51/40, M = 629/1260, N = 19/40, P = 5/48, Q = 19/16, R = 1/32, S = 5/48,$ $T = 767/1680, U = 8/5, V = 137/480, W = 17/720, X = 67/480, Y = 41/840, Z = 49/288, a = 1/72,$ $b = 7/120, c = 71/720, d = 1/10, e = 19/360, f = 1/120, g = 1/720, h = 1/80, i = 47/560, j = 1/40,$ $k = 37/420, n = 41/5040, p = 5/24, q = 29/120, r = 61/240, s = 19/336, t = 7/240, u = 13/120,$ $v = 17/240, x = 53/720, y = 151/1260, z = 1/12, \Delta = 3/20, \Sigma = 5/96, \Omega = 7/288, \alpha = 9/80,$ $\beta = 17/140, \gamma = 19/80, \delta = 323/720, \epsilon = 19/240, \zeta = 3/80, \eta = 1/480, \theta = 121/1440, \lambda = 41/180,$ $\mu = 11/80, \pi = 41/480, \sigma = 41/3360, \phi = 5/32, \chi = 23/240, \psi = 23/120, \omega = 37/280$					
E -a	b -c - χ - Σ -h - η	E -a	d -x -d -v -E -f		
-a F	-h i Ω - θ η - σ	-a F	-W y t -z f -Y		
b -h	G -p - ψ -q - Δ - ζ	d -W	K -Z -h -V -N -P		
-c i	-p H λ -h ϵ - ω	-x y	-Z M X u S -T		
- χ Ω	- ψ λ γ ϕ i	E f	-d t -h X D -R	-L -K	
- Σ - θ	-q -h ϕ δ μ π	-v -z	-V u -R U K -Q		
-h η	- Δ ϵ E μ α R	-E f	-N S -L K A B		
- η - σ	- ζ - ω f π R β	-f -Y	-P -T -K -Q B C		
$i = NEL - 1$		$i = NEL = 10$			

б

Рис. 4. Матриці жорсткості елементів для задачі (3) і параметрів (12), $h = 1, S \approx 20$:
 а – 6 x 6-матриці (квадратичні В-сплайни); б – 8 x 8-матриці (кубічні В-сплайни)

4. **Глобальна матриця жорсткості та ВПЧ** утворюються внаслідок асемблювання матриць жорсткості й векторів навантаження окремих елементів (рис. 5 і рис. 6). Маємо два варіанти вибору базисних функцій у вигляді квадратичних або кубічних В-сплайнів і чотири тестові задачі в порядку збільшення складності тестування:

- 1) KL: "пластина Кірхгофа–Лява", бігармонійне рівняння (6);
- 2) OL: "оператор Лапласа", гармонійне рівняння (13), $a = 0$;
- 3) DP: "допоміжна задача", рівняння (13), $a = 1$;
- 4) TP: "пластина Тимошенка", система двох рівнянь (1).

Наведені матриці вироджені, оскільки не взято до уваги головні крайові умови. Для врахування умов виду $w = 0$ (задачі KL, OL, DP) необхідно прирівняти до нуля всі елементи першого та останнього (для задачі TP – першого та передостаннього) рядків і стовпців матриці, крім діагональних. Відповідні елементи ВПЧ теж мають дорівнювати нулю. У програмній реалізації простіше помножити тільки діагональний елемент матриці на велике число. Інший підхід, який редукує порядок СЛАР, полягає у "викреслюванні" вказаних рядків та стовпців матриці та вектора.

Зауважимо, що для жорстко зацемлених країв – умови виду (10) і (11) для задач TP і KL, відповідно – необхідно вказану процедуру виконати для двох перших і двох останніх рядків і стовпців.

Розв'язки (17) для тестових задач, зокрема коефіцієнти сплайн-апроксимації виду (16), також можна отримати точно (як раціональні числа), використовуючи відомі системи аналітичних обчислень, мови програмування (наприклад, Python, C++) або спеціальні програмні додатки, наприклад, для Excel [9], що підтримують формат цілих з довільною розрядністю або формат раціональних чисел. Недоліком є стрімке збільшення розрядності чисельника та знаменника, оскільки в "гіршому" з випадків розряд-

0	20,83	-60,17	-93,17	-116,83	-129,17	-129,17	-116,83	-93,17	-60,17	-20,83	0
n=2, KL, SS: $\varepsilon = 0,8\%$											
0	0	-6	-14	-21	-25	-25	-21	-14	-6	0	0
n=2, KL, CC: $\varepsilon = 4,0\%$											
0	-13,89	-41,64	-78,68	-107,64	-126,01	-132,31	-126,01	-107,64	-78,68	-41,64	-13,89
n=3, KL, SS: $\varepsilon = 0\%$											
0	0	-2,75	-10,625	-18,75	-24,625	-26,75	-24,625	-18,75	-10,625	-2,75	0
n=3, KL: CC: $\varepsilon = 0\%$											
0	-2,5	-6,5	-9,5	-11,5	-12,5	-12,5	-11,5	-9,5	-6,5	-2,5	0
n=2, OL: $\varepsilon = 0\%$											
0	-1,67	-4,67	-8,167	-10,67	-12,17	-12,67	-12,17	-10,67	-8,167	-4,67	-1,67
n=3, OL: $\varepsilon = 0\%$											
0	-1,87	-4,79	-4,24	-0,71	2,55	2,55	-0,71	-4,24	-4,79	-1,87	0
n=2, DP: $\varepsilon = 1,19\%$											
0	-1,12	-3,72	-5,13	-2,74	1,25	3,17	1,25	-2,74	-5,13	-3,72	-1,12
n=3, DP: $\varepsilon = 0,397\%$											
Cw:	0	-23,5	-67,2	-103,4	-129,3	-142,7	-142,7	-129,3	-103,4	-67,2	-23,5
Cy:	41,67	41,61	37,04	28,95	18,37	6,29	-6,29	-18,37	-28,95	-37,04	-41,61
n=2, TP, SS: $\varepsilon = 0,0174\%$											
Cw:	0	-2,69	-13,03	-24,27	-33,44	-38,52	-38,52	-33,44	-24,27	-13,03	-2,69
Cy:	0	4,11	7,87	8,12	5,87	2,12	-2,12	-5,87	-8,12	-7,87	-4,11
n=2, TP: CC: $\varepsilon = 0,0644\%$											
Cw:	0	-15,56	-46,31	-86,85	-118,31	-138,18	-144,97	-138,18	-118,31	-86,85	-46,31
Cy:	41,67	41,67	40,0	33,5	24,0	12,5	0	-12,500	-24,0	-33,5	-40,0
n=3, TP, SS: $\varepsilon = 0,000945\%$											
Cw:	0	-1,67	-7,42	-18,79	-29,42	-36,79	-39,42	-36,79	-29,42	-18,79	-7,42
Cy:	0	2,78	6,67	8,5	7,33	4,167	0	-4,167	-7,33	-8,5	-6,67
n=3, TP, CC: $\varepsilon = 0,0035\%$											

Рис. 7. Розв'язки тестових задач та їхня відносна похибка ε в центрі пластини-смуги

Висновок. Для пластини-смуги запропоновано ефективні по точності (з максимальною похибкою до декількох відсотків за формулою (39)) схеми МСЕ з використанням квадратичних і кубічних В-сплайнів, для яких побудовано тестові набори даних: базисні функції, матриці жорсткості і вектори навантаження та розв'язки, що можна використати в методиках швидкого розроблення програмного забезпечення.

У подальшому доцільні дослідження для інших підходів врахування крайових умов (наприклад, зважені та розширені В-сплайни) або вже двовимірних моделей пластин як у класичній, так і в уточненій постановках.

Додаток А. Аналітичний розв'язок крайової задачі (1), (2) – прогини та кути повороту в межах гіпотез С. П. Тимошенка – для шарнірного підкріплення обох країв (SS, Simple Supported – Simple Supported)

$$w_T^{SS}(x) = \frac{qx(l-x)(x^2 - lx - l^2)}{24D} - \frac{qx(l-x)}{2\Lambda},$$

$$\gamma_T^{SS}(x) = \frac{q(4x^3 - 6lx^2 + l^3)}{24D}$$

та для їх жорсткого защемлення (CC, Clamped – Clamped):

$$w_T^{CC}(x) = \frac{-qx^2(x^2 - 2lx + l^2)}{24D} - \frac{qx(l-x)}{2\Lambda}, \quad \gamma_T^{CC}(x) = \frac{qx(2x^2 - 3lx + l^2)}{12D}.$$

Аналітичний розв'язок бігармонійного рівняння (6) – прогини згідно з гіпотезами Кірхгофа–Лява – для крайових умов SS- або СС-типу дорівнюють першому доданку $W_T^{SS}(x)$ або W_T^{CC} , відповідно.

Якщо в рівнянні (13) для простоти взяти $f(x) = -1$, то за умови $a = 0$ маємо

$$u(x) = x(x - l) / 2,$$

а для $a^2 > 0$ легко отримати такий аналітичний розв'язок:

$$u(x) = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\cos(al) - 1}{\sin(al)} \sin(ax) - \cos(ax) + 1 \right], \sin(al) \neq 0.$$

Додаток Б. Кусково-поліноміальні подання квадратичних і кубічних В-сплайнів через вузловий вектор $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$:

$$B_{[x_0, x_1, x_2, x_3]}^{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_0)^2}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}, & x_0 \leq x \leq x_1; \\ \frac{(x - x_0)(x_2 - x)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{(x_3 - x)(x - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)}, & x_1 \leq x \leq x_2; \\ \frac{(x_3 - x)^2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, & x_2 \leq x \leq x_3; \end{cases}$$

$$B_{[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]}^{(3)}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_0)^3}{(x_3 - x_0)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}, & x_0 \leq x \leq x_1; \\ \frac{(x - x_0)}{(x_3 - x_0)} \left[\frac{(x - x_0)(x_2 - x)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{(x_3 - x)(x - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)} \right] + \\ + \frac{(x_4 - x)(x - x_1)^2}{(x_4 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)}, & x_1 \leq x \leq x_2; \\ \frac{(x_4 - x)}{(x_4 - x_1)} \left[\frac{(x_3 - x)(x - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} + \frac{(x_4 - x)(x - x_2)}{(x_4 - x_2)(x_3 - x_2)} \right] + \\ + \frac{(x - x_0)(x_3 - x)^2}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, & x_2 \leq x \leq x_3; \\ \frac{(x_4 - x)^3}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}, & x_3 \leq x \leq x_4. \end{cases}$$

Квадратичні відкриті уніформні В-сплайни $B_{[x_0, x_1, x_2, x_3]}^{(2)}$:

$$B_{[0,0,1,2]}^{(2)}(x) = \begin{cases} 2x - \frac{3x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{(x-2)^2}{2}, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$B_{[1,2,3,3]}^{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{2}, & 1 < x \leq 2, \\ \frac{(3-x)(3x-5)}{2}, & 2 < x \leq 3; \end{cases}$$

причому $B_{[1,2,3,3]}^{(2)}(x) = B_{[0,1,2,2]}^{(2)}(x-1)$.

$$B_{[0,0,0,1]}^{(2)}(x) = (x-1)^2, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$B_{[2,2,2,3]}^{(2)}(x) = (x-2)^2, \quad 2 \leq x \leq 3,$$

причому $B_{[2,2,2,3]}^{(2)}(x) = B_{[0,1,1,1]}^{(2)}(x-2)$.

Кубічні відкриті уніформні В-сплайни $B_{[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]}^{(3)}$:

$$B_{[0,0,1,2,3]}^{(3)}(x) = \begin{cases} \frac{x^2(18-11x)}{12}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x(2-x)(12-5x)}{12} + \frac{(3-x)^2(1-x)}{6}, & 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{-(x-3)^2}{6}, & 2 \leq x \leq 3; \end{cases}$$

$$B_{[1,2,3,4,4]}^{(3)}(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^3}{6}, & 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{(x-1)^2(3-x)}{6} + \frac{(4-x)(x-2)(5x-8)}{12}, & 2 \leq x \leq 3, \\ \frac{(x-4)^2(11x-26)}{12}, & 3 \leq x \leq 4; \end{cases}$$

$$B_{[2,3,4,4,4]}^{(3)}(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)^3}{4}, & 2 \leq x \leq 3, \\ \frac{(x-2)^2(4-x)}{4} + \frac{(4-x)(x-3)(3x-8)}{2}, & 3 \leq x \leq 4; \end{cases}$$

$$B_{[0,0,0,0,1]}^{(3)}(x) = (1-x)^3, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$B_{[3,4,4,4,4]}^{(3)}(x) = (x-3)^3, \quad 3 \leq x \leq 4.$$

1. Максимук О. В., Махніцький Р. М., Щербина Н. М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2005. – 396 с.
2. Марчук М. В., Горячко Т. В., Пакош В. С., Лесик О. Ф. Вільні геометрично нелінійні коливання видовжених гофрованих циліндричних панелей // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 180–184.
3. Марчук М. В., Пакош В. С., Харченко В. М. Термопружний стан рівномірно нагрітої шарнірно закріпленої на торцях нижньої лицевої площини композитної пластини-смуги // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 181–185.
4. Марчук М. В., Хом'як М. М. Змішана схема методу скінченних елементів для розрахунку шаруватих композитних оболонок і пластин. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, 2003. – 216 с.

5. Осадчук В. А., Марчук М. В. Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 43–50.
6. Пакош В. С., Харченко В. М., Хом'як М. М., Лесик О. Ф. Вплив податливості до трансверсального стиснення на деформативність шарнірно закріпленої пластини-смуги // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2020. – Вип. 18. – С. 140–144.
7. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
8. Савула Я. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. – 222 с.
9. Фурман В., Хом'як М., Марко Я. Довга арифметика в EXCEL. III. Розв'язування СЛАР для тестових задач скінченно-елементного моделювання // Електроніка та інфор. технології. – 2019. – Вип. 12. – С. 39–48.
10. Харченко В. М., Марчук М. В., Пакош В. С. Варіант уточненої теорії мінімального порядку податливих до зсуву та стиснення пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14. – С. 107–112.
11. Cottrell J. A., Hughes T. J. R., Bazilevs Y. Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA. – Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2009. – 336 p.
12. De Boor C. A Practical Guide to Splines. Revised Edition. – New York: Springer-Verlag, Inc, 2001. – 346 p.
13. Höllig K. Finite Element Methods with B-Splines. – Frontiers in Applied Mathematics 26, Philadelphia: SIAM, 2003. – 146 p.
14. List of finite element software packages.
https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_finite_element_software_packages
15. Liu W. K., Li S., Park H. S. Eighty Years of the Finite Element Method: Birth, Evolution, and Future // Arch. Computat. Methods Eng. – 2022. – 29. – P. 4431–4453,
<https://doi.org/10.1007/s11831-022-09740-9>
16. Liu G. R. Meshfree methods. Moving Beyond the Finite Element Method: 2nd edn. – Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group, CRC Press, 2010. – 748 p.
17. Madeyski L. Test-Driven Development. An Empirical Evaluation of Agile Practice. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 246 p. – doi: 10.1007/978-3-642-04288-1
18. Marchuk M. V., Pakosh V. S. The influence pliability to shear and compression on the deformability uniformly heated of composite plate-strip // Sci. and Education a New Dimension, Natural and Techn. Sci. – 2015. – III (8), Issue 73. – P. 79–81.
19. Pagano N. J. Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending // J. of Comp. Mat. – 1969. – 3(3). – P. 398–411. – doi:10.1177/002199836900300304
20. Reddy J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells: 2nd edn. – Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group, CRC Press, 2007. – 548 p.
21. Szilard R. Theories and Applications of Plate Analysis Classical, Numerical and Engineering Methods. – Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Ltd, 2004. – 1024 p.
22. Rogers D. F. An Introduction to NURBS: with Historical Perspective. – New York: Elsevier, 2004. – 342 p. – <https://doi.org/10.1016/B978-1-55860-669-2.X5000-3>.
23. Smith I. M., Griffiths D. V., Margetts L. Programming the finite element method: 5th edn. – Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2014. – 664 p.
24. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells: 2nd edn. – New York: McGraw-Hill, 1959 (Reissued 1987). – 580 p.
25. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, 7th edn. – Oxford: Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2013. – 624 p.

TESTING OF THE FINITE ELEMENT METHOD SCHEMES USING B-SPLINES FOR A PLATE-STRIP WITHIN THE HYPOTHESES OF KIRCHHOFF–LOVE AND TYMOSHENKO

The bending of a plate-strip subjected to a constant transverse load is considered as a test problem for the finite element method with the use of B-splines. For a thin plate-strip, the differential equations with boundary conditions and the equivalent variational formulations are presented within the framework of the classical plate theory (Kirchhoff–Love hypothesis) and in consideration of transverse shear (S. P. Timoshenko's hypothesis). In plane strain case one-dimensional B-spline basis functions are considered which have higher order of smoothness than the standard FEM approximations (based on Lagrange polynomials). In order to take into account homogeneous boundary conditions, some basis B-splines with the supports lying outside the given

domain need modification, which is performed using the multiple knot technique, and due to this open B-splines are obtained. Contributions from the integrals of the basis functions and their derivatives to the finite element stiffness matrix in the case of a single-step mesh are calculated. The procedure for assembling elements to form a global system of linear algebraic equations is demonstrated. The comparison of the obtained results with analytical solutions shows their good agreement. As testing artifacts, they can be applied during the TDD (Test Driven Development) process for rapid implementation of more general-purpose software, in particular, for two-dimensional models.

Key words: plate-strip, finite element method, B-splines, software testing.

¹Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано

²Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

26.11.22