https://doi.org/10.15407/apmm2022.20.46-52

УДК 539.3

Б. В. Процюк ✉

ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У ТЕРМОЧУТЛИВОМУ ПІВПРОСТОРІ

Запропоновано аналітично-числову методику визначення температурних полів у термочутливому півпросторі за широкого спектра теплової дії. При цьому не накладено обмежень на характер температурної залежності теплофізичних характеристик. Розв'язання задачі теплопровідності з використанням перетворення Кірхгофа, функції Гріна, узагальнених функцій, лінійних сплайнів і оберненого перетворення Кірхгофа, яке ґрунтується на ітераційній формулі Ньютона для відшукання коренів трансцендентних рівнянь, зведено до визначення з рекурентних лінійних співвідношень змінної Кірхгофа у фіксовані моменти часу. Наведено результати числових досліджень.

***Ключові слова**: термочутливий півпростір, теплове випромінювання, нестаціонарне температурне поле, перетворення Кірхгофа, функція Гріна, лінійні сплайни, ітераційна формула Ньютона.*

Вступ. Раніше [2, 3] запропоновані аналітично-числові методики розв'язання нелінійних нестаціонарних задач теплопровідності для півпростору за лінійної температурної залежності коефіцієнта теплопровідності. Вони передбачають використання перетворення Кірхгофа, функції Гріна, узагальнених функцій і лінійних сплайнів та визначення з рекурентних систем нелінійних алгебричних рівнянь значень у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на обмежувальній поверхні та значень її похідної за часом на внутрішніх плоско-паралельних поверхнях або до знаходження з рекурентного нелінійного алгебричного рівняння значень у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на обмежувальній поверхні. Обернене перетворення Кірхгофа здійснено за точною формулою.

Нижче, розвиваючи підхід [3], розробили методику визначення температурних полів у півпросторі, коли не накладено обмежень на характер температурної залежності коефіцієнта теплопровідності. Вона передбачає знаходження з рекурентних лінійних співвідношень змінної Кірхгофа у фіксовані моменти часу. Обернене перетворення Кірхгофа ґрунтується на ітераційній формулі Ньютона для відшукання коренів трансцендентних рівнянь.

1. **Формулювання задачі**. Розглянемо [2, 3] півпростір, який займає область $\tilde{z} \geq 0$, має початкову температуру $t_0 T_0(\tilde{z})$, нагрівається шляхом конвективного теплообміну зі середовищем зі змінною у часі температурою $t_c T_c(\tau)$ і тепловим потоком густиною $q_0 q(T, \tau)$. Крім того, у півпросторі діють внутрішні джерела тепла з густиною $W_0 W(T, \tilde{z}, \tau)$. Одночасно з обмежувальної поверхні відводиться тепловий потік власного випромінювання згідно зі законом Стефана–Больцмана. Визначимо одновимірне нестаціонарне температурне поле півпростору з урахуванням температурних залежностей коефіцієнта теплопровідності $\lambda_t(T) = \lambda_0 \Lambda(T)$, об'ємної теплоємності $c_v(T) = c_0 C(T)$, коефіцієнта тепловіддачі $\alpha(T) = \alpha_0 \alpha_*(T)$ і ступеня чорноти поверхні півпростору $\varepsilon(T) = \varepsilon_0 \varepsilon_*(T)$. Тут множники біля функцій мають розмірності відповідних величин.

✉ dept19@iapmm.lviv.ua

За таких припущень нелінійна задача теплопровідності у безрозмірних величинах матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\bar{\Lambda}(\bar{T})\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right] = \bar{C}(\bar{T})\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathrm{Fo}} - \mathrm{Po}\,\bar{W}(\bar{T}, z, \mathrm{Fo}) \quad , \tag{1}$$

$$\left.\left(\bar{\Lambda}(\bar{T})\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \mathrm{Bi}\,\bar{\alpha}(\bar{T})[\bar{T} - \bar{t}_c\bar{T}_c(\mathrm{Fo})] - \mathrm{Sk}\,\bar{\varepsilon}(\bar{T})\bar{T}^4 + \mathrm{Ki}\,\bar{q}(\bar{T}, \mathrm{Fo})\right)\right|_{z=0} = 0\,, \tag{2}$$

$$\left.\bar{T}\right|_{z\to\infty} < \infty \quad , \tag{3}$$

$$\left.\bar{T}\right|_{\mathrm{Fo}=0} = \bar{t}_0\bar{T}_0(z)\,, \tag{4}$$

де

$$\bar{T} = \frac{T}{T_s}\,; \quad z = \frac{\tilde{z}}{\ell}\,; \quad \mathrm{Fo} = \frac{a_0\tau}{\ell^2}\,; \quad a_0 = \frac{\lambda_0}{c_0}\,; \quad \mathrm{Bi} = \frac{\ell\alpha_0}{\lambda_0}\,;$$

$$\mathrm{Sk} = \frac{\ell\varepsilon_0\sigma_0}{\lambda_0}T_s^3\,; \quad \mathrm{Ki} = \frac{\ell q_0}{\lambda_0 T_s}\,; \quad \mathrm{Po} = \frac{\ell^2 W_0}{\lambda_0 T_s}\,; \quad \bar{t}_0 = \frac{t_0}{T_s}\,; \quad \bar{t}_c = \frac{t_c}{T_s}\,;$$

$$\bar{T}_0(z) = T_0(z\ell)\,; \quad \bar{T}_c(\mathrm{Fo}) = T_c\left(\frac{\ell^2\mathrm{Fo}}{a_0}\right);$$

$$[\bar{\Lambda}(\bar{T}), \bar{C}(\bar{T}), \bar{\alpha}(\bar{T}), \bar{\varepsilon}(\bar{T})] = \left.[\Lambda(T), C(T), \alpha_*(T), \varepsilon_*(T)]\right|_{T=T_s\bar{T}}\,;$$

$$\bar{q}(\bar{T}, \mathrm{Fo}) = q\left(T_s\bar{T}, \frac{\ell^2\mathrm{Fo}}{a_0}\right); \quad \bar{W}(\bar{T}, z, \mathrm{Fo}) = W\left(T_s\bar{T}, z\ell, \frac{\ell^2\mathrm{Fo}}{a_0}\right);$$

σ_0 – стала Стефана–Больцмана; T_s – характерна для задачі температура; ℓ – параметр, який має розмірність довжини.

2. **Побудова аналітично-числового розв'язку**. Застосовуючи перетворення Кірхгофа

$$\theta = \int_{\bar{T}^*}^{\bar{T}} \bar{\Lambda}(\bar{T})d\bar{T}\,,$$

задачу (1)–(4) зводимо до такої [2]:

$$\frac{\partial^2\theta(z, \mathrm{Fo})}{\partial z^2} = \frac{\partial\theta(z, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} - w^t(z, \mathrm{Fo})\,, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=0} = f(\mathrm{Fo}) - \bar{\bar{t}}_c(\mathrm{Fo})\,, \tag{6}$$

$$\left.\theta\right|_{z\to\infty} < \infty\,, \tag{7}$$

$$\left.\theta\right|_{\mathrm{Fo}=0} = \theta_0(z)\,, \tag{8}$$

де

$$w^t(z, \mathrm{Fo}) = \left[\bar{a}(\bar{T}(\theta)) - 1\right]\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \mathrm{Po}\,\bar{a}(\bar{T}(\theta))\bar{W}(\bar{T}(\theta), z, \mathrm{Fo})\,;$$

$$\bar{a}(\bar{T}(\theta)) = \frac{\bar{\Lambda}(\bar{T}(\theta))}{\bar{C}(\bar{T}(\theta))};$$

$$f(\mathrm{Fo}) = \left[\mathrm{Bi}\,\bar{\alpha}(\bar{T}(\theta)) + \mathrm{Sk}\,\bar{\varepsilon}(\bar{T}(\theta))\bar{T}^4(\theta) - \mathrm{Ki}\,\bar{\bar{q}}(\bar{T}(\theta),\mathrm{Fo})\right]\Big|_{z=0};$$

$$\bar{\bar{\alpha}}(\bar{T}(\theta)) = \bar{\alpha}(\bar{T}(\theta))\bar{T}(\theta) - [\,\bar{\alpha}(\bar{T}(\theta)) - 1]\bar{t}_c\bar{T}_c(\mathrm{Fo});$$

$$\bar{\bar{q}}(\bar{T}(\theta),\mathrm{Fo}) = \bar{q}(\bar{T}(\theta),\mathrm{Fo}) - q^*(\mathrm{Fo});$$

$$\bar{\bar{t}}_c(\mathrm{Fo}) = \mathrm{Bi}\,\bar{t}_c\bar{T}_c(\mathrm{Fo}) + \mathrm{Ki}\,q^*(\mathrm{Fo});$$

$$\theta_0(z) = \int\limits_{\bar{T}_*}^{\bar{t}_0\bar{T}_0(z)} \bar{\Lambda}(\bar{T})\,d\bar{T};$$

$\bar{T}_* = \dfrac{T_*}{T_s}$; T_* – нижня межа діапазону температур, у якому змінюються теплофізичні характеристики; $q^*(\mathrm{Fo})$ – відома функція.

Розв'язок задачі (5)–(8), використовуючи метод функції Гріна, подамо у вигляді

$$\theta(z,\mathrm{Fo}) = \vartheta_0(z,\mathrm{Fo}) + \vartheta_L(z,\mathrm{Fo}) - \vartheta_f(z,\mathrm{Fo}) + \vartheta_w(z,\mathrm{Fo}). \tag{9}$$

Тут

$$\vartheta_0(z,\mathrm{Fo}) = \int\limits_0^\infty \theta_0(\zeta)G(z,\zeta,\mathrm{Fo})\,d\zeta;$$

$$\vartheta_L(z,\mathrm{Fo}) = \int\limits_0^{\mathrm{Fo}} \bar{\bar{t}}_c(\xi)G(z,0,\mathrm{Fo}-\xi)d\xi; \tag{10}$$

$$\vartheta_f(z,\mathrm{Fo}) = \int\limits_0^{\mathrm{Fo}} f(\xi)G(z,0,\mathrm{Fo}-\xi)\,d\xi; \tag{11}$$

$$\vartheta_w(z,\mathrm{Fo}) = \int\limits_0^{\mathrm{Fo}}\int\limits_0^\infty w^t(\zeta,\xi)G(z,\zeta,\mathrm{Fo}-\xi)\,d\zeta\,d\xi; \tag{12}$$

$$G(z,\zeta,\mathrm{Fo}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mathrm{Fo}}}\left[\exp\left(-\frac{(\zeta+z)^2}{4\mathrm{Fo}}\right) + \exp\left(-\frac{(\zeta-z)^2}{4\mathrm{Fo}}\right)\right]. \tag{13}$$

Знайдемо розподіли функцій $\vartheta_w(z,\mathrm{Fo})$ і $\vartheta_f(z,\mathrm{Fo})$, які входять у подання (9), у фіксовані моменти часу.

Для визначення функцій $\vartheta_w(z,\mathrm{Fo}_q)$ заміняємо у співвідношенні (12) верхню межу невласного інтеграла деяким числом b, яке вибираємо (шляхом числового експерименту) так, щоб у кінці часового інтервалу $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}^*$ виконувалась умова $\bar{T}(b,\mathrm{Fo}^*) \approx \bar{t}_0\bar{T}_0(b)$. Отриманий інтеграл записуємо як суму інтегралів від z_{j-1} до z_j, $j = 1,2,\ldots,J$, $0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_J = b$, у кожному з яких $w^t(\zeta,\xi)$ заміняємо на $w_j^t(\xi)$, де $w_j^t(\xi) \approx w^t(z_j^*,\xi)$, $z_j^* = \dfrac{z_{j-1}+z_j}{2}$. Після цього функції $\vartheta_w(z,\mathrm{Fo}_q)$ подаємо у вигляді

$$\vartheta_w(z,\mathrm{Fo}_q)=\sum_{j=1}^{J}\left[\int_0^{\mathrm{Fo}_{q-1}} w_j^t(\xi)\chi_j(z,\mathrm{Fo}_q-\xi)d\xi+\int_{\mathrm{Fo}_{q-1}}^{\mathrm{Fo}_q} w_j^t(\xi)\chi_j(z,\mathrm{Fo}_q-\xi)d\xi\right]. \quad (14)$$

де

$$\chi_j(z,\eta)=\int_{z_{j-1}}^{z_j} G(z,\zeta,\eta)d\zeta=\frac{1}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{z_j+z}{2\sqrt{\eta}}\right)+\mathrm{erf}\left(\frac{z_j-z}{2\sqrt{\eta}}\right)-\right.$$

$$\left.-\mathrm{erf}\left(\frac{z_{j-1}+z}{2\sqrt{\eta}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{z_{j-1}-z}{2\sqrt{\eta}}\right)\right].$$

У першому інтегралі (14), вважаючи, що відомі значення $w_j^t(\mathrm{Fo}_k)$, $k=0,1,\dots,q-1$, підінтегральну функцію $w_j^t(\xi)$ апроксимуємо на проміжку $[0,\mathrm{Fo}_{q-1}]$ лінійним сплайном, а в другому інтегралі приймаємо $w_j^t(\xi)\approx w_j^t(\mathrm{Fo}_{q-1})$.

Аналогічно, у поданні

$$\vartheta_f(z,\mathrm{Fo}_q)=\int_0^{\mathrm{Fo}_{q-1}} f(\xi)G(z,0,\mathrm{Fo}-\xi)\,d\xi+\int_{\mathrm{Fo}_{q-1}}^{\mathrm{Fo}_q} f(\xi)G(z,0,\mathrm{Fo}-\xi)\,d\xi \quad (15)$$

у першому інтегралі (15), вважаючи, що відомі значення $f(\mathrm{Fo}_k)$, $k=0,1,\dots,q-1$, підінтегральну функцію $f(\xi)$ апроксимуємо на проміжку $[0,\mathrm{Fo}_{q-1}]$ лінійним сплайном, а в другому приймаємо $f(\xi)\approx f(\mathrm{Fo}_{q-1})$.

При цьому для апроксимацій використовуємо таке подання:

$$\chi_\eta(\mathrm{Fo})\approx s_{\eta,1}^{(1)}\,\mathrm{Fo}+s_{\eta,1}^{(0)}+$$

$$+\sum_{p=1}^{K-1}(s_{\eta,p+1}^{(1)}\,\mathrm{Fo}+s_{\eta,p+1}^{(0)}-s_{\eta,p}^{(1)}\,\mathrm{Fo}-s_{\eta,p}^{(0)})S(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p), \quad (16)$$

де $\eta=j,f$;

$$s_{\eta,q}^{(1)}=\frac{\chi_\eta(\mathrm{Fo}_q)-\chi_\eta(\mathrm{Fo}_{q-1})}{\mathrm{Fo}_1},\quad s_{\eta,q}^{(0)}=\frac{\chi_\eta(\mathrm{Fo}_{q-1})\,\mathrm{Fo}_q-\chi_\eta(\mathrm{Fo}_q)\,\mathrm{Fo}_{q-1}}{\mathrm{Fo}_1},$$

$\chi_j(\mathrm{Fo})=w_j^t(\mathrm{Fo})$, $\chi_f(\mathrm{Fo})=f(\mathrm{Fo})$; $\mathrm{Fo}_q=q\,\mathrm{Fo}_1$, $q=0,1,\dots,K$; $K+1$ – кількість вузлів сплайна; $\mathrm{Fo}_1=a_0\Delta\tau/l^2$ і $\Delta\tau$ – відповідно без- і розмірний кроки сітки; $S(\cdot)$ – функція Гевісайда.

Обчисливши з використанням (13), (16) інтеграли (11), (12), одержимо:

$$\vartheta_f(z,\mathrm{Fo}_1)=-f_0[H(z,\mathrm{Fo}_1)+z],$$

$$\vartheta_f(z,\mathrm{Fo}_q)=-f_{q-1}z+s_{f,1}^{(1)}R(z,\mathrm{Fo}_q)-s_{f,q-1}^{(1)}R(z,\mathrm{Fo}_1)+$$

$$+\sum_{p=1}^{q-2}d_p^fR(z,\mathrm{Fo}_q-\mathrm{Fo}_p)-f_0H(z,\mathrm{Fo}_q),\quad q=2,3,\dots,K; \quad (17)$$

$$\vartheta_w(z,\mathrm{Fo}_q) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\left[\bar\vartheta_{j,q-1}(z,\mathrm{Fo}_q) - w^t_{j,q-1}\bar H_j(z,0)\right], \tag{18}$$

де

$$\bar\vartheta_{j,0}(z,\mathrm{Fo}_1) = 0\,;$$

$$\bar\vartheta_{j,q-1}(z,\mathrm{Fo}_q) = w^t_{j,0}\bar H_j(z,\mathrm{Fo}_q) - s^{(1)}_{j,q-1}\bar R_j(z,\mathrm{Fo}_1) + s^{(1)}_{j,1}\bar R_j(z,\mathrm{Fo}_q) +$$

$$+\sum_{p=1}^{q-2} d^w_{jp}\bar R_j(z,\mathrm{Fo}_q-\mathrm{Fo}_p)\,,\quad q=2,3,\ldots,K\,;$$

$$d^f_p = \frac{f_{p+1}-2f_p+f_{p-1}}{\mathrm{Fo}_1}\,,\qquad d^w_{jp} = \frac{w^t_{j,p+1}-2w^t_{j,p}+w^t_{j,p-1}}{\mathrm{Fo}_1}\,;$$

$$H(z,\eta) = -2\exp(-X^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta} - z\,\mathrm{erf}(X)\,;$$

$$R(z,\eta) = z\left(\eta+\frac{1}{6}z^2\right)\mathrm{erf}(X) + \frac{1}{3}(4\eta+z^2)\exp(-X^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta}\,;$$

$$\bar H_j(z,\eta) = U(z,z_j,\eta) + U(-z,z_j,\eta) - U(z,z_{j-1},\eta) - U(-z,z_{j-1},\eta)\,;$$

$$\bar R_j(z,\eta) = V(z,z_j,\eta) + V(-z,z_j,\eta) - V(z,z_{j-1},\eta) - V(-z,z_{j-1},\eta)\,;$$

$$U(z,\zeta,\eta) = \left(\eta+\frac{1}{2}Z^2\right)\mathrm{erf}(Y) + Z\exp(-Y^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta}\,;$$

$$V(z,\zeta,\eta) = \left(\frac{\eta^2+\eta Z^2}{2}+\frac{Z^4}{24}\right)\mathrm{erf}(Y) + \frac{1}{12}Z(10\eta+Z^2)\exp(-Y^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta}\,;$$

$$2\bar H_j(z,0) = (z_j+z)^2 + (z_j-z)^2L_j(z) - (z_{j-1}+z)^2 - (z_{j-1}-z)^2L_{j-1}(z)\,;$$

$$X = \frac{z}{2\sqrt{\eta}}\,,\qquad Y = \frac{Z}{2\sqrt{\eta}}\,,\qquad Z = z+\zeta\,;$$

$$L_j(z) = \mathrm{sgn}(z_j - z)\,;\quad w^t_{j,p} = w^t_j(\mathrm{Fo}_p)\,,\quad f_q = f(\mathrm{Fo}_q)\,.$$

Необхідні для визначення $\vartheta_w(z,\mathrm{Fo}_q)$ значення $w^t_{j,q-1}$ ($q=1,2,\ldots,K$) обчислюємо за формулами

$$w^t_{j,0} = \left[\bar a(\bar t_0\bar T_0(z^*_j)) - 1\right]\theta_0''(z^*_j) + \mathrm{Po}\,\bar a(\bar t_0\bar T_0(z^*_j))\bar W(\bar t_0\bar T_0(z^*_j), z^*_j, 0)\,,$$

$$w^t_{j,q-1} = \left[\bar a(\bar T(z^*_j,\mathrm{Fo}_{q-1}) - 1\right]\times$$

$$\times\left[\vartheta_0''(z^*_j,\mathrm{Fo}_{q-1}) - \vartheta_f''(z^*_j,\mathrm{Fo}_{q-1}) + \vartheta_w''(z^*_j,\mathrm{Fo}_{q-1})\right] +$$

$$+\mathrm{Po}\,\bar a(\bar T(z^*_j,\mathrm{Fo}_{q-1}))\bar W(\bar T(z^*_j,\mathrm{Fo}_{q-1}), z^*_j,\mathrm{Fo}_{q-1})\,,\qquad q=2,3,\ldots,K\,,$$

де

$$\vartheta_0''(z,\mathrm{Fo}_k) = \sum_{j=1}^{J}\theta_{0j}\left[\varphi(z,z_j,\mathrm{Fo}_k) - \varphi(z,z_{j-1},\mathrm{Fo}_k)\right];$$

$$\varphi(z,\zeta,\mathrm{Fo}) = -\frac{1}{\mathrm{Fo}\sqrt{2\pi}}\left[Y_+\exp(-Y_+^2) + Y_-\exp(-Y_-^2)\right], \qquad Y_\pm = \frac{\zeta \pm z}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}};$$

$$\vartheta_f''(z,\mathrm{Fo}_k) = s_{f,1}^{(1)}R''(z,\mathrm{Fo}_k) - s_{f,k-1}^{(1)}R''(z,\mathrm{Fo}_1) +$$

$$+\sum_{p=1}^{k-2} d_p^f R''(z,\mathrm{Fo}_k - \mathrm{Fo}_p) - f_0 H''(z,\mathrm{Fo}_k), \; k = 1,2,\ldots,K-1;$$

$$H''(z,\eta) = -\frac{1}{\sqrt{\pi\eta}}\exp(-X^2);$$

$$R''(z,\eta) = 2\exp(-X^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta} + z\,\mathrm{erf}(X);$$

$$\vartheta_w''(z,\mathrm{Fo}_k) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\left[\bar\vartheta_{j,k-1}''(z,\mathrm{Fo}_k) - w_{j,k-1}^t\bar H_j''(z,0)\right], \; k = 1,2,\ldots,K-1;$$

$$\bar\vartheta_{j,0}''(z,\mathrm{Fo}_1) = 0;$$

$$\bar\vartheta_{j,k-1}''(z,\mathrm{Fo}_k) = w_{j,0}^t\bar H_j''(z,\mathrm{Fo}_k) - s_{j,k-1}^{(1)}\bar R_j''(z,\mathrm{Fo}_1) +$$

$$+\sum_{p=1}^{k-2} d_{jp}^w \bar R_j''(z,\mathrm{Fo}_k - \mathrm{Fo}_p) + s_{j,1}^{(1)}\bar R_j''(z,\mathrm{Fo}_k), \quad k = 2,3,\ldots,K-1;$$

$$\bar H_j''(z,\eta) = 2\chi_j(z,\eta), \quad \bar R_j''(z,\eta) = \bar H_j(z,\eta); \; \bar H_j''(z,0) = L_j(z) - L_{j-1}(z).$$

Підставивши формули (17), (18) і знайдені із (10) функції $\vartheta_0(z,\mathrm{Fo}_q)$ і $\vartheta_L(z,\mathrm{Fo}_q)$ у (9), матимемо $\theta(z,\mathrm{Fo}_q)$. Розподіли температур

$$\bar T(z,\mathrm{Fo}_q) = \vartheta(z,\mathrm{Fo}_q) + \bar T_*$$

визначаємо з урахуванням коренів трансцендентних рівнянь

$$\Psi(\vartheta(z,\mathrm{Fo}_q)) - \theta(z,\mathrm{Fo}_q) = 0\,, \tag{19}$$

де $\Psi(\vartheta(z,\mathrm{Fo}_q)) = \int\limits_0^{\vartheta(z,\mathrm{Fo}_q)} \tilde\Lambda(\eta)d\eta$, $\tilde\Lambda(\vartheta) = \bar\Lambda(\bar T)$.

Для фіксованих значень z розв'язки рівнянь (19) знаходимо ітераційним методом Ньютона, згідно з яким формула для $m+1$-го наближення має вигляд

$$\vartheta_{m+1}(z,\mathrm{Fo}_q) = \vartheta_m(z,\mathrm{Fo}_q) - \frac{\Psi(\vartheta_m(z,\mathrm{Fo}_q)) - \theta(z,\mathrm{Fo}_q)}{\tilde\Lambda(\vartheta_m(z,\mathrm{Fo}_q))}. \tag{20}$$

3. **Апробація методики**. Її виконали для півпростору зі склокераміки [1]. Обчислювали при

$$\bar\Lambda(\bar T) = 1 + \beta_\lambda(\bar T - \bar T_*), \qquad \bar C(\bar T) = 1 - 0.2683e^{-11.4(\bar T - \bar T_*)},$$

$$a_0 = 2.9756\cdot 10^{-7}\ \text{м}^2/\text{с}, \quad \beta_\lambda = 1.18, \quad \mathrm{Bi} = 8.475,$$

$\mathrm{Po} = 0$, $\quad \bar\alpha(\bar T) = 1$, $\quad \bar t_0 = \bar T_*$, $\quad \bar T_c(\mathrm{Fo}) = \bar T_0(z) = 1$, $\quad \bar\varepsilon(\bar T) = 1$, $\quad \bar q(\bar T,\mathrm{Fo}) = 1$,
$T_s = t_c + q_0/\alpha_0 = 6000$ К, $\ell = 0.022$ м, $T_* = 300$ К, $J = 4$, $\Delta\tau = 0.125$ с.

2 с	10 с	50 с	125 с	200 с	300 с	500 с
0.2589	0.3388	0.3704	0.3782	0.3810	0.3829	0.3847
0.2587	0.3388	0.3704	0.3782	0.3810	0.3829	0.3847
0.2587	0.3388	0.3708	0.3785	0.3811	0.3830	0.3848

У таблиці наведено безрозмірні температури поверхні півпростору у вибрані моменти часу, підраховані за запропонованою методикою (перший рядок) і за методиками з праць [3, 2] (відповідно, другий та третій рядки). Різниця між ними не перевищує 0.0004.

Висновки. Розглянуто нестаціонарну задачу теплопровідності для термочутливого півпростору за урахування теплового випромінювання, нерівномірного розподілу початкової температури, температурнозалежних густин поверхневих та об'ємних джерел тепла. Її розв'язання з використанням перетворення Кірхгофа, функції Гріна, узагальнених функцій, лінійних сплайнів та оберненого перетворення Кірхгофа, яке ґрунтується на ітераційній формулі Ньютона для відшукання коренів трансцендентних рівнянь, зведено до визначення з рекурентних лінійних співвідношень змінної Кірхгофа у фіксовані моменти часу. Порівняння безрозмірних температур, підрахованих за цією і раніше запропонованими методиками, засвідчило задовільний їх збіг.

1. *Белик В. Д., Урюков Б. А., Фролов Г. А., Ткаченко Г. В.* Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инж.-физ. журн. – 2008. – 81, № 6. – С. 1058–1062.
   Те саме: *Belik V. D., Uryukov B. A., Frolov G. A., Tkachenko G. V.* Numerical-analitikal method of solution of a nonlinear unsteady heatconduction equation // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2008. – 81, No. 6. – P. 1099–1103. – https://doi.org/10.1007/s10891-009-0150-8.
2. *Процюк Б. В.* Нестаціонарні нелінійні задачі теплопровідності для півпростору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 4. – С. 156–167.
   Те саме: *Protsiuk B. V.* Nonstationary nonlinear problems of heat conduction for a half space. // J. Math. Sci. – 2021. – 256, No. 4. – P. 551–566. – https://doi.org/10.1007/s10958-021-05444-w.
3. *Процюк Б. В.* Спосіб розв'язання нелінійних нестаціонарних задач теплопровідності для півпростору // Прикл. проблеми механіки і математики – 2020. – Вип. 18. – С. 93–101. – https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.93-101.

DETERMINATION OF NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELDS IN A THERMOSENSITIVE HALF-SPACE

An analytical-numerical method for determining temperature fields in a thermosensitive half-space under a wide range of thermal action is proposed. In this case, no restrictions are imposed on the nature of the temperature dependences of thermophysical characteristics. The solution of the heat conduction problem using the Kirchhoff transformation, Green's function, generalized functions, linear splines, and the inverse Kirchhoff transformation, which is based on Newton's iterative formula for finding the roots of transcendental equations, is reduced to the determination of the Kirchhoff variable at fixed moments of time from recurrent linear relations. The results of numerical studies are presented.

Key words: thermosensitive half-space, thermal radiation, nonstationary temperature field, Kirchhoff transformation, Green's function, linear splines, Newton's iterative formula.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
05.12.22