https://doi.org/10.15407/apmm2022.20.39-45

УДК 517.922+511.2

Л. І. Комарницька,[✉] Ю. П. Матурін

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РІВНЯННЯ ВНУТРІШНІХ ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ

Розглянуто крайову задачу з двоточковими умовами за змінною t та умовами типу Діріхле за змінною x для узагальненого рівняння внутрішніх гравітаційних хвиль. Розв'язність задачі пов'язана з проблемою малих знаменників. Розглянуто питання існування та єдиності розв'язку задачі, побудовано явну формулу розв'язку у вигляді ряду за системою ортогональних функцій, досліджено оцінки знизу малих знаменників, що виникли під час побудови розв'язку.

Ключові слова: *узагальнене рівняння внутрішніх гравітаційних хвиль, крайова задача з двоточковими умовами, умови існування і єдиності, функція Ґріна, малі знаменники.*

Останнім часом зростає зацікавленість до вивчення диференціальних рівнянь із частинними похідними, які описують процеси коливних рухів у товщі рідини. До таких рівнянь відносять відоме рівняння Соболєва

$$D_t^2 \Delta u + \omega^2 D_{x_3}^2 u = f(t, x), \quad n = 3,$$

двовимірний аналог рівняння Соболєва

$$P_1(D_t) D_{x_1}^2 u + P_2(D_t) D_{x_2}^2 u = 0, \quad n = 2,$$

де $P_j(D_t) = D_t^l + \sum_{k=0}^{l-1} a_{kj} D_t^k, \; l \in N, \; a_{kj} \in R$, рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + \mathrm{N}^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f(t, x_1, x_2, x_3), \tag{1}$$

відоме в літературі як рівняння внутрішніх гравітаційних хвиль, де N^2 – квадрат частоти Вяйсяля–Брента [2, 3], і виникає під час вивчення малих коливань експоненціально-стратифікованої рідини в полі сили тяжіння.

Під стратифікованою прийнято розуміти рідину, фізичні характеристики якої (густина, теплоємність, динамічна в'язкість тощо) в стаціонарному стані змінюються лише вздовж деякого виділеного напрямку. Інакше кажучи, в стаціонарному стані фізичні характеристики рідини є функціями лише однієї просторової змінної. Стратифікацію рідини можуть викликати різні фізичні причини; серед них найчастіше зустрічається сила тяжіння. На сьогодні активно досліджують рівняння динаміки стратифікованих рідин, початково-крайові задачі для яких вивчали, зокрема, у працях [1, 2, 6].

Нижче розглянемо узагальнення рівняння (1) для довільної кількості n просторових змінних:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) + \\ + \mathrm{N}^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2}\right) = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2}$$

✉ komlesya@gmail.com

Воно належить до рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом.

В області $D=[0;T]\times\Pi$, $\Pi=\left\{x\in R_{+}^{n}:0\le x_{i}\le\pi,\ i=1,\dots,n\right\}$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, для рівняння (2) слід встановити умови існування та єдиності розв'язку задачі з умовами за часовою координатою

$$u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad u(t,x)\big|_{t=T}=\varphi_2(x) \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$u(t,x)\big|_{x_i=0}=u(t,x)\big|_{x_i=\pi}=0,\quad i=1,\dots,n, \tag{4}$$

де $\mathrm{N}\in R_{+}$ – деяка константа, функція $f(t,x_1,x_2,\dots,x_n)$ неперервна за змінною t та достатньо гладка за змінними x_i, $i=1,\dots,n$.

Розв'язок задачі (2)–(4) шукаємо у просторі $C^{(2,2)}(D)$ функцій $u(t,x)$ з нормою

$$\left\|u(t,x)\right\|_{C^{(2,2)}(D)}=\sum_{\substack{s_0\le 2\\|s|\le 2}}\max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial^{s_0+|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_n^{s_n}}\right|$$

у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k_1,k_2,\dots,k_n=1}^{\infty}u_k(t)\sin k_1x_1\sin k_2x_2\dots\sin k_nx_n,$$

$$k=(k_1,k_2,\dots,k_n)\in N^n, \tag{5}$$

який, за збіжності, задовольняє умови (4). Залишається визначити коефіцієнти $u_k(t)$ так, щоб ряд (5) задовольняв рівняння (2) і умови (3).

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k\in N^n$, є розв'язком задачі

$$-\|k\|^2u_k''(t)-\mathrm{N}^2(k_1^2+k_2^2+\dots+k_{n-1}^2)u_k(t)=f_k(t), \tag{6}$$

$$u_k(0)=\varphi_{1k},\quad u_k(T)=\varphi_{2k}, \tag{7}$$

де $\|k\|^2=k_1^2+k_2^2+\dots+k_n^2$, $f_k(t)$, φ_{1k}, φ_{2k} – коефіцієнти Фур'є функцій $f(t,x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, відповідно.

Однорідне рівняння, що відповідає рівнянню (6), має вигляд

$$-\|k\|^2u_k''(t)-\mathrm{N}^2(k_1^2+k_2^2+\dots+k_{n-1}^2)u_k(t)=0. \tag{6a}$$

Характеристичне рівняння для нього

$$\|k\|^2\lambda^2+\mathrm{N}^2(k_1^2+k_2^2+\dots+k_{n-1}^2)=0$$

має два комплексно спряжені корені

$$\lambda_1=\frac{\mathrm{N}\sqrt{k_1^2+k_2^2+\dots+k_{n-1}^2}}{\|k\|}i,\quad \lambda_2=-\frac{\mathrm{N}\sqrt{k_1^2+k_2^2+\dots+k_{n-1}^2}}{\|k\|}i.$$

Запровадимо позначення

$$\frac{\mathrm{N}\sqrt{k_1^2+k_2^2+\dots+k_{n-1}^2}}{\|k\|}=\alpha,\quad |k|=k_1+k_2+\dots+k_n.$$

Зауважимо, що

$$0<\alpha<\mathrm{N}. \tag{8}$$

Для кожного вектора $k \in N^n$ розв'язок рівняння (6а) має вигляд

$$u_k(t) = c_1 \cos\alpha t + c_2 \sin\alpha t,$$

підставивши який в умови

$$u_k(0) = 0, \quad u_k(T) = 0, \tag{7a}$$

отримаємо систему рівнянь для обчислення констант c_1, c_2

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0, \\ c_1 \cos\alpha T + c_2 \sin\alpha T = 0, \end{cases} \tag{9}$$

визначник якої $\Delta(k) = \sin\alpha T$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (2)–(4) *в просторі* $C^{(2,2)}(D)$ *необхідно і достатньо, щоб для всіх векторів* $k \in N^n$ *виконувались умови*

$$\sin\alpha T \neq 0. \tag{10}$$

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Якщо для деякого вектора $k_0 = (k_{1,0}, k_{2,0}, \dots, k_{n,0})$

$$\sin \frac{\mathrm{N}\sqrt{k_{1,0}^2 + k_{2,0}^2 + \dots + k_{n-1,0}^2}}{\|k_0\|} T = 0,$$

то однорідна задача (6а), (7а) має ненульові розв'язки вигляду

$$u_{k_0}(t) = c_{1,0} \cos\alpha_0 t + c_{2,0} \sin\alpha_0 t,$$

де $(c_{1,0}, c_{2,0})$ – ненульовий розв'язок системи рівнянь (9),

$$\alpha_0 = \frac{\mathrm{N}\sqrt{k_{1,0}^2 + k_{2,0}^2 + \dots + k_{n-1,0}^2}}{\|k_0\|}.$$

Тоді задача

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) + \mathrm{N}^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2}\right) = 0,$$

$$u(t,x)\big|_{t=0} = 0, \quad u(t,x)\big|_{t=T} = 0$$

має ненульові розв'язки

$$\tilde{u}(t,x) = \sum_{k_1,k_2,\dots,k_n=1}^{\infty} (c_{1,0}\cos\alpha_0 t + c_{2,0}\sin\alpha_0 t)\sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \dots \sin k_n x_n,$$

а розв'язок неоднорідної задачі (якщо він існує) не буде єдиним.

Достатність. Нехай існують два розв'язки $u_1(t,x)$ і $u_2(t,x)$ задачі (2)–(4) з простору $C^{(2,2)}(D)$. Тоді функція

$$u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x) \in C^{(2,2)}(D)$$

буде розв'язком відповідної однорідної задачі, а її коефіцієнти Фур'є $u_k(t)$ – розв'язками задачі (6а), (7а). Якщо для всіх $k \in N^n$

$$\sin \frac{\mathrm{N}\sqrt{k_{1,0}^2 + k_{2,0}^2 + \dots + k_{n-1,0}^2}}{\|k_0\|} T \neq 0,$$

тоді для всіх $k \in N^n$ система рівнянь (9) має тільки нульовий розв'язок і $u_k(t) \equiv 0$. З теореми про єдиність розвинення функції в ряд Фур'є випливає, що $u(t,x) \equiv 0$, тобто $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Умови (10) виконуються тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{\mathrm{N}\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n-1}^2}}{\|k\|} T \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

Крім того, якщо довжина T часового проміжку задовольняє нерівність $T < \frac{\pi}{\mathrm{N}}$, то умови (10) виконуються для всіх векторів $k \in N^n$. Справді, враховуючи оцінку (8), отримуємо:

$$0 < \alpha T < \mathrm{NT} < \mathrm{N}\frac{\pi}{\mathrm{N}},$$

тобто $0 < \alpha T < \pi$, а на проміжку $(0;\pi)$ $\sin \alpha T > 0$.

Припустимо, що умови (10) виконані. Тоді розв'язок задачі (6), (7) матиме вигляд суми

$$u_k(t) = U_k(t) + V_k(t),$$

де $U_k(t)$ – розв'язок задачі (6), (7а), а $V_k(t)$ – розв'язок задачі (6а), (7).

Розв'язок задачі (6а), (7) такий:

$$V_k(t) = \frac{\varphi_{1k} \sin \alpha(T-t) + \varphi_{2k} \sin \alpha t}{\sin \alpha T}. \tag{11}$$

За умови, що розв'язок задачі (2)–(4) єдиний, для кожного вектора $k \in N^n$ існує функція Ґріна $G_k(t,\tau)$ задачі (6а), (7а), за допомогою якої розв'язок задачі (6), (7а) можна подати у вигляді [4]

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau.$$

У квадраті $K_T = \left\{(t,\tau) \in R_+^2 : 0 \le t \le T, 0 \le \tau \le T\right\}$, крім сторін $\tau = 0$, $\tau = T$, функції $G_k(t,\tau)$ визначає формула

$$G_k(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2\alpha} \sin \alpha(t-\tau) - \frac{\sin \alpha(T-\tau) \sin \alpha\tau + \sin \alpha(T-\tau) \sin \alpha t}{2\alpha \sin \alpha T}.$$

На стороні $\tau = 0$ $(\tau = T)$ квадрата K_T функції $G_k(t,\tau)$ доозначуються за неперервністю справа (зліва).

Розв'язок задачі (6), (7а) має вигляд

$$U_k(t) = \int_0^T \left(\frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2\alpha} \sin \alpha(t-\tau) - \right.$$
$$\left. - \frac{\sin \alpha(T-\tau) \sin \alpha\tau + \sin \alpha(T-\tau) \sin \alpha t}{2\alpha \sin \alpha T} \right) f_k(\tau) d\tau. \tag{12}$$

Отже, розв'язок задачі (2)–(4) формально зображено рядом

$$u(t,x) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=1}^{\infty} \left(U_k(t) + V_k(t)\right) \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \ldots \sin k_n x_n, \tag{13}$$

де $U_k(t)$, $V_k(t)$ визначені формулами (12), (11), відповідно.

Ряд (13), взагалі кажучи, розбіжний, оскільки відмінні від нуля вирази $\sin \alpha T$ можуть бути як завгодно малими для нескінченної множини векторів $k \in N^n$. Тому питання збіжності ряду (13) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Теорема 2. *Нехай існує додатна стала M і число $\gamma \in N$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in N^n$ і довільного ε, $0 < \varepsilon < 1$, виконуються нерівності*

$$\left|\sin \alpha T\right| \ge \frac{M}{|k|^{\gamma+\varepsilon}}. \tag{14}$$

Якщо функція $f(t,x)$ неперервна за t, χ $(\chi \ge \gamma + n + 3)$ разів неперервно диференційовна за x і задовольняє умови

$$\frac{\partial^{2r} f(t,x)}{\partial x_i^{2r}}\Big|_{x_i=0} = \frac{\partial^{2r} f(t,x)}{\partial x_i^{2r}}\Big|_{x_i=\pi} = 0, \quad i = 1,2,\dots,n, \quad r = 0,1,\dots,\left[\frac{\chi-1}{2}\right],$$

а функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ ψ $(\psi \ge \gamma + n + 3)$ разів неперервно диференційовні за x і задовольняють умови

$$\frac{\partial^{2s} \varphi_j(x)}{\partial x_i^{2s}}\Big|_{x_i=0} = \frac{\partial^{2s} \varphi_j(x)}{\partial x_i^{2s}}\Big|_{x_i=\pi} = 0, \quad i = 1,2,\dots,n, \;\; j = 1,2, \;\; s = 0,1,\dots,\left[\frac{\psi-1}{2}\right],$$

то розв'язок задачі (2)–(4) *з простору $C^{(2,2)}(D)$ існує, задається рядом* (13) *і неперервно залежить від початкових даних.*

Д о в е д е н н я. Якщо функції $f(t,x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ задовольняють умови теореми, то для їхніх коефіцієнтів Фур'є справджуються нерівності

$$\max\left|\varphi_{jk}\right| \le \frac{M_j}{|k|^{\psi}}, \; j = 1,2, \quad \max_{0\le\tau\le T}\left|f_k(\tau)\right| \le \frac{M_3}{|k|^{\chi}}, \tag{15}$$

де константи M_1, M_2, M_3 не залежать від k.

Із формул (11)–(13) та оцінок (8), (14), (15) випливає, що спільною мажорантою для ряду $V_k(t)$ і рядів, отриманих з нього почленним диференціюванням до другого порядку за змінними x і t, є числовий ряд

$$\frac{\mathrm{N}^2(M_1+M_2)}{M} \sum_{k_1,k_2,\dots,k_n=1}^{\infty} \frac{1}{|k|^{\psi-\gamma-2-\varepsilon}} \tag{16}$$

і, аналогічно, для ряду $U_k(t)$

$$\frac{3\,\mathrm{N}\,T M_3}{M} \sum_{k_1,k_2,\dots,k_n=1}^{\infty} \frac{1}{|k|^{\chi-\gamma-2-\varepsilon}}. \tag{17}$$

За умовою теореми, ряди (16), (17) збіжні.

Теорему доведено.

Дослідимо, за яких умов виконуються нерівності (14).

Теорема 3. *Для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел $\frac{\pi}{\mathrm{N}T}$ нерівності* (14) *виконуються при $\gamma \ge n$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in N^n$.*

Д о в е д е н н я. Оцінимо знизу вираз $\left|\sin \alpha T\right|$, використовуючи нерівність $\|k\| \ge \frac{|k|}{\sqrt{n}}$, і те, що для всіх значень $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x > \frac{2x}{\pi}$:

$$|\sin\alpha T| = \left|\sin\left(\frac{\alpha T}{\pi} - m_k\right)\pi\right| > 2\left|\frac{\alpha T}{\pi} - m_k\right| =$$

$$= 2\left|\frac{\mathrm{N}T\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n-1}^2}}{\pi\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_n^2}} - m_k\right| =$$

$$= \frac{2\mathrm{N}T}{\pi}\left|\frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n-1}^2}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_n^2}} - \frac{\pi}{\mathrm{N}T}m_k\right| =$$

$$= \frac{2\mathrm{N}T}{\pi}\left|\frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n-1}^2}}{\|k\|} - \frac{\pi}{\mathrm{N}T}m_k\right| =$$

$$= \frac{2\mathrm{N}T}{\pi}\|k\|\left|\frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n-1}^2}}{\|k\|^2} - \frac{\pi}{\mathrm{N}T}\frac{m_k}{\|k\|}\right| \geq$$

$$\geq \frac{2\mathrm{N}T}{\pi\sqrt{n}}|k|\left|\frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n-1}^2}}{\|k\|^2} - \frac{\pi}{\mathrm{N}T}\frac{m_k}{\|k\|}\right|, \qquad (18)$$

де m_k – ціле число, що задовольняє нерівність

$$\left|\frac{\mathrm{N}T\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n-1}^2}}{\pi\|k\|} - m_k\right| < \frac{1}{2}.$$

Оскільки $\Phi(k) = \dfrac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n-1}^2}}{\|k\|^2}$ – обмежена послідовність дійсних чисел, то за лемою 2.4 [5] (гл. 1) нерівність

$$\left|\frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{n-1}^2}}{\|k\|^2} - \frac{\pi}{\mathrm{N}T}\frac{m_k}{\|k\|}\right| \geq \frac{1}{|k|^{n+1+\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел $\dfrac{\pi}{\mathrm{N}T}$ має нескінченне число розв'язків у цілих числах $k_1, k_2, \ldots, k_n, m_k$. Звідси, враховуючи (18), отримаємо:

$$|\sin\alpha T| > \frac{2\mathrm{N}T}{\pi\sqrt{n}}|k|\frac{1}{|k|^{n+1+\varepsilon}} = \frac{2\mathrm{N}T}{\pi\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{|k|^{n+\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Таким чином, для майже всіх чисел $\dfrac{\pi}{\mathrm{N}T}$ нерівності (14) виконуються при $M = \dfrac{2\mathrm{N}T}{\pi\sqrt{n}}$, $\gamma \geq n$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in N^n$.

Теорему доведено.

***Зауваження** 2*. Якщо $T \leq \dfrac{\pi}{2\mathrm{N}}$, то $0 < \alpha T < \dfrac{\pi}{2}$. Тоді $\sin\alpha T \geq \dfrac{2}{\pi}\alpha T$, тобто в цьому випадку проблеми малих знаменників не існує.

***Зауваження** 3*. Отримані результати можна узагальнити для рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_n u + \mathrm{N}^2\nabla u = f(t, x),$$

де оператор ∇ містить похідні за змінними x_i порядків, вищих за 2.

1. *Габов С. А., Малышева Г. Ю., Свешников А. Г., Шатов А. К.* О некоторых уравнениях, возникающих в динамике вращающейся стратифицированной и сжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. матем. физ. – 1984. – 24, No. 12. – С. 1850–1863.
   Те саме: *Gabov S. A., Malysheva G. Yu., Sveshnikov A. G., Shatov A. K.* On some equations arising in the dynamics of a rotating stratified and compressible fluid," U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 24, No. 6, 162–170 (1984), https://doi.org/10.1016/0041-5553(84)90027-2
2. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированной жидкости. – Москва: Наука, 1986. – 288 с.
3. *Lighthill J.* Waves in fluids. – Cambridge Univ. Press, 1978. – 504 p.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.
5. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
6. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – Москва: Физматлит, 2007. – 736 с.

TWO-POINT PROBLEM FOR THE GENERALIZED EQUATION OF INTERNAL GRAVITY WAVES

A boundary value problem with two-point conditions with respect to time and Dirichlet-type conditions with respect to x is considered for the generalized equation of internal gravity waves. The solvability of the problem is related to the problem of small denominators. The existence and uniqueness of the solution of the problem are studied, the explicit formula for the solution in the form of a series based on the system of orthogonal functions is constructed, and the lower estimates of small denominators that arise in the construction of the solution are investigated.

Key words: generalized equation of internal gravitaty waves, boundary value problem with two-point conditions, existence and uniqueness conditions, Green's function, small denominators.

Дрогобицький держ. пед. ун-т
ім. Івана Франка, Дрогобич

Одержано
28.11.22