https://doi.org/10.15407/apmm2022.20.31-38

УДК 517.95+511.2

В. С. Ільків[1], М. М. Симотюк[2]✉, Я. О. Сльоньовський[1]

МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО ВИЗНАЧНИКА ЗАДАЧІ НІКОЛЕТТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА

Доведено оцінки знизу для характеристичного визначника інтерполяційної задачі Ніколетті за виділеною змінною та умовами періодичності за рештою змінних для рівняння із частинними похідними типу Ейлера. Досліджено частковий випадок задачі, коли вузли інтерполяції утворюють геометричну прогресію.

***Ключові слова**: задача Ніколетті, рівняння типу Ейлера, метричний підхід, проблема малих знаменників.*

Вступ та основні позначення. Нижче використовуємо такі позначення: Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, Q_T^p – циліндр $(1,T)\times\Omega^p$; i – уявна одиниця, $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega^p$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$, $D=(\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_p)$; $\mathrm{Pol}_{n,p}^{\mathrm{hom}}$ – множина однорідних многочленів степеня n від p змінних з дійсними коефіцієнтами; $C^n(I)$, $n\in\mathbb{N}$, – простір функцій, n разів неперервно диференційовних на проміжку I; $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}A$ – n-вимірна міра Лебеґа вимірної множини $A\subset\mathbb{R}^n$; H_α, $\alpha\ge 0$, – гільбертів простір усіх формальних тригонометричних рядів

$$\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_k\exp(ik,x),\qquad \varphi_k\in\mathbb{C},$$

для яких є скінченною норма $\|\varphi(x);H_\alpha\|=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|\varphi_k|^2(1+|k|^q)^2\right)^{1/2}$, породжена скалярним добутком $(\varphi(x),\psi(x))_{H_q}=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_k\overline{\psi}_k(1+|k|^q)^2$, $C^n([a,b];H_\alpha)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, – простір функцій

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)\exp(ik,x),\qquad u_k\in C^n[a,b],$$

зі скінченною нормою $\|u;C^n([a,b];H_\alpha)\|=\sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[a,b]}\|(t\partial/\partial t)^j u(t,\cdot);H_\alpha\|$.

Нехай $n\in\mathbb{N}$, а поліноми $A_j\in\mathrm{Pol}_{j,p}^{\mathrm{hom}}$, $j=1,\ldots,n$, такі, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$, $k\ne\vec{0}$, многочлен

$$L(\lambda,ik)\equiv\lambda^n+\sum_{j=0}^{n-1}A_{n-j}(ik)\lambda^j \tag{1}$$

має такі різні корені $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$, що $i\lambda_j(k)\in\mathbb{R}$, $j=1,\ldots,n$. Припускаємо, що для всіх $\xi\in\mathbb{R}^p$, які лежать на сфері $|\xi|=1$, виконується умова

✉ mykhailo.m.symotiuk@gmail.com

$$P_L(\xi)\cdot A_n(\xi)\neq 0\,, \qquad (2)$$

де $P_L(\xi)$ – дискримінант многочлена (1) за змінною λ. Уведемо функції

$$y_q(t,k)=\begin{cases}\ln^{q-1}t, & \text{якщо } k=\vec{0},\\ t^{\lambda_q(k)}, & \text{якщо } k\neq\vec{0},\end{cases} \qquad q=1,\ldots,n\,,$$

і визначники

$$\Delta_n(k)=\det\left\|y_q^{(j-1)}(t_j,k)\right\|_{j,q=1}^{n}, \qquad k\in\mathbb{Z}^p\,, \qquad (3)$$

де $t_1,\ldots,t_n$ – такі різні точки з відрізка $[1;T]$, що $1\le t_1<\ldots<t_n\le T$. Визначники (3) виникають під час дослідження розв'язності такої задачі з умовами Ніколетті для рівняння із частинними похідними типу Ейлера:

$$L\left(t\frac{\partial}{\partial t},D\right)u(t,x)\equiv\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^n u+\sum_{j=0}^{n-1}\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j A_{n-j}(D)u=0,\ (t,x)\in Q_T^p\,, \qquad (4)$$

$$\left.\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1}u(t,x)\right|_{t=t_j}=\varphi_j(x),\quad j=1,\ldots,n,\quad x\in\Omega^p\,. \qquad (5)$$

Якщо виконується умова

$$\forall k\in\mathbb{Z}^p \qquad \Delta_n(k)\neq 0\,, \qquad (6)$$

то задача (4), (5) має єдиний формальний розв'язок, який зображує ряд

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta_n(k)}\varphi_{j,k}\,y_q(t,k)\exp(ik,x)\,, \qquad (7)$$

де $\Delta_{j,q}(k)$ – алгебричне доповнення елемента $y_q(t_j,k)$, $j,q=1,\ldots,n$, у визначнику $\Delta_n(k)$, а $\varphi_{j,k}$, $k\in\mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j=1,\ldots,n$. Якщо, крім умови (6), існує така стала ω, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ справджується нерівність

$$\left|\Delta_n(k)\right|\ge(1+|k|)^{-\omega}, \qquad \omega\in\mathbb{R}\,, \qquad (8)$$

то можна встановити збіжність ряду (7) у шкалі просторів $C^n([1,T];H_\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, якщо $\varphi_j\in H_{\alpha_j}$ для деяких $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $j=1,\ldots,n$. Тому для обґрунтування коректності задачі (4), (5) у просторах $C^n([1,T];H_\alpha)$ актуально дослідити можливість виконання оцінки (8). У цьому й полягає основна мета цієї праці. На підставі метричного підходу [1–3, 8–13] доведено (див. нижче теорему 1), що нерівність (8) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}^n$) векторів $\mathrm{t}=(t_1,\ldots,t_n)\in[1,T]^n$ для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$, якщо $\omega>(p-1)n(n-1)/2$. Оцінка з таким же самим значенням для показника ω зберігається (див. нижче теорему 2) і для випадку, коли вузли інтерполяції $t_1,\ldots,t_n$ в умовах Ніколетті (5) є логарифмічно рівновіддаленими, тобто виконуються рівності

$$t_j=t_1^j, \qquad j=1,\ldots,n, \qquad t_1>1. \qquad (9)$$

Для доведення теорем 1, 2 використали допоміжні твердження про оцінки зверху мір виняткових множин гладких функцій спеціального вигляду, про оцінку знизу модулів коренів $\lambda_j(k)$ многочлена (1) та їх різниць $\lambda_j(k)-\lambda_q(k)$, а також класичну лему Бореля–Кантеллі. Зауважимо, що для рівняння зі змінними коефіцієнтами типу Ейлера (4) метричні оцінки знизу для характеристичного визначника задачі Ніколетті є новими; раніше такі оцінки встановили у праці [7] для рівняння зі сталими коефіцієнтами; використовуючи методику праць [4, 5, 10–13].

1. **Допоміжні твердження**. Для доведення основних результатів використовуватимемо такі допоміжні твердження.

Для дійснозначної функції $f: I \to \mathbb{R}$, заданої на проміжку $I \subset \mathbb{R}$, через $E(f,\varepsilon,I)$, $\varepsilon > 0$, позначатимемо множину $\{t \in I : |f(t)| < \varepsilon\}$.

Лема 1 [6]. *Нехай* $f(t)$ *– ненульова функція вигляду*

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m} p_j t^{\mu_j}, \qquad \mu_j \ne \mu_q, \quad j \ne q, \quad \mu_j, p_j \in \mathbb{C}, \quad j=1,\ldots,m. \tag{10}$$

Якщо для деяких $a_j \in \mathbb{C}$, $j=1,\ldots,n$, *на відрізку* $[a,b] \subset [1,+\infty)$ *виконується умова*

$$\left|(t\,d/dt)^n f(t) + a_1 (t\,d/dt)^{n-1} f(t) + \ldots + a_n f(t)\right| \ge \delta > 0,$$

то для довільного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ *справджується оцінка*

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(f,\varepsilon,[a,b]) \le C_1 M (\varepsilon/\delta)^{1/n}, \qquad M \equiv 1 + \max_{1\le j\le m} |\mu_j|, \tag{11}$$

де $\varepsilon_1 = \dfrac{\delta}{2(n+1)A^n}$, $A \equiv 1 + \max\limits_{1\le j\le n} |a_j|^{1/j}$, $C_1 = C_1(a,b,m,n) > 0$.

Лема 2. *Якщо виконується умова* (2), *то існують такі сталі* $C_2, C_3 > 0$, *що для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$, $k \ne \vec{0}$, *виконуються оцінки*

$$|\lambda_j(k)-\lambda_q(k)| \ge C_2 |k|, \quad n \ge j > q \ge 1, \tag{12}$$

$$|\lambda_j(k)| \ge C_3 |k|, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{13}$$

Лема 3 (**Бореля–Кантеллі**). *Нехай* A_q $(q=1,2,\ldots)$ *– послідовність вимірних за Лебеґом множин з* $\mathbb{R}^n$, *причому ряд* $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} A_q$ *є збіжним. Тоді міра Лебеґа множини тих векторів, які належать до нескінченної кількості множин* A_q, *дорівнює нулю.*

2. **Метричні оцінки для довільного розташування вузлів**. Використаємо леми 1–3, щоб встановити оцінки знизу для визначника (7).

Теорема 1. *Нехай виконується умова* (2). *Тоді для майже всіх* (*стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}^n$) *векторів* $\mathrm{t}=(t_1,\ldots,t_n) \in [1,T]^n$ *нерівність* (8) *виконується для всіх* (*крім, можливо, скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$, *якщо* $\omega > (p-1)n(n-1)/2$.

Д о в е д е н н я. З огляду на лему Бореля–Кантеллі, для доведення теореми 1 досить перевірити збіжність ряду

$$\sum_{|k|>0} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B(k), \tag{14}$$

де

$$B(k) := \{\mathrm{t} \in [1,T]^n : |\Delta_n(k)| < (1+|k|)^{-\omega}\}, \qquad k \ne \vec{0},$$

якщо $\omega > (p-1)n(n-1)/2$. Зауважимо, що

$$B(k) \subset \bigcup_{q=2}^{n} B_q(k), \quad k \neq \vec{0}, \tag{15}$$

де символом $B_q(k)$, $q = 2,\ldots,n$, позначено множину

$$\{\mathrm{t} \in [1,T]^n : \left|\Delta_q(k;\boldsymbol{\tau}_q)\right| < \nu_q(k), \left|\Delta_{q-1}(k;\boldsymbol{\tau}_{q-1})\right| \geq \nu_{q-1}(k)\}.$$

Тут $\Delta_q(k;\boldsymbol{\tau}_q)$, $q = 1,\ldots,n$, – визначник, який отримано з визначника $\Delta_n(k)$ викреслюванням останніх $n-q$ рядків та останніх $n-q$ стовпців, $\boldsymbol{\tau}_q = (t_1,\ldots,t_q)$, $q = 1,\ldots,n$, а числа $\nu_q(k)$ визначають рівності

$$\nu_1(k) = 1, \qquad \nu_q(k) = \frac{\prod_{j=2}^{q}\left|\lambda_j^{j-1}(k)\Lambda_j(k)\right|}{(1+|k|)^{(p-1+\varepsilon)q(q-1)/2}}, \qquad q = 2,\ldots,n,$$

де $\varepsilon = \omega/C_n^2 - p + 1$, $\Lambda_q(k) = (\lambda_q(k)-\lambda_1(k))\ldots(\lambda_q(k)-\lambda_{q-1}(k))$, $q = 2,\ldots,n$.

Із включення (15) випливає, що для всіх $k \neq \vec{0}$ виконується оцінка

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B(k) \leq \sum_{q=2}^{n} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B_q(k). \tag{16}$$

Тоді за теоремою Фубіні для кожного $q = 2,\ldots,n$

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B_q(k) = \int\limits_{[0,T]^{n-1}} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} B_q(k;\mathrm{t}_q)\, dt_1 \ldots dt_{q-1} dt_{q+1} \ldots dt_n, \tag{17}$$

де $\mathrm{t}_q = (t_1,\ldots,t_{q-1},t_{q+1},\ldots,t_n)$, $q = 2,\ldots,n$, а символ $B_q(k;\mathrm{t}_q)$, $q = 2,\ldots,n$, позначає множину $\{t_q \in [1,T] : (t_1,\ldots,t_{q-1},t_q,t_{q+1},\ldots,t_n) \in B_q(k)\}$.

Застосуємо лему 1 для оцінки зверху мір множин $B_q(k;\mathrm{t}_q)$, $q = 2,\ldots,n$. Зауважимо, що $\Delta_q(k;\boldsymbol{\tau}_q)$ як функція від змінної t_q (за фіксованих $t_1,\ldots,t_{q-1}$) має вигляд (10), модулі показників $\left|\lambda_j(k)\right|$ якої не перевищують $C_4(1+|k|)$, де C_4 – стала, яка не залежить від $k \neq \vec{0}$.

Побудуємо лінійні диференціальні вирази порядку $q-1$ у вигляді добутку диференціальних виразів першого порядку:

$$R_{q-1}\left(t_q \frac{d}{dt_q}, k\right) = \prod_{j=1}^{q-1}\left(t_q \frac{d}{dt_q} - \lambda_j(k)\right), \qquad q = 2,\ldots,n.$$

Легко перевірити, що $\left(t\dfrac{d}{dt} + \lambda\right)[t^{-\lambda}] = 0$, тому для кожного $q = 2,\ldots,n$ виконуються рівності

$$R_{q-1}\left(t_q \frac{d}{dt_q}, k\right)\left[t_q^{\lambda_j(k)}\right] = 0, \qquad j = 1,\ldots,q-1,$$

$$R_{q-1}\left(t_q \frac{d}{dt_q}, k\right)\left[t_q^{\lambda_q(k)}\right] = \lambda_q^{q-1}(k)\Lambda_q(k) t_q^{\lambda_q(k)}.$$

Розвинемо визначники $\Delta_q(k;\tau_q)$, $q=2,\dots,n$, за елементами останнього рядка, тоді дістанемо рівності

$$\Delta_q(k;\tau_q)=\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+q}t_q^{\lambda_j(k)}\Delta_{q,j}(k;\tau_{q-1}),\qquad q=2,\dots,n, \tag{18}$$

де $\Delta_{q,j}(k;\tau_{q-1})$ – алгебричне доповнення елемента, що розміщений на перетині q-го рядка та j-го стовпця у визначнику $\Delta_q(k;\tau_q)$. Із формул (18) і лінійності диференціальних виразів R_{q-1} випливають такі рівності:

$$R_{q-1}\left(t_q\frac{\partial}{\partial t_q},k\right)\Delta_q(k;\tau_q)=\lambda_q^{q-1}(k)\Lambda_q(k)\Delta_{q-1}(k;\tau_{q-1})t_q^{\lambda_q(k)}, \tag{19}$$

де $q=2,\dots,n$. Якщо $\mathrm{t}\in B_q(k)$, $q=2,\dots,n$, то з рівностей (18) та означення множин $B_q(k)$, $q=2,\dots,n$, випливає, що

$$\forall t_q\in[1,T]\qquad\left|R_{q-1}\left(t_q\frac{\partial}{\partial t_q},k\right)\Delta_q(k;\tau_q)\right|\ge\nu_{q-1}(k)\left|\lambda_q^{q-1}(k)\Lambda_q(k)\right|. \tag{20}$$

Оскільки $\deg_\mu R_{q-1}(\mu,k)=q-1$, а модуль коефіцієнта при похідній $\left(t_q\frac{\partial}{\partial t_q}\right)^{q-1-j}$, $j=0,1,\dots,q-1$, у диференціальному виразі $R_{q-1}(t_q\partial/\partial t_q,k)$ не перевищує $C_5(1+|k|)^j$, то з оцінок (20) і (12), (13) із лем 1, 2 отримуємо:

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}B_q(k;\mathrm{t}_q)\le C_6(1+|k|)\left(\frac{\nu_q(k)}{\nu_{q-1}(k)\left|\lambda_q^{q-1}(k)\Lambda_q(k)\right|}\right)^{1/(q-1)}\le$$

$$\le C_7(1+|k|)^{-p-\varepsilon},\qquad C_7>0,\qquad q=2,\dots,n, \tag{21}$$

де сталі C_6, C_7 не залежать від вибору $\mathrm{t}_q=(t_1,\dots,t_{q-1},t_{q+1},\dots,t_n)\in[1,T]^{n-1}$. Тоді з формул (17), (21) одержимо оцінки

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n}B_q(k)\le C_7T^{n-1}(1+|k|)^{-p-\varepsilon},\qquad q=2,\dots,n,\qquad k\in\mathbb{Z}^p. \tag{22}$$

Із нерівностей (16) і (22) випливає збіжність ряду (14). Теорему доведено.

3. **Метричні оцінки у випадку**, **коли вузли є логарифмічно рівновіддаленими**. Встановимо оцінки знизу для визначника (5), якщо виконуються рівності (9). Тоді визначник (5) обчислюємо за формулою

$$\Delta_n(k)=\begin{vmatrix} t_1^{\lambda_1(k)} & \dots & t_1^{\lambda_n(k)} \\ \lambda_1(k)t_1^{2\lambda_1(k)} & \dots & \lambda_n(k)t_1^{2\lambda_n(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1}(k)t_1^{n\lambda_1(k)} & \dots & \lambda_n^{n-1}(k)t_1^{n\lambda_n(k)} \end{vmatrix}=$$

$$=t_1^{\lambda_1(k)+\dots+\lambda_n(k)}\prod_{n\ge j>q\ge1}\left(\lambda_j(k)\,t_1^{\lambda_j(k)}-\lambda_q(k)t_1^{\lambda_q(k)}\right),$$

$$k\in\mathbb{Z}^p,\ k\ne\vec{0}, \tag{23}$$

під час виведення якої врахували формулу для визначника Вандермонда чисел:

$\lambda_1(k)t_1^{\lambda_1(k)},\ldots,\lambda_n(k)t_1^{\lambda_n(k)}$.

Теорему 1 не можна застосувати для оцінки визначника (23), оскільки він залежить від вектора $t=(t_1,t_1^2,\ldots,t_1^n)$, що знаходиться на кривій Веронезе

$$\{(t_1,t_1^2,\ldots,t_1^n)\in\mathbb{R}^n : t_1\in(1,T^{1/n}]\},$$

яка має нульову n-вимірну міру Лебеґа, $n\ge 2$. У цьому випадку слід застосувати одновимірну міру Лебеґа, яка дає можливість встановити майже всюди на кривій Веронезе таку ж оцінку знизу для визначника (23), як і в теоремі 1 для визначника (3). Таким чином, крива Веронезе успадковує оцінку з куба $[1,T]^n$.

Теорема 2. *Нехай справджуються умова* (2) *і рівності* (9)*. Тоді для визначника* (23) *нерівність* (8) *виконується для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_1\in(1,T^{1/n}]$ *для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$*, якщо* $\omega>(p-1)n(n-1)/2$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи, що $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$ суто уявні числа, за допомогою елементарних перетворень формули (23) одержуємо, що

$$|\Delta_n(k)|=\prod_{n\ge j>q\ge 1}|\lambda_j(k)-\lambda_q(k)\,t_1^{\lambda_q(k)-\lambda_j(k)}|,\qquad k\in\mathbb{Z}^p,\ k\ne\vec{0}. \tag{24}$$

Покладемо:

$$\psi(k,t_1)=\prod_{n\ge j>q\ge 1}\psi_{jq}(k,t_1),\qquad k\in\mathbb{Z}^p,\quad k\ne\vec{0},\qquad t_1\in(1,T^{1/n}],$$

$$\psi_{jq}(k,t_1)=\lambda_j(k)-\lambda_q(k)\,t_1^{\lambda_q(k)-\lambda_j(k)},\qquad n\ge j>q\ge 1,\qquad k\in\mathbb{Z}^p,\ \ k\ne\vec{0},$$

$$R_{jq}\left(t_1\frac{d}{dt_1}\right)=t_1\frac{d}{dt_1}+\lambda_j(k)-\lambda_q(k),\qquad n\ge j>q\ge 1,\qquad k\in\mathbb{Z}^p,\ k\ne\vec{0},$$

$$E(k)=\{t_1\in(1,T^{1/n}] : |\psi(k,t_1)|<\eta(k)\},\qquad k\in\mathbb{Z}^p,\ k\ne\vec{0},$$

$$E_{jq}(k)=\{t_1\in(1,T^{1/n}] : |\psi_{jq}(k,t_1)|<\eta_{jq}(k)\},\quad n\ge j>q\ge 1,\quad k\in\mathbb{Z}^p,$$

$$k\ne\vec{0},$$

де

$$\eta(k)=\prod_{n\ge j>q\ge 1}\eta_{jq}(k),\ \ \eta(k)=\prod_{n\ge j>q\ge 1}\eta_{jq}(k),$$

$$\eta_{jq}(k)=|k|^{-(p-1)-\varepsilon},\ \ \varepsilon=2\omega/(n(n-1))-p+1>0.$$

Із оцінок (12), (13) з леми 2 випливає:

$$\left|R_{jq}\left(t_1\frac{d}{dt_1}\right)\psi_{jq}(k,t_1)\right|=|\lambda_j(k)(\lambda_j(k)-\lambda_q(k))|\ge C_8\,|k|^2, \tag{25}$$

де $n\ge j>q\ge 1$, $k\in\mathbb{Z}^p, k\ne\vec{0}$, стала $C_8>0$ не залежить від вибору k. Тоді з формул (25), на підставі леми 1, дістанемо, що

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\,E_{jq}(k)\le C_9(1+|k|)|k|^{-(p-1)-\varepsilon}/\,|k|^2\le C_{10}|k|^{-p-\varepsilon}, \tag{26}$$

де $n\ge j>q\ge 1$, $k\in\mathbb{Z}^p, k\ne\vec{0}$. Враховуючи, що

$$E(k) \subset \bigcup_{n \ge j > q \ge 1} E_{jq}(k) ,$$

з нерівностей (26) отримуємо таку оцінку для мір множин $E(k)$:

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\, E(k) \le \sum_{n \ge j > q \ge 1} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\, E_{jq}(k) \le C_{11} \left| k \right|^{-p-\varepsilon} , \qquad C_{11} > 0 . \tag{27}$$

Із оцінок (27) випливає збіжність ряду $\sum_k \mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\, E(k)$. Тому за лемою Бореля–Кантеллі для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) чисел $t_1 \in (1, T^{1/n}]$ нерівність

$$\left| \psi(k, t_1) \right| \ge \eta(k) = \left| k \right|^{-\omega} , \;\; \omega > (p-1)n(n-1)/2 ,$$

а отже, й нерівність

$$\left| \Delta_n(k) \right| \ge \eta(k)$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{Z}^p$. Теорему доведено.

Висновки. Встановлено метричні оцінки знизу характеристичного визначника задачі Ніколетті для лінійного рівняння типу Ейлера зі змінними коефіцієнтами. Застосовано метричний підхід [1–3, 8–11] для встановлення таких оцінок. Розглянуто частковий випадок задачі, коли вузли інтерполяції утворюють геометричну прогресію. Результати дослідження можна перенести на випадок інтерполяційної задачі Ніколетті для систем лінійних рівнянь зі частинними похідними.

1. *Берник В. И., Мельничук Ю. В.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.
2. *Берник В. И., Пташник Б. И., Сальга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – 13, № 4. – С. 637–645.
3. *Бобик О. І., Боднарчук П. І., Пташник Б. Й., Скоробогатько В. Я.* Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 1972. – 176 с.
4. *Ільків В. С.* Аналоги леми Пяртлі із абсолютними константами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, № 4. – С. 68–74.
5. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Про константу в лемі Пяртлі // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 601. – С. 12–17.
6. *Ільків В. С., Симотюк М. М., Слоньовський Я. О.* Метричні оцінки характеристичного визначника багатоточкової задачі для рівняння типу Ейлера // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – 65, № 1-2. – С. 65–79.
7. *Матурін Ю. П., Симотюк М. М.* Оцінки характеристичного визначника задачі Ніколетті для строго гіперболічного рівняння // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. – 2018. – 2, вип. 2 (33). – С. 100–108.
8. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
9. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
10. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 2. – С. 241–254.
11. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 3. – С. 400–413.
12. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: в 2-х т. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.
13. *Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 2. – С. 26–41.

METRIC ESTIMATES OF THE CHARACTERISTIC DETERMINANT OF THE NICOLETTI PROBLEM FOR THE EULER-TYPE EQUATION

The lower bounds are established for the characteristic determinant of the interpolation Nicoletti problem in a single variable and periodicity conditions with respect to the remaining variables for an Euler-type partial differential equation. Partial case is considered when the interpolation nodes form a geometric progression.

Key words: Nicoletti problem, Euler-type equation, metric approach, problem of small denominators.

[1] Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів,

[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.02.22