https://doi.org/10.15407/apmm2022.20.25-30

УДК 512.64

А. М. Романів[✉ 1, 2], Н. С. Джалюк[1, 2]

СТРУКТУРА ФОРМИ СМІТА НАЙБІЛЬШОГО СПІЛЬНОГО ДІЛЬНИКА ТА НАЙМЕНШОГО СПІЛЬНОГО КРАТНОГО МАТРИЦЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ НАД ОБЛАСТЯМИ БЕЗУ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1.5

Для неособливих матриць третього порядку, за деяких обмежень на інваріантні множники, вказано явний вигляд форм Сміта їхнього найбільшого спільного лівого дільника та найменшого спільного правого кратного над комутативними областями Безу стабільного рангу 1.5.

***Ключові слова**: область Безу, стабільний ранг 1.5, найбільший спільний дільник, найменше спільне кратне, форма Сміта.*

Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1.5 [4] з $1 \neq 0$, $M_n(R)$ – кільце $n \times n$ матриць над R. Згідно з теоремою 1 із праці [3] R – область елементарних дільників [5], тобто для кожної матриці D існують такі оборотні матриці P_D та Q_D відповідних розмірів, що

$$P_D D Q_D = \Psi = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)\text{, де } d_i \,|\, d_{i+1}\text{, } i = 1, \dots, n-1.$$

Матрицю $\Psi = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ називають формою Сміта, $d_1, \dots, d_n$ – інваріантними множниками, а матриці P_D та Q_D – лівою та правою перетворювальними матрицями для матриці D.

Позначимо через P_D множину всіх лівих перетворювальних матриць для матриці D. Згідно з відомими результатами [1,10] $\mathrm{P}_D = \mathrm{G}_\Psi P_D$, де

$$\mathrm{G}_\Psi = \left\{ H \in GL_n(R) \;\; | \;\; \exists\, H_1 \in GL_n(R) \;\; : \;\; H\Psi = \Psi H_1 \right\}.$$

Множина G_Ψ є мультиплікативною групою [1,10].

Нехай A, B – $n \times n$ матриці над R. Якщо $A = BC$, то кажуть, що матриця B є лівим дільником матриці A, а матриця A є правим кратним матриці B. Якщо $A = DA_1$ та $B = DB_1$, то матрицю D називають спільним лівим дільником матриць A та B. Окрім того, якщо матриця D є правим кратним кожного спільного лівого дільника матриць A та B, то її називають **найбільшим спільним лівим дільником** (н.с.л.д.) матриць A та B (у позначеннях $(A, B)_l$).

Якщо $M = AA_1 = BB_1$, то матрицю M називають спільним правим кратним матриць A та B. Окрім того, якщо матриця M є лівим дільником кожного спільного правого кратного матриць A та B, то її називають **найменшим спільним правим кратним** (н.с.п.к.) матриць A та B (у позначеннях $[A, B]_r$).

У теорії кілець важливу роль відіграють задачі про арифметику кілець матриць. Низку таких задач досліджено у класичній праці І. Капланського [5]. Зокрема, вивчено питання асоційовності матриць, а також властивості найбільшого спільного дільника елементів кільця. Метод знаходження н.с.л.д. та н.с.п.к. над комутативною областю головних ідеалів запропонував К. Макдаффі [6]. Б. Стюарт [11] показав, що ці поняття визначені однозначно з точністю до правої асоційовності. Такі дослідження продовжив

✉ romaniv_a@ukr.net

Р. Томпсон [12], зокрема, вказав деякі умови подільності інваріантних множників двох матриць та інваріантних множників їх найменшого спільного кратного. У працях [2] та [7, 8] встановлено взаємозв'язки між формами Сміта двох матриць та формами Сміта їх н.с.л.д. та н.с.п.к. для досить широких класів матриць.

У цьому дослідженні, для неособливих матриць третього порядку за певних обмежень на форми Сміта, вказано явний вигляд форм Сміта їх н.с.л.д. та н.с.п.к. над комутативною областю Безу стабільного рангу 1.5.

Нехай A, B – неособливі матриці третього порядку над R, які мають форми Сміта

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon),$$

$$\Delta = \mathrm{diag}(1, \delta, \delta),$$

відповідно.

Символами (a, b) та $[a, b]$ позначатимемо найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне елементів a та b, відповідно. Позначення $a|b$ означає, що елемент a ділить елемент b, I – одинична матриця.

Лема. *Нехай* $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^3 := S$. *Тоді елемент*

$$((\varepsilon, \delta), s_{21}, s_{31})$$

є інваріантом для вибору перетворювальних матриць P_B *та* P_A.

Д о в е д е н н я. Нехай F_A та F_B – інші ліві перетворювальні матриці матриць A та B. Тобто $F_A \in \mathrm{P}_A$, $F_B \in \mathrm{P}_B$. Тоді існують такі $H_A \in \mathrm{G}_{\mathrm{E}}$ та $H_B \in \mathrm{G}_{\Delta}$, що $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Позначимо $F_B F_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^3$. Розглянемо добуток матриць

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1}.$$

Позначимо $H_B S = \|k_{ij}\|_1^3$. На підставі наслідку 6 із праці [10] матриця H_B має вигляд

$$H_B = \begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ \delta h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ \delta h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$k_{i1} = \|\delta h_{i1} \quad h_{i2} \quad h_{i3}\| \begin{Vmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{Vmatrix} =$$

$$= \delta h_{i1} s_{11} + h_{i2} s_{21} + h_{i3} s_{31} = \delta l_i + h_{i2} s_{21} + h_{i3} s_{31},$$

де $l_i = h_{i1} s_{11}$, $i = 2, 3$. Розглянемо елемент

$$((\varepsilon, \delta), k_{21}, k_{31}) = ((\varepsilon, \delta), (\delta l_2 + h_{22} s_{21} + h_{23} s_{31}), (\delta l_3 + h_{32} s_{21} + h_{33} s_{31})) := d.$$

Оскільки $(\varepsilon, \delta)|\delta$, то

$$d = ((\varepsilon, \delta), (h_{22} s_{21} + h_{23} s_{31}), (h_{32} s_{21} + h_{33} s_{31})).$$

Оскільки $((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31})$ є дільником всіх доданків, приходимо до висновку, що $((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}) | d$, тобто

$$((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}) \,|\, ((\varepsilon,\delta), k_{21}, k_{31}).$$

З іншого боку, $S = H_B^{-1}\|k_{ij}\|_1^3$. Зауважимо, що $H_B^{-1} \in G_\Delta$. Тоді на підставі аналогічних до наведених міркувань отримаємо:

$$((\varepsilon,\delta), k_{21}, k_{31}) \,|\, ((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}).$$

А це означає, що

$$((\varepsilon,\delta), k_{21}, k_{31}) = ((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}).$$

Позначимо $SH_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^3$. Оскільки $H_A^{-1} \in G_{\mathrm{E}}$, то згідно з наслідком 6 із [10] матриця H_A^{-1} має вигляд

$$H_A^{-1} = \begin{Vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ \varepsilon v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ \varepsilon v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$t_{i1} = \begin{Vmatrix} s_{i1} & s_{i2} & s_{i3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} v_{11} \\ \varepsilon v_{21} \\ \varepsilon v_{31} \end{Vmatrix} = s_{i1}v_{11} + s_{i2}\varepsilon v_{21} + s_{i3}\varepsilon v_{31},\ i = 2,3.$$

Розглянемо елемент

$$((\varepsilon,\delta), t_{21}, t_{31}) =$$

$$= ((\varepsilon,\delta), (s_{21}v_{11} + s_{22}\varepsilon v_{21} + s_{23}\varepsilon v_{31}), (s_{31}v_{11} + s_{32}\varepsilon v_{21} + s_{33}\varepsilon v_{31})) =$$

$$= ((\varepsilon,\delta), (s_{21}v_{11} + \varepsilon(s_{22}v_{21} + s_{23}v_{31})), (s_{31}v_{11} + \varepsilon(s_{32}v_{21} + s_{33}v_{31}))).$$

Оскільки $(\varepsilon,\delta)|\varepsilon$, то

$$((\varepsilon,\delta), t_{21}, t_{31}) = ((\varepsilon,\delta), s_{21}v_{11}, s_{31}v_{11}) = ((\varepsilon,\delta), v_{11}(s_{21}, s_{31})).$$

Із оборотності матриці H_A^{-1} випливає, що $(\varepsilon, v_{11}) = 1$. Тоді

$$((\varepsilon,\delta), t_{21}, t_{31}) = ((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}).$$

Зваживши на асоціативність кільця $M_3(R)$, завершуємо доведення. ◊

Теорема 1. *Нехай* R *– комутативна область Безу стабільного рангу 1,5 і нехай*

$$P_A A Q_A = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon) = \mathrm{E},$$

$$P_B B Q_B = \mathrm{diag}(1, \delta, \delta) = \Delta.$$

Тоді форма Сміта найбільшого спільного лівого дільника матриць A *та* B *має вигляд*

$$\Phi = \mathrm{diag}\big(1, ((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}), (\varepsilon,\delta)\big),$$

де $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^3 := S$.

Д о в е д е н н я. Відразу ж зауважимо, що згідно з лемою елемент $((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31})$, а отже, і матриця Φ не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A та P_B.

Із доведення теореми 1 із праці [4] випливає, що форма Сміта н.с.л.д. матриць A та B збігається з формою Сміта матриці $\|SE \quad \Delta\|$. На підставі теореми 2 із праці [4] матриці P_A та P_B можна вибрати так, що

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_{21} & 1 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Розглянемо матрицю

$$\|SE \quad \Delta\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_{21} & \varepsilon & 0 & 0 & \delta & 0 \\ s_{31} & s_{32}\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \delta \end{Vmatrix}.$$

Нехай елементи d_i, $i = 1,2,3$ – н.с.д. мінорів відповідного порядку матриці $\|SE \quad \Delta\|$. І нехай елементи φ_i, $i = 1,2,3$ – інваріантні множники матриці Φ. Очевидно, що $\varphi_1 = d_1 = 1$.

Розглянемо н.с.д. мінорів другого порядку матриці $\|SE \quad \Delta\|$:

$$d_2 = \left(\varepsilon, s_{21}, \delta, \varepsilon, \delta, \vartriangle, \varepsilon s_{21}, \delta s_{31}, \delta s_{21}, \varepsilon^2, \varepsilon\delta s_{32}, \varepsilon\delta, \varepsilon\delta, \delta^2, \varepsilon s_{32}, \varepsilon, s_{31}, \delta, \varepsilon s_{32}, \varepsilon, \delta\right),$$

де $\vartriangle = \begin{vmatrix} s_{21} & \varepsilon \\ s_{31} & \varepsilon s_{32} \end{vmatrix}$. Відкинувши кратні елементи, отримаємо:

$$d_2 = \left((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}\right).$$

Отже,

$$\varphi_2 = \left((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}\right).$$

Розглянемо н.с.д. мінорів третього порядку матриці $\|SE \quad \Delta\|$.

$$d_3 = \left(\varepsilon^2, \vartriangle, \varepsilon\delta s_{32}, \varepsilon\delta, \varepsilon s_{21}, \varepsilon\delta, \delta s_{31}, \delta s_{21}, \delta^2, \varepsilon^2, \varepsilon\delta s_{32}, \delta\varepsilon, \delta\varepsilon, \delta^2\right),$$

де $\vartriangle = \begin{vmatrix} s_{21} & \varepsilon \\ s_{31} & \varepsilon s_{32} \end{vmatrix}$. Аналогічно, відкинувши кратні елементи, отримаємо:

$$d_3 = \left(\varepsilon^2, \vartriangle, \varepsilon\delta, \varepsilon s_{21}, \delta s_{31}, \delta s_{21}, \delta^2, \right).$$

Зауважимо, що

$$(\varepsilon s_{21}, \vartriangle) = \left(\varepsilon s_{21}, \begin{vmatrix} s_{21} & \varepsilon \\ s_{31} & \varepsilon s_{32} \end{vmatrix}\right) = (\varepsilon s_{21}, \varepsilon s_{21}s_{32} - \varepsilon s_{31}) = (\varepsilon s_{21}, \varepsilon s_{31}).$$

Тоді

$$d_3 = \left(\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \varepsilon s_{21}, \varepsilon s_{31}, \delta s_{31}, \delta s_{21}, \delta^2\right) = \left(\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \delta^2, \varepsilon(s_{21}, s_{31}), \delta(s_{21}, s_{31})\right).$$

Оскільки

$$(\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \delta^2) = (\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \varepsilon\delta, \delta^2) = (\varepsilon(\varepsilon,\delta), \delta(\varepsilon,\delta)) = (\varepsilon,\delta)(\varepsilon,\delta),$$

то

$$d_3 = \left((\varepsilon,\delta)(\varepsilon,\delta), \varepsilon(s_{21}, s_{31}), \delta(s_{21}, s_{31})\right) = (\varepsilon,\delta)\left((\varepsilon,\delta), (s_{21}, s_{31})\right).$$

Отже,

$$\varphi_3 = \frac{d_3}{d_2} = \frac{(\varepsilon,\delta)\left((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}\right)}{\left((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}\right)} = (\varepsilon,\delta).$$

Теорему доведено. ◊

Наслідок. *Нехай R — комутативна область Безу стабільного рангу 1.5 і нехай*

$$P_A A Q_A = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon),$$

$$P_B B Q_B = \operatorname{diag}(1, \delta, \delta).$$

Щоб матриці A та B були взаємно простими зліва, необхідно та достатньо, щоб $(\varepsilon,\delta) = 1$.

Д о в е д е н н я. $(A, B)_l = \mathrm{I}$ тоді і лише тоді, коли $\Phi = \mathrm{I}$, тобто $(\varepsilon,\delta) = 1$. ◊

Теорема 2. *Нехай R — комутативна область Безу стабільного рангу 1.5 і нехай*

$$P_A A Q_A = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon) = \mathrm{E},$$

$$P_B B Q_B = \operatorname{diag}(1, \delta, \delta) = \Delta.$$

Тоді форма Сміта найменшого спільного правого кратного матриць A та B має вигляд

$$\Omega = \operatorname{diag}\left(\frac{(\varepsilon,\delta)}{\left((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}\right)}, [\varepsilon,\delta], [\varepsilon,\delta]\right),$$

де $P_B P_A^{-1} = \left\| s_{ij} \right\|_1^3 := S$.

Д о в е д е н н я. Відразу ж зауважимо, що згідно з лемою елемент $\left((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}\right)$, а отже, і матриця Ω не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A та P_B.

На основі теореми 1 форма Сміта н.с.л.д. матриць A та B має вигляд:

$$\operatorname{diag}\left(1, \left((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}\right), (\varepsilon,\delta)\right).$$

Згідно з теоремою 1.18 із праці [9] маємо, що

$$\pm \det A \det B = \det(A, B)_l \det[A, B]_r,$$

тобто

$$\det[A, B]_r = \pm \frac{\det A \det B}{\det(A, B)_l} = \pm \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{(\varepsilon,\delta)\left((\varepsilon,\delta), s_{21}, s_{31}\right)} = \omega_1 \omega_2 \omega_3.$$

На основі теореми 3 із праці [12] маємо, що $\omega_{i+j-3} \,\big|\, [\varepsilon_i, \delta_j]$, $i + j > 3$, $i, j = 1,2,3$. Оскільки $\mathrm{E} \,|\, \Omega$ та $\Delta \,|\, \Omega$, то $[\varepsilon,\delta] \,|\, \omega_i$, $i = 2,3$. Тоді $\omega_i = [\varepsilon,\delta]$, $i = 2,3$, тобто $\omega_2 = [\varepsilon,\delta]$ та $\omega_3 = [\varepsilon,\delta]$. Отже,

$$\omega_1 = \pm\frac{\varepsilon^2\delta^2}{(\varepsilon,\delta)\big((\varepsilon,\delta),s_{21},s_{31}\big)[\varepsilon,\delta][\varepsilon,\delta]} = \pm\frac{\varepsilon^2\delta^2(\varepsilon,\delta)(\varepsilon,\delta)}{(\varepsilon,\delta)\big((\varepsilon,\delta),s_{21},s_{31}\big)\varepsilon\delta\,\varepsilon\delta} =$$

$$= \pm\frac{(\varepsilon,\delta)}{\big((\varepsilon,\delta),s_{21},s_{31}\big)}.$$

Враховуючи, що інваріантні множники матриці вибираються з точністю до дільників одиниці, отримаємо:

$$\Omega = \operatorname{diag}\left(\frac{(\varepsilon,\delta)}{\big((\varepsilon,\delta),s_{21},s_{31}\big)}, [\varepsilon,\delta], [\varepsilon,\delta]\right).$$

Теорему доведено. ◊

1. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12 – С. 14–21.
2. *Романів А. М., Щедрик В. П.* Найбільший спільний лівий дільник та найменше спільне праве кратне матриць другого порядку // Мат. вісник НТШ. – 2012. – 9. – С. 269–284.
3. *Щедрик В. П.* Кільця Безу стабільного рангу 1,5 та розкладність повної лінійної групи у добуток її підгруп // Укр. мат. журн. – 2017. – 69, № 1. – С. 113–120.
4. *Щедрик В. П.* Кільця Безу стабільного рангу 1,5 // Укр. мат. журн. – 2015. – 67, № 6. – С. 849–860.
5. *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–491.
6. *MacDuffee C. C.* Matrices with elements in a principal ring // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – 39, No. 8. – P. 564–584.
7. *Romaniv A. M.* On the Smith normal form of least common multiple matrices from some class of matrices // Math. methods and phys.-mech fields. – 2021. – 64, No. 2. – C. 47–51.
8. *Romaniv A. M.* On the structure of least common multiple matrices from some class of matrices // Carpathian Math. Publ. – 2018. – 10, No. 1. – C. 179–184.
9. *Shchedryk V. P.* Arithmetic of matrices over rings. – Akademperiodyka, Kyiv, – 2021. – 278 p.
10. *Shchedryk V.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. – No. 2. – P. 79–99.
11. *Stewart B. M.* A note on least common left multiples // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – 55, No. 6. – P. 587–591.
12. *Thompson R. C.* Left multiples and right divisors of integral matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 1986. – 19. – P. 287–295.

THE STRUCTURE OF THE SMITH NORMAL FORM OF THE GREATEST COMMON DIVISOR AND THE LEAST COMMON MULTIPLE OF THE THIRD ORDER MATRICES OVER BEZOUT DOMAINS OF STABLE RANGE 1.5

For nonsingular matrices of the third order, under certain restrictions on invariant factors, the explicit form of the Smith forms of their greatest common left divisor and least common right multiple over commutative Bezout domains of stable range 1.5 are established.

Key words: Bezout domain, stable range 1.5, greatest common divisor, least common multiple, Smith form.

[1]Ін-т прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів
[2]Нац. ун-т "Львівська політехніка", Львів

Одержано
15.11.20