https://doi.org/10.15407/apmm2022.20.5-14

УДК 512.546

Н. М. Пирч[✉]

УНІВЕРСАЛЬНО *M*-ЕКВІВАЛЕНТНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Досліджено модифікації поняття M-еквівалентності відображень та їхні застосування до вивчення еквівалентних відображень.

Ключові слова: *вільна топологічна група, M-еквівалентність, послідовність неперервних відображень.*

Вступ Для топологічного простору X позначатимемо через $F(X)$ вільну топологічну групу над X. Топологічні простори X та Y називають M-еквівалентними, якщо їхні вільні топологічні групи $F(X)$ та $F(Y)$ є топологічно ізоморфними. У монографії [4] можна знайти найповніший на сьогодні перелік властивостей вільних топологічних груп. Всі розглядувані простори є тихоновськими.

Відображення $f : X_1 \to Y_1$ і $g : X_2 \to Y_2$ називають M-*еквівалентними* [6], якщо існують такі топологічні ізоморфізми $i : F(X_1) \to F(X_2)$ і $j : F(Y_1) \to F(Y_2)$, що $j \circ f^* = g^* \circ i$, де $f^* : F(X_1) \to F(Y_1)$ і $g^* : F(X_2) \to F(Y_2)$ – гомоморфізми, що продовжують відображення f і g відповідно (позн. $f \overset{M}{\sim} g$). Властивості *M*-еквівалентних відображень та їхнє застосування досліджували раніше [6] і [8]. У цій публікації розглядаємо декілька модифікацій цього поняття та їхні застосування.

Означимо відношення lM, rM та uM на множині неперервних відображень між тихоновськими просторами

***Означення** 1.* Скажемо, що пара (f,g), де $f : X_1 \to Y_1$ і $g : X_2 \to Y_2$ – M-еквівалентні відображення, належить відношенню lM, якщо для довільного топологічного ізоморфізму $i : F(X_1) \to F(X_2)$ існує такий топологічний ізоморфізм $j : F(Y_1) \to F(Y_2)$, що $j \circ f^* = g^* \circ i$.

***Означення** 2*. Скажемо, що пара (f,g), де $f : X_1 \to Y_1$ і $g : X_2 \to Y_2$ – M-еквівалентні відображення, належить відношенню rM, якщо для довільного топологічного ізоморфізму $j : F(Y_1) \to F(Y_2)$ існує такий топологічний ізоморфізм $i : F(X_1) \to F(X_2)$, що $j \circ f^* = g^* \circ i$.

***Означення** 3*. Скажемо, що пара (f,g), де $f : X_1 \to Y_1$ і $g : X_2 \to Y_2$ – M-еквівалентні відображення, належить відношенню uM, якщо вона належить відношенням lM та rM одночасно.

***Означення** 4*. Скажемо, що відображення $f : X \to Y$ є l-*універсальним*, якщо для довільного топологічного автоморфізму $i : F(X) \to F(X)$ існує такий топологічний автоморфізм $j : F(Y) \to F(Y)$, що $j \circ f^* = f^* \circ i$.

***Означення** 5*. Скажемо, що відображення $f : X \to Y$ є r-*універсальним*, якщо для довільного топологічного автоморфізму $j : F(Y) \to F(Y)$ існує такий топологічний автоморфізм $i : F(X) \to F(X)$, що $j \circ f^* = f^* \circ i$.

✉ pnazar@ukr.net

***Означення** 6.* Відображення, яке є одночасно l- і r-універсальним, називатимемо M-*універсальним.*

1. **Універсальна еквівалентність**

Твердження 1. *Відношення* lM *є симетричним та транзитивним на множині неперервних відображень між тихоновськими просторами.*

Д о в е д е н н я. Нехай $f : X_1 \to Y_1$ і $g : X_2 \to Y_2$ − неперервні відображення і $(f, g) \in lM$. Покажемо, що $(g, f) \in lM$. Нехай $i_1 : F(X_2) \to F(X_1)$ − топологічний ізоморфізм, $i : F(X_1) \to F(X_2)$ − ізоморфізм, обернений до i_1. Тоді існує такий топологічний ізоморфізм $j : F(Y_1) \to F(Y_2)$, що $j \circ f^* = g^* \circ i$. Нехай $j_1 : F(Y_2) \to F(Y_1)$ − ізоморфізм, обернений до j. Оскільки $i_1 \circ i = 1_{F(X_1)}$, то $j_1 \circ j = 1_{F(Y_1)}$. Покладемо $s = i_1 \circ i$, $l = j_1 \circ j$. Тоді

$$f^* \circ i_1 = f^* \circ s \circ i^{-1} = l \circ f^* \circ i = j_1 \circ j \circ f^* \circ i^{-1} = j_1 \circ g^* \circ i \circ i^{-1} = j_1 \circ g^*.$$

Покажемо, що відношення lM є транзитивним. Нехай $f : X_1 \to Y_1$, $g : X_2 \to Y_2$, $h : X_3 \to Y_3$ − неперервні відображення, $(f, g) \in lM$ і $(g, h) \in lM$. Нехай також $i : F(X_1) \to F(X_3)$ − довільний топологічний ізоморфізм. З того, що $(g, h) \in lM$, випливає існування таких топологічних ізоморфізмів $i_2 : F(X_2) \to F(X_3)$ та $j_2 : F(Y_2) \to F(Y_3)$, що $h^* \circ i_2 = j_2 \circ g^*$. Покладемо $i_1 = i_2^{-1} \circ i$. З того, що $(f, g) \in lM$ випливає існування такого топологічного ізоморфізму $j_1 : F(Y_1) \to F(Y_2)$, що $g^* \circ i_1 = j_1 \circ f^*$. Покладемо $j = j_2 \circ j_1$. Тоді $j \circ f^* = j_2 \circ j_1 \circ f^* = j_2 \circ g \circ i_1 = h \circ i_2 \circ i_1 = h \circ i$. ◊

Аналогічно доводиться наступне твердження

Твердження 2. *Відношення* rM *є симетричним та транзитивним на множині неперервних відображень між тихоновськими просторами.*

Наслідок 1. *Відношення* uM *є симетричним та транзитивним на множині неперервних відображень між тихоновськими просторами.*

Теорема 1. *Нехай* $f : X_1 \to Y_1$, $g : X_2 \to Y_2$ *− неперервні відображення. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1. $(f, g) \in rM$;
2. $f \overset{M}{\sim} g$ *і відображення* f *та* g *є* r*-універсальними;*
3. $f \overset{M}{\sim} g$ *і відображення* f *є* r*-універсальним.*

Д о в е д е н н я. $(1 \Rightarrow 2)$ Нехай $v : F(X_1) \to F(X_1)$ − топологічний автоморфізм. З того, що $f \overset{M}{\sim} g$, випливає існування таких топологічних ізоморфізмів $i : F(X_1) \to F(X_2)$, $j : F(Y_1) \to F(Y_2)$, для яких $j \circ f^* = g^* \circ i$. Розглянемо ізоморфізм $s_X : F(X_1) \to F(X_2)$, означений як $s_X = i \circ v$. З того, що $f \overset{rM}{\sim} g$, випливає існування такого топологічного ізоморфізму $s_Y : F(Y_1) \to F(Y_2)$, що $s_Y \circ f^* = g^* \circ s_X$. Покладемо $u = j^{-1} \circ s_Y$. Тоді

$$u \circ f^* = j^{-1} \circ s_Y \circ f^* = j^{-1} \circ g^* \circ s_X = f^* \circ i^{-1} \circ s_X = f^* \circ v.$$

$(2 \Rightarrow 3)$ Очевидно.

($3 \Rightarrow 1$) Нехай $i : F(X_1) \to F(X_2)$ – довільний топологічний ізоморфізм. З того, що $f \overset{M}{\sim} g$, випливає існування таких топологічних ізоморфізмів $u : F(X_1) \to F(X_2)$ та $v : F(Y_1) \to F(Y_2)$, що $g^* \circ u = v \circ f^*$. Покладемо $s = u^{-1} \circ i$. З того, що відображення f є r-універсальним випливає існування такого топологічного автоморфізму $l : F(Y_1) \to F(Y_1)$, що $f^* \circ s = l \circ f^*$. Відображення $j = v \circ l$ є композицією топологічних ізоморфізмів, а отже, буде топологічним ізоморфізмом. Тоді

$$g^* \circ i = g^* \circ u \circ s = v \circ f^* \circ s = v \circ l \circ f^* = j \circ f^* . \qquad \Diamond$$

Аналогічно доведемо таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $f : X_1 \to Y_1$, $g : X_2 \to Y_2$ *– неперервні відображення. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1. $(f, g) \in lM$;
2. $f \overset{M}{\sim} g$ *і відображення* f *та* g *є* l*-універсальними;*
3. $f \overset{M}{\sim} g$ *і відображення* f *є* l*-універсальним.*

З теорем 1 і 2 випливає такий наслідок

Наслідок 2. *Нехай* $f : X_1 \to Y_1$, $g : X_2 \to Y_2$ *– неперервні відображення. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1. $(f, g) \in uM$;
2. $f \overset{M}{\sim} g$ *і відображення* f *та* g *є* M*-універсальними;*
3. $f \overset{M}{\sim} g$ *і відображення* f *є* M*-універсальним.*

Таким чином, rM – це відношення M-еквівалентності, розглянуте на класі r-універсальних відображень. А тому називатимемо відображення f і g, які належать відношенню rM, *універсально* rM*-еквівалентними* і позначатимемо $f \overset{rM}{\approx} g$. Так само, відображення, які належать відношенню lM, називатимемо *універсально* lM*-еквівалентними* і позначатимемо $f \overset{lM}{\approx} g$, а відображення f і g, що належать відношенню, uM – *універсально* M*-еквівалентними* і позначатимемо $f \overset{ulM}{\approx} g$.

З еквівалентності пунктів 2 і 3 у теоремах 1 і 2 та у наслідку 2 маємо.

Твердження 3. *Відображення,* M*-еквівалентне до універсального (*r*-універсального,* l*-універсального), є універсальним (*r*-універсальним,* l*-універсальним).*

Твердження 4. *Нехай* $f_i : X_i \to X_{i+1}$ *і* $g_i : Y_i \to Y_{i+1}$ *– неперервні відображення, причому* $f_i \overset{rM}{\approx} g_i$ *для всіх* $i = 1,..,n-1$ *та* $f_n \overset{M}{\sim} g_n$. *Тоді* $f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_1 \overset{M}{\sim} g_n \circ g_{n-1} \circ ... \circ g_1$.

Д о в е д е н н я. З того, що $f_n \overset{M}{\sim} g_n$, випливає існування таких топологічних ізоморфізмів $h_n : F(X_n) \to F(Y_n)$ та $h_{n+1} : F(X_{n+1}) \to F(Y_{n+1})$, що $h_{n+1} \circ f_n^* = g_n^* \circ h_n$. З того, що $f_{n-1} \overset{rM}{\approx} g_{n-1}$, випливає існування такого топологічного ізоморфізму $h_{n-1}: F(X_{n-1}) \to F(Y_{n-1})$, що $h_n \circ f_{n-1}^* = g_{n-1}^* \circ h_{n-1}$. З того, що $f_{n-2} \overset{rM}{\approx} g_{n-2}$, випливає існування такого топологічного ізоморфізму $h_{n-2}: F(X_{n-2}) \to F(Y_{n-2})$, що $h_{n-1} \circ f_{n-2}^* = g_{n-2}^* \circ h_{n-2}$. Продовжуючи далі, отримаємо послідовність таких ізоморфізмів $h_i : F(X_i) \to F(Y_i)$, що $h_{i+1} \circ f_i^* = g_i^* \circ h_i$. За побудовою

$$h_{n+1} \circ f_n^* \circ f_{n-1}^* \circ \ldots \circ f_1^* = (h_{n+1} \circ f_n^*) \circ (f_{n-1}^* \circ \ldots \circ f_1^*) = g_n^* \circ h_n \circ f_{n-1}^* \circ \ldots \circ f_1^* =$$

$$= g_n^* \circ g_{n-1}^* \circ h_{n-1} \circ \ldots \circ f_1^* = \ldots = g_n^* \circ g_{n-1}^* \circ \ldots \circ g_1^* \circ h_1 . \qquad \Diamond$$

Твердження 5. *Нехай* $f_i : X_i \to X_{i+1}$ *і* $g_i : Y_i \to Y_{i+1}$ *– неперервні відображення, причому* $f_i \overset{rM}{\approx} g_i$ *для всіх* $i = 1,..,n$. *Тоді* $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1 \overset{rM}{\approx}$ $\approx g_n \circ g_{n-1} \circ \ldots \circ g_1$.

Д о в е д е н н я. З твердження 4 випливає, що $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1 \overset{M}{\sim}$ $\sim g_n \circ g_{n-1} \circ \ldots \circ g_1$. Нехай $h_{n+1}: F(X_{n+1}) \to F(Y_{n+1})$ – топологічний ізоморфізм. З того, що $f_n \overset{rM}{\approx} g_n$, випливає існування такого топологічного ізоморфізму $h_n : F(X_n) \to F(Y_n)$, що $h_{n+1} \circ f_n^* = g_n^* \circ h_n$. З того, що $f_{n-1} \overset{rM}{\approx} g_{n-1}$, випливає існування такого топологічного ізоморфізму $h_{n-1}: F(X_{n-1}) \to F(Y_{n-1})$, що $h_n \circ f_{n-1}^* = g_{n-1}^* \circ h_{n-1}$. Продовжуючи далі, отримаємо послідовність таких ізоморфізмів $h_i : F(X_i) \to F(Y_i)$, що $h_{i+1} \circ f_i^* = g_i^* \circ h_i$. Аналогічно до твердження 4 перевіряємо, що

$$h_{n+1} \circ f_n^* \circ f_{n-1}^* \circ \ldots \circ f_1^* = g_n^* \circ g_{n-1}^* \circ \ldots \circ g_1^* \circ h_1 . \qquad \Diamond$$

Аналогічно до тверджень 4 і 5 перевіряємо справедливість таких тверджень.

Твердження 6. *Нехай* $f_i : X_i \to X_{i+1}$ *і* $g_i : Y_i \to Y_{i+1}$ *– неперервні відображення, причому* $f_i \overset{lM}{\approx} g_i$ *для всіх* $i = 2,..,n$ *та* $f_1 \overset{M}{\sim} g_1$. *Тоді* $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1 \overset{M}{\sim}$ $\sim g_n \circ g_{n-1} \circ \ldots \circ g_1$.

Твердження 7. *Нехай* $f_i : X_i \to X_{i+1}$ *і* $g_i : Y_i \to Y_{i+1}$ *– неперервні відображення, причому* $f_i \overset{lM}{\approx} g_i$ *для всіх* $i = 1,..,n$. *Тоді* $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1 \overset{lM}{\approx}$ $\approx g_n \circ g_{n-1} \circ \ldots \circ g_1$.

З тверджень 5 і 7 випливає таке

Твердження 8. *Нехай* $f_i : X_i \to X_{i+1}$ *і* $g_i : Y_i \to Y_{i+1}$ *– неперервні відображення, причому* $f_i \overset{uM}{\approx} g_i$ *для всіх* $i = 1,..,n$. *Тоді* $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1 \overset{uM}{\approx}$ $\approx g_n \circ g_{n-1} \circ \ldots \circ g_1$.

Нехай $\{X_i : i \in I\}$ – сім'я попарно неперетинних просторів. Для сім'ї неперервних відображень $f_i : X_i \to X$ позначимо через $\nabla_{i \in I} f_i$ *комбінацію сім'ї* $\{f_i : i \in I\}$ [5, стор. 71].

Твердження 9. *Нехай* $\{X_i : i \in I\}$, $\{Y_i : i \in I\}$ *– дві сім'ї попарно неперетинних просторів,* $f_i : X_i \to X$ *і* $g_i : Y_i \to Y$ *– неперервні відображення,* $f_i \overset{rM}{\approx} g_i$ *для всіх* $i \in I \setminus \{i_0\}$, $f_{i_0} \overset{M}{\sim} g_{i_0}$. *Тоді* $\nabla_{i\in I} f_i \overset{M}{\sim} \nabla_{i\in I} g_i$.

Д о в е д е н н я. Якщо $f_{i_0} \overset{M}{\sim} g_{i_0}$, то існують такі топологічні ізоморфізми $h_{i_0} : F(X_{i_0}) \to F(Y_{i_0})$ та $h : F(X) \to F(Y)$, що $h \circ f_{i_0}^* = g_{i_0}^* \circ h_{i_0}$. З того, що $f_i \overset{rM}{\approx} g_i$ при $i \in I \setminus \{i_0\}$ випливає існування топологічних ізоморфізмів $h_i : F(X_i) \to F(Y_i)$, для яких виконується рівність $h \circ f_i^* = g_i^* \circ h_i$. Розглянемо відображення $s : \underset{i\in I}{\oplus} X_i \to F\left(\underset{i\in I}{\oplus} Y_i\right)$, поклавши $s(x) = h_i(x)$, якщо $x \in X_i$. Продовження відображення s до гомоморфізму вільних топологічних груп $S : F\left(\underset{i\in I}{\oplus} X_i\right) \to F\left(\underset{i\in I}{\oplus} Y_i\right)$ є топологічним ізоморфізмом [1].

Нехай $x \in X_m$, тоді $h \circ (\nabla_{i\in I} f_i)(x) = h \circ f_m(x) = g_i^* \circ h_m(x) = (\nabla_{i\in I} g_i) \circ S(x)$. ◊

Твердження 10. *Нехай* $\{X_i : i \in I\}$, $\{Y_i : i \in I\}$ *– дві сім'ї попарно неперетинних просторів,* $f_i : X_i \to X$ *і* $g_i : Y_i \to Y$ *– неперервні відображення,* $f_i \overset{rM}{\approx} g_i$ *для всіх* $i \in I$. *Тоді* $\nabla_{i\in I} f_i \overset{rM}{\approx} \nabla_{i\in I} g_i$.

Д о в е д е н н я. За твердженням 9 матимемо, що $\nabla_{i\in I} f_i \overset{M}{\sim} \nabla_{i\in I} g_i$. Нехай $h : F(X) \to F(Y)$ – довільний топологічний ізоморфізм З того, що $f_i \overset{rM}{\approx} g_i$ для всіх $i \in I$, випливає існування топологічних ізоморфізмів $h_i : F(X_i) \to F(Y_i)$, для яких виконується рівність $h \circ f_i^* = g_i^* \circ h_i$. Розглянемо відображення $s : \underset{i\in I}{\oplus} X_i \to F\left(\underset{i\in I}{\oplus} Y_i\right)$, поклавши $s(x) = h_i(x)$, якщо $x \in X_i$. Продовження відображення s до гомоморфізму вільних топологічних груп $S : F\left(\underset{i\in I}{\oplus} X_i\right) \to F\left(\underset{i\in I}{\oplus} Y_i\right)$ є топологічним ізоморфізмом [1].

Нехай $x \in X_m$, тоді $h \circ (\nabla_{i\in I} f_i)(x) = h \circ f_m(x) = g_i^* \circ h_m(x) = (\nabla_{i\in I} g_i) \circ S(x)$. ◊

Наслідок 3. *Якщо неперервні відображення* $f_i : X_i \to X$ *для всіх* $i \in I$ *є* rM *-універсальними, то відображення* $\nabla_{i\in I} f_i$ *є* rM *-універсальним.*

Твердження 5 і наслідок 3 можна комбінувати в довільній послідовності. Наприклад, можна зробити висновок, що композиція довільної кількості відображень, кожне з яких є комбінацією сім'ї r -універсальних відображень, буде знову r -універсальним відображеннням.

2. **Універсальність деяких стандартних відображень**. Нехай X – тихоновський простір, якоиу відповідають декілька відображень. Позначимо через $e_X : X \to D_1$ факторне відображення з X в одноточковий простір D_1, через id_X – гомеоморфізм простору X на себе, через $D_X : D_{|X|} \to X$ – ущільнення з дискретного простору $D_{|X|}$ потужності $|X|$ на X, через $\mu_X : X \to \mu X$ – вкладення простору X у його поповнення за Дьєдонне μX, через $q_X : X \to Q(X)$ – факторне відображення з простору X у його прос-

тір квазікомпонент $Q(X)$, яке кожну квазікомпоненту простору X стискає в одноточкову множину [3].

Твердження 11. *Для довільного простору X відображення id_X є універсальним.*

Д о в е д е н н я. Покажемо, що відображення id_X є l-універсальним. Нехай $u : F(X) \to F(X)$ – довільний автоморфізм. Тоді $u \circ id_X^* = id_X^* \circ u$. Аналогічно доведемо, що відображення id_X є r-універсальним. ◊

Твердження 12. *Для довільного простору X відображення D_X є r-універсальним.*

Д о в е д е н н я. Нехай $i : F(X) \to F(X)$ – довільний автоморфізм. Через $j : F(D_X) \to F(D_X)$ позначимо ізоморфізм, який задає та ж формула, що і відображення i, але відносно дискретних топологій на X і $F(X)$ відповідно. Тоді $j \circ D_X^* = D_X^* \circ i$. ◊

Твердження 13. *Для довільного простору X відображення e_X є r-універсальним.*

Д о в е д е н н я. Нехай $e_X(X) = \{x_0\}$. Вільна група $F(D_1)$ має два автоморфізми: тотожний $j_1 : F(D_1) \to F(D_1)$, що отримують як продовження тотожного відображення $l_1(x_0) = x_0$, та ізоморфізм $j_2 : F(D_1) \to F(D_1)$, що отримують як продовження відображення $l_1(x_0) = x_0^{-1}$. Нехай $i_1 : F(X) \to F(X)$ – ізоморфізм, що отримують як продовження відображення, означеного як $s_1(x) = x$ для всіх $x \in X$, $i_2 : F(X) \to F(X)$ – ізоморфізм, що отримують як продовження інверсії $s_2(x) = x^{-1}$ для $x \in X$. Тоді виконуються рівності $e_X^* \circ i_1 = j_1 \circ e_X^*$ і $e_X^* \circ i_2 = j_2 \circ e_X^*$. ◊

Твердження 14. *Для довільного простору X відображення μX є l-універсальним.*

Д о в е д е н н я. Як встановили раніше у [9], функтори $F \circ \mu$ і $\rho \circ F$, де μ – функтор поповнення за Дьєдонне, ρ – функтор поповнення за Вейлем, F – функтор вільної топологічної групи, є природно еквівалентними. А тому довільний топологічний ізоморфізм $i : F(X) \to F(X)$ продовжується до топологічного $i : F(\mu X) \to F(\mu X)$, для якого виконується рівність $j \circ \mu_X = \mu_X \circ i$. ◊

Скажемо, що ізоморфізм $i : F(X) \to F(Y)$ є *спеціальним*, якщо композиція $e_Y^* \circ i$ є постійним відображенням, де $e_Y^* : F(Y) \to R$ – гомоморфізм, що продовжує функцію $e_Y : Y \to R$, яка тотожно рівна 1 на Y.

Як встановили у праці [2], простір X є зв'язним тоді і тільки тоді, коли довільний топологічний автоморфізм $u : F(X) \to F(X)$ є спеціальним.

Твердження 15. *Для довільного простору X відображення e_X є l-універсальним, тоді і тільки тоді, коли простір X є зв'язним.*

Д о в е д е н н я. Нехай простір X – зв'язний. Тоді довільний топологічний автоморфізм $i : F(X) \to F(X)$ є спеціальним. Нехай $j : F(D_1) \to F(D_1)$ – тотожний автоморфізм вільної топологічної групи над одноточковим простором D_1. Тоді $j \circ e_X^* = e_X^* \circ i$. Нехай простір X є незв'язним. Тоді топологічний ізоморфізм $i : F(X) \to F(X)$ не є спеціальним. Якщо для деякого топологічного автоморфізму $j : F(D_1) \to F(D_1)$ виконуватиметься рівність

$j \circ e_X^* = e_X^* \circ i$, то ізоморфізм j також не буде спеціальним. Але кожен автоморфізм $j : F(D_1) \to F(D_1)$ є спеціальним, а тому відображення e_X не є I-універсальним. ◊

Твердження 16. *Для довільного простору X відображення q_X є I-універсальним.*

Д о в е д е н н я. Як встановили раніше у [7], для довільного топологічного ізоморфізму $i : F(X) \to F(Y)$ між вільними топологічними групами $F(X)$ і $F(Y)$ просторів X і Y існує такий топологічний ізоморфізм $i_Q : F(Q(X)) \to F(Q(Y))$, що $i_Q \circ q_X^* = q_Y^* \circ i$, де $q_X^* : F(X) \to F(Q(X))$ і $q_Y^* : F(Y) \to F(Q(Y))$ – гомоморфізми, що продовжують факторні відображення $q_X : X \to Q(X)$ та $q_Y : Y \to Q(Y)$. ◊

3. **Класи еквівалентних послідовностей відображень**

Означення *7.* Нехай $f_i : X_i \to X_{i+1}$, $g_i : Y_i \to Y_{i+1}$, $i = 1,..,n$ – неперервні відображення тихоновських просторів. Скажемо, що послідовність відображень $(f_1, f_2,..., f_n)$ є *M-еквівалентною* до послідовності відображень $(g_1, g_2,..., g_n)$, якщо існують такі топологічні ізоморфізми $h_i : F(X_i) \to F(Y_i)$, що $g_i^* \circ h_i = h_{i+1} \circ f_i^*$, де $f_i^* : F(X_i) \to F(X_{i+1})$ і $g_i^* : F(Y_i) \to F(Y_{i+1})$ – гомоморфізми, що продовжують відображення f_i і g_i відповідно (вживатимемо позначення $(f_1, f_2,..., f_n) \overset{M}{\sim} (g_1, g_2,..., g_n)$).

Твердження 17. *Нехай $f_i : X_i \to X_{i+1}$, $g_i : Y_i \to Y_{i+1}$, $i = 0,1,..,n$ – дві послідовності неперервних відображень. Якщо $(f_1, f_2,..., f_n) \overset{M}{\sim} (g_1, g_2,..., g_n)$, $f_0 \overset{M}{\sim} g_0$ і відображення f_0 є r-універсальним, то $(f_o, f_1, f_2,..., f_n) \overset{M}{\sim}$ $\sim (g_0, g_1, g_2,..., g_n)$.*

Д о в е д е н н я. Нехай $(f_1, f_2,..., f_n) \overset{M}{\sim} (g_1, g_2,..., g_n)$. Тоді існують такі топологічні ізоморфізми $h_i : F(X_i) \to F(Y_i)$, $i = 1,..,n+1$, що $g_i^* \circ h_i = h_{i+1} \circ f_i^*$. З того, що відображення f_0 є r-універсальним, випливає існування такого топологічного ізоморфізму $h_0 : F(X_0) \to F(Y_0)$, що $g_0^* \circ h_0 = h_1 \circ f_0^*$. А це означає, що $(f_o, f_1, f_2,..., f_n) \overset{M}{\sim} (g_0, g_1, g_2,..., g_n)$. ◊

Наслідок 4. *Нехай $f_i : X_i \to X_{i+1}$, $g_i : Y_i \to Y_{i+1}$ – дві послідовності неперервних r-універсальних відображень, причому $f_i \overset{M}{\sim} g_i$ для всіх $i = 1,..,n$. Тоді $(f_1, f_2,..., f_n) \overset{M}{\sim} (g_1, g_2,..., g_n)$.*

Твердження 18. *Нехай $f_i : X_i \to X_{i+1}$, $g_i : Y_i \to Y_{i+1}$, $i = 1,..,n+1$ – дві послідовності неперервних відображень. Якщо $(f_1, f_2,..., f_n) \overset{M}{\sim} (g_1, g_2,..., g_n)$, $f_{n+1} \overset{M}{\sim} g_{n+1}$ і відображення f_{n+1} є I-універсальним, то $(f_1, f_2,..., f_n, f_{n+1}) \overset{M}{\sim}$ $\sim (g_1, g_2,..., g_n, g_{n+1})$.*

Д о в е д е н н я. Нехай $(f_1, f_2, ..., f_n) \overset{M}{\sim} (g_1, g_2, ..., g_n)$. Тоді існують такі топологічні ізоморфізми $h_i : F(X_i) \to F(Y_i)$, $i = 1,..,n+1$, що $g_i^* \circ h_i = h_{i+1} \circ f_i^*$. З того, що відображення f_0 є r-універсальним, випливає існування такого топологічного ізоморфізму $h_{n+2} : F(X_{n+2}) \to F(Y_{n+2})$, для якого виконується рівність $g_{n+1}^* \circ h_{n+1} = h_{n+2} \circ f_{n+1}^*$. А це означає, що $(f_1, f_2, ..., f_n, f_{n+1}) \overset{M}{\sim} (g_1, g_2, ..., g_n, g_{n+1})$. ◊

Наслідок 5. *Нехай* $f_i : X_i \to X_{i+1}$, $g_i : Y_i \to Y_{i+1}$ *– дві послідовності неперервних* l*-універсальних відображень, причому* $f_i \overset{M}{\sim} g_i$ *для всіх* $i = 1,..,n$. *Тоді* $(f_1, f_2, ..., f_n) \overset{M}{\sim} (g_1, g_2, ..., g_n)$.

Для неперервного відображення f позначимо через $M[f]$ клас всіх неперервних відображень, M-еквівалентних до відображення f. Для послідовності $(f_1, f_2, ..., f_n)$ неперервних відображень позначимо через $M[f_1, f_2, ..., f_n]$ клас послідовностей неперервних відображень, M-еквівалентних до послідовності $(f_1, f_2, ..., f_n)$.

Теорема 3. *Нехай* $(f_1, f_2, ..., f_n)$ *– послідовність відображень, причому відображення* f_1 *є* r*-універсальним. Тоді*

$$M[f_1, f_2, ..., f_n] = \{(g_1, g_2, ..., g_n) : g_1 \in M[f_1], (g_2, ..., g_n) \in M[f_2, ..., f_n]\}.$$

Д о в е д е н н я. Доведемо співвідношення

$$M[f_1, f_2, ..., f_n] \supseteq \{(g_1, g_2, ..., g_n) : g_1 \in M[f_1], (g_2, ..., g_n) \in M[f_2, ..., f_n]\}.$$

Якщо відображення f_1 є r-універсальним і $f_1 \overset{M}{\sim} g_1$, то відображення g_1 є r-універсальним. А тому з умов $f_1 \overset{M}{\sim} g_1$ і $(f_2, f_3, ..., f_n) \overset{M}{\sim} (g_2, g_3, ..., g_n)$, згідно з твердженням 17, випливає, що $(f_1, f_2, ..., f_n) \overset{M}{\sim} (g_1, g_2, ..., g_n)$.

Доведемо співвідношення

$$M[f_1, f_2, ..., f_n] \subseteq \{(g_1, g_2, ..., g_n) : g_1 \in M[f_1], (g_2, ..., g_n) \in M[f_2, ..., f_n]\}.$$

Якщо $(g_1, g_2, ..., g_n) \in M[f_1, f_2, ..., f_n]$, то $f_1 \overset{M}{\sim} g_1$ і $(f_2, f_3, ..., f_n) \overset{M}{\sim} (g_2, g_3, ..., g_n)$. Іншими словами, $g_1 \in M[f_1]$, $(g_2, ..., g_n) \in M[f_2, ..., f_n]$. ◊

Наслідок 6. *Нехай* $(f_1, f_2, ..., f_n)$ *– послідовність* r*-універсальних відображень. Тоді*

$$M[f_1, f_2, ..., f_n] = \{(g_1, g_2, ..., g_n) : g_1 \in M[f_1], g_2 \in M[f_2], ..., g_n \in M[f_n]\}.$$

Теорема 4. *Нехай* $(f_1, f_2, ..., f_n)$ *– послідовність відображень, причому відображення* f_n *є* l*-універсальним. Тоді*

$$M[f_1, f_2, ..., f_n] = \{(g_1, g_2, ..., g_n) : (g_1, g_2, ..., g_{n-1}) \in M[f_1, f_2, ..., f_{n-1}], g_n \in M[f_n]\}.$$

Д о в е д е н н я. Доведемо співвідношення

$$M[f_1, f_2, \dots, f_n] \supseteq \{(g_1, g_2, \dots, g_n) : (g_1, g_2, \dots, g_{n-1}) \in M[f_1, f_2, \dots, f_{n-1}], g_n \in M[f_n]\}.$$

Якщо відображення f_n є I-універсальним і $f_n \overset{M}{\sim} g_n$, то і відображення g_n є I-універсальним. А тому з твердження 18 матимемо, що $(f_1, f_2, \dots, f_n) \overset{M}{\sim} (g_1, g_2, \dots, g_n)$.

Доведемо співвідношення

$$M[f_1, f_2, \dots, f_n] \subseteq \{(g_1, g_2, \dots, g_n) : (g_1, g_2, \dots, g_{n-1}) \in M[f_1, f_2, \dots, f_{n-1}], g_n \in M[f_n]\}.$$

Якщо $(g_1, g_2, \dots, g_n) \in M[f_1, f_2, \dots, f_n]$, то $f_n \overset{M}{\sim} g_n$ і $(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) \overset{M}{\sim} (g_1, g_2, \dots, g_{n-1})$. Іншими словами, $g_n \in M[f_n]$ і $(g_1, g_2, \dots, g_{n-1}) \in M[f_1, f_2, \dots, f_{n-1}]$. ◊

Наслідок 7. *Нехай* $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ *– послідовність* I*-універсальних відображень. Тоді* $M[f_1, f_2, \dots, f_n] = \{(g_1, g_2, \dots, g_n) : g_1 \in M[f_1], g_2 \in M[f_2], \dots, g_n \in M[f_n]\}$.

Для підпростору $Y \subseteq X$ через $\langle Y \rangle$ позначимо підгрупу в $F(X)$, породжену множиною твірних Y. Скажемо, що пара (X, A) *є* M*-універсальною* ([2]), якщо довільний топологічний автоморфізм $j : \langle A \rangle \to \langle A \rangle$ продовжується до топологічного автоморфізму $i : F(X) \to F(X)$. Нагадаємо, що підпростір Y топологічного простору X називають P*-вкладеним*, якщо довільна неперервна псевдометрика, задана на Y, допускає продовження до неперервної псевдометрики на X. Якщо підпростір Y є P-вкладеним у X, то підгрупа $\langle Y \rangle \subseteq F(X)$ є топологічно ізоморфною $F(Y)$ ([9]).

Твердження 19. Нехай підпростір A є P-вкладеним у простір X. Тоді такі умови є еквівалентними:

1. пара (X, A) є M-універсальною;
2. вкладення $e_{A,X} : A \to X$ є I-універсальним відображенням.

Д о в е д е н н я. $(1 \Rightarrow 2)$ Нехай $i : F(A) \to F(A)$ – довільний топологічний автоморфізм. Через P-вкладеність підпростору A у X ми можемо розглядати i як автоморфізм підгрупи $\langle A \rangle$ у $F(X)$, породженої множиною твірних A. Оскільки пара (X, A) є M-універсальною, існує топологічний ізоморфізм $j : F(X) \to F(X)$, що є продовженням i. Звідки $e^*_{A,X} \circ i = j \circ e^*_{A,X}$, тобто відображення $e_{A,X}$ є I-універсальним.

$(2 \Rightarrow 1)$ Нехай $i : \langle A \rangle \to \langle A \rangle$ – довільний топологічний автоморфізм. Через P-вкладеність підпростору A у X можемо розглядати i як автоморфізм вільної топологічної групи $F(A)$. З того, що відображення $e_{A,X}$ є I-універсальним, випливає існування топологічного ізоморфізму $j : F(X) \to F(X)$, для якого $e^*_{A,X} \circ i = j \circ e^*_{A,X}$. Автоморфізм j, таким чином, буде продовженням автоморфізму i. ◊

1. *Гуран І. Й., Зарічний М. М.* Елементи теорії топологічних груп: навч. посібник. – Київ: НМК ВО, 1991. – 76 с.
2. *Пирч Н. М.* Універсально M-еквівалентні пари тихоновських просторів // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2021. – Вип. 19. – С. 50–56.

3. *Юнусов А. С.* О квазикомпоненте свободных топологических групп // Математические исследования. – Кишинев: Штиинца, 1983. – Т. 74. – С. 163–165.
4. *Arhangel'skii A. V., Tkachenko M. G.,* Topological Groups and Related Structures // Atlantis Press, Amsterdam–Paris, 2008. – 782 p.
5. *Engelking R.* General Topology. – Berlin, Heldermann Verlag, 1989. – 529 p.
6. *Okunev O. G.* A method for consructing examples of M-equivalent spaces // Topology and its Applications. – 1990. – 36. – P. 157–171; Correction: Topology and its Applications. – 1993. – 49. – P. 191–192.
7. *Pyrch N. M.* Orthogonal retractions and the relation of *M*-equivalence // Matematychni Studii. – 2003. – 20, No. 2. – P. 151–161.
8. *Pyrch N. M.* On *M*-equivalence of mappings // Matematychni Studii, – 2005. – 24, No. 1. – P. 21–30.
9. *Sipacheva O. V.* Free topological groups of spaces and their subspaces // Topology and its Applications. – 2002. – 101. – P. 181–212.

ON UNIVERSALLY M-EQUIVALENT MAPPINGS

In the paper we introduce the modifications of the notion of M-equivalence of the mappings and present their applications to the investigation of equivalent mappings.

Key words: free topological group, M-equivalence, sequence of the continuous mappings

НУ «Львівська політехніка», Львів
Укр. акад. друкарства, Львів

Одержано
15.11.22