https://doi.org/10.15407/apmm2022.20.19-24

УДК 512.53+512.64

О. В. Зубарук✉

ОБЧИСЛЕННЯ Σ -ФУНКЦІЇ ДЛЯ КОМУТАТИВНОЇ НЕЦИКЛІЧНОЇ НАПІВГРУПИ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ БЕЗ ОДИНИЧНОГО І НУЛЬОВОГО ЕЛЕМЕНТІВ

Для довільного алгебрично замкненого поля характеристики, відмінної від двох, обчислено Σ -функцію числа параметрів комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів, яка є категорно-комбінаторною характеристикою такої напівгрупи.

***Ключові слова**: характеристика поля, нециклічна напівгрупа, визначальні співвідношення, матричні зображення, нормальна форма Жордана, Σ -функція, алгебра Ауслендера.*

Вступ. У сучасній теорії зображень категорний метод – один з основних не лише під час досліджень кваліфікаційних задач, а й вивчення властивостей параметрів для різних класів зображень (зокрема, див. [13, 15, 18, 22–24, 26–34]. Це дослідження присвячене вивченню дискретних параметрів категорії зображень напівгруп третього порядку, заданих у вигляді алгебри Ауслендера.

У праці [3] описано мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх напівгруп третього порядку. Якщо розглядати лише комутативні напівгрупи, та ще й такі, що не є ні циклічними, ні циклічними з приєднаним одиничним чи нульовим елементами, то існують (з точністю до ізоморфізму) лише чотири напівгрупи (в круглих дужках вказано всі елементи, в кутових – мінімальну систему твірних, а потім – визначальні співвідношення):

$$(a)\ \ (0,\ b,\ c) = \langle b,\ c\rangle : b^2 = 0,\ c^2 = 0,\ bc = cb = 0\,;$$

$$(b)\ \ (0,\ b,\ c) = \langle b,\ c\rangle : b^2 = b,\ c^2 = c,\ bc = cb = 0\,;$$

$$(c)\ \ (0,\ b,\ c) = \langle b,\ c\rangle : b^2 = 0,\ c^2 = c,\ bc = cb = 0\,;$$

$$(d)\ \ (c^2,\ b,\ c) = \langle b,\ c\rangle : b^3 = b^2,\ c^3 = c,\ b^2 = c^2,\ bc = cb = c\,.$$

Зауважимо, що тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних e і 0 (якщо вони є) не виписані.

Всі ці напівгрупи ручні, причому, окрім напівгрупи (a), – скінченного зображувального типу, тобто мають скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень [3].

Позначимо комутативну нециклічну напівгрупу третього порядку без одиничного і нульового елементів вигляду (d) через S_d .

Сучасна теорія зображень над полями вивчає їх як класичні об'єкти (групи, напівгрупи, алгебри Лі), так і порівняно нових (сагайдаки, частково впорядковані множини, тощо). Тут важливо не лише вивчити самі зображення, а й категорію, яку вони утворюють. Якщо зображення алгебричного

✉ Sambrinka@ukr.net

об'єкта розглядають у матричній формі, то категорія його об'єктів індукується категорією всіх матриць (морфізмами з матриці A в матрицю B є такі матриці X, що $AX = XB$).

Нижче вивчено комбінаторні властивості категорій матричних зображень комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів над полем характеристики, відмінної від 2.

Нехай T – матричне зображення скінченно породженої напівгрупи S над полем K. Позначимо через $p(T)$ максимальне число незалежних параметрів матриці X, що задовольняє систему лінійних матричних рівнянь $T(s)X = XT(s)$, де s пробігає напівгрупу S. Очевидно, що $p(T)$ не змінюється зі зміною T на еквівалентне йому зображення. Якщо S – напівгрупа скінченного (зображувального) типу над полем K, тобто має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень, а $T = \{T_1,\ T_2, ...,\ T_m\}$ – повна система її нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень, то для $n \in [1,\ m] =: \{1,\ 2,\ ...,\ m\}$ покладемо

$$p_n(T) =: \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_n} p(T_{i_1} \oplus T_{i_2} \oplus \cdots \oplus T_{i_n}),\ \ \Sigma_S(n) =: p_n(T).$$

Введену функцію $\Sigma_S : [1, m] \to N$ називають *Σ-функцією числа параметрів для напівгрупи S* (відносно поля K) або просто *Σ-функцією напівгрупи S* [5].

У цій статті обчислено Σ-функцію числа параметрів для комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів над полем характеристики, відмінної від 2.

1. **Формулювання основного результату**. Наступна теорема описує Σ-функцію комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів S_d над полем характеристики, відмінної від 2.

Теорема. *Для довільного алгебрично замкненого поля K характеристики, відмінної від 2, Σ-функція комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів S_d має такі значення*:

$$\Sigma_{S_d}(n) = \begin{cases} 5, & \text{якщо } n = 1, \\ 17, & \text{якщо } n = 2, \\ 19, & \text{якщо } n = 3, \\ 7, & \text{якщо } n = 4. \end{cases}$$

2. **Доведення теореми**. Канонічні форми матричних зображень комутативних напівгруп третього порядку отримано в праці [3] з використанням методів Київської школи з теорії матричних задач та зображень ([1, 2, 4, 7–12, 14, 16, 17, 19–21, 25]). Нерозкладні зображення та алгебра Ауслендера для комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів S_d над полем характеристики, відмінної від 2, описана в праці [6].

Випишемо нерозкладні зображення напівгрупи S_d над полем характеристики, відмінної від 2:

(1) $B_1 = (1)$, $C_1 = (1)$;

(2) $B_2 = (1)$, $C_2 = (-1)$;

(3) $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(4) $B_4 = (0)$, $C_4 = (0)$.

Обчислимо Σ -функцію числа параметрів для системи нерозкладних зображень $T = \{T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4\}$ комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів S_d над полем характеристики, відмінної від 2.

Очевидно, $p(T_1) = p(T_2) = p(T_4) = 1$.

Розглянемо нерозкладне зображення $T_3 = \{A_3, B_3\}$. Тоді матриця X, що задовольняє співвідношення $A_3X = XA_3$, $B_3X = XB_3$, має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix}.$$

Тому $p(T_3) = 2$, а отже, $p_1(T) = p(T_1) + p(T_2) + p(T_3) + p(T_4) = 5$.

Розглянемо зображення $T_{ij} = \{A_{ij}, B_{ij}\} = T_i \oplus T_j$, де $i < j$, $i, j \in \{1,2,4\}$. Тоді матриці A_{ij} і B_{ij} діагональні, причому хоча б одна із них має різні числа на головній діагоналі. Тоді матриця X діагональна, а значить $p(T_{ij}) = 2$.

Отже, $p(T_1 \oplus T_2) = p(T_1 \oplus T_4) = p(T_2 \oplus T_4) = 2$.

Розглянемо зображення $T_{13} = \{A_{13}, B_{13}\} = T_1 \oplus T_3$. Тоді матриця X має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Значить $p(T_1 \oplus T_3) = 3$.

Розглянемо зображення $T_{23} = \{A_{23}, B_{23}\} = T_2 \oplus T_3$. Тоді матриця X має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Значить $p(T_2 \oplus T_3) = 3$.

Розглянемо зображення $T_{34} = \{A_{34}, B_{34}\} = T_3 \oplus T_4$. Тоді матриця X має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Значить $p(T_3 \oplus T_4) = 5$.

Отже,

$$p_2(T) = p(T_1 \oplus T_2) + p(T_1 \oplus T_3) + p(T_1 \oplus T_4) + \\ + p(T_2 \oplus T_3) + p(T_2 \oplus T_4) + p(T_3 \oplus T_4) = 17.$$

Розглянемо зображення $T_{123} = \{A_{123}, B_{123}\} = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$. Тоді матриця X має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Значить $p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3) = 4$.

Розглянемо зображення $T_{124} = \{A_{124}, B_{124}\} = T_1 \oplus T_2 \oplus T_4$. Тоді матриця X має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Значить $p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_4) = 3$.

Розглянемо зображення $T_{134} = \{A_{134}, B_{134}\} = T_1 \oplus T_3 \oplus T_4$. Тоді матриця X має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}.$$

Значить $p(T_1 \oplus T_3 \oplus T_4) = 6$.

Розглянемо зображення $T_{234} = \{A_{234}, B_{234}\} = T_2 \oplus T_3 \oplus T_4$. Тоді матриця X має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}.$$

Значить $p(T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) = 6$.

Отже,

$$p_3(T) = p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3) + p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_4) + \\ + p(T_1 \oplus T_3 \oplus T_4) + p(T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) = 19.$$

Розглянемо зображення $T_{1234} = \{A_{1234}, B_{1234}\} = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4$. Тоді матриця X має вигляд

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Отже, $p_4(T)=p(T_1\oplus T_2\oplus T_3\oplus T_4)=7$.

Таким чином, теорему доведено.

1. *Бондаренко В. М.* Связки полуцепных множеств и их представления // Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 88.60 – Киев, 1988. – 32 с.
2. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления: Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – 71. – С. 24–41.
3. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: Математика і інформатика. – 2018. – 32, № 1. – С. 36–49.
4. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Про матричні зображення моноїдів четвертого порядку // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: Математика і інформатика. – 2018. – 33, № 2. – С. 19–26.
5. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Σ -функція числа параметрів для системи матричних зображень // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. – 2015. – 12, № 3. – С. 56–64.
6. *Бондаренко В. М., Зубарук О.В.* Про категорію зображень комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: Математика і інформатика. – 2022. – 41, № 2. – С. 23–28.
7. *Бондаренко В. М., Назарова Л. А., Завадский А. Г.* О представлениях ручных частично упорядоченных множеств // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН УССР., 1979. – С. 75–105.
8. *Гельфанд И. М., Пономарьов В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук – 1968. – 23, вып. 2. – С. 3–60.
9. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 104–114.
10. *Дяченко С. М.* Напівгрупи Рісса над циклічною групою простого порядку скінченного зображувального типу // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2016. – 178. – С. 23–26.
11. *Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В.* Ручные частино упорядоченные множества с инволюцией // Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. – 1990. – 183. – С. 149–159.
12. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – Т. 28. – С. 5–31.
13. *Auslander M., Reiten I.* Applications of contravariantly finite subcategories // Adv. Math. – 1991. – 86, No. 1. – P. 111–152.
14. *Bondarenko V. M.* Linear operators on S-graded vector spaces // Linear algebra and its applications. – 2003. – 365, No. 5. – P. 45–90.
15. *Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis R. F., Tylyshchak A. A.* Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2013. – 16, No. 2. – P. 171–187.
16. *Bondarenko V. M., Gerasimova T. G., Sergeichuk V. V.* Pairs of mutually annihilating operators // Linear algebra and its applications, 2009. – 430 (1). P. 86–105.
17. *Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M.* On modular representations of semigroups $S_p\times T_p$ // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – 16, No. 1. – P. 16–19.

18. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On finite posets of *inj*-finite type and their Tits forms // Algebra Discrete Math. – 2006. – 5, No. 2. – P. 17–21.
19. *Bondarenko, V. M., Tertychna O. M.* On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication // Algebra Discrete Math. – 2008. – No. 4. – P. 15–22.
20. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M., Zubaruk O. V.* On classificatio of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition // Algebra and Discrete Mathematics. – 2016. – vol. 21, No. 1. – P. 18–23.
21. *Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.* On characteristic properties of semigroups // Algebra Discrete Math. – 2015 – 20, No. 1. – P. 32-39.
22. *Bongartz K., Kettler M., Riedtmann C.* On module categories where the hom-order and the stable hom-relation coincide // J. Algebra. – 2006. – 299, No. 1. – P. 219–225.
23. *Drozd Yu. A.* On K_0 of locally finite categories // J. Algebra. – 2022. – 596. – P. 289–310.
24. *Gabriel P.* Categories and representations // J. Pure Appl. Algebra. – 2000. – 154, No. 1-3. – P. 177–191.
25. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I // Manus. Math. – 1972. – 6, No. 1. – P. 71–103.
26. *Hanihara N.* Auslander correspondence for triangulated categories // Algebra Number Theory. – 2020. – 14, No. 8. – P. 2037–2058.
27. *Herschend M., Jorgensen P.* Classification of higher wide subcategories for higher Auslander algebras of type A // J. Pure Appl. Algebra. – 2021. – 225, No. 5, Article ID 106583, 23 p.
28. *Jiao P.* Injective objects in the category of finitely presented representations of an interval finite quiver // Ark. Mat. – 2019. – 57, No. 2. – P. 381–396.
29. *Naidu D.* Some properties of the representation category of twisted Drinfeld doubles of finite groups // Int. Electron. J. Algebra. – 2021. – 29, No. 29. – P. 223–238.
30. *Paskunas V., Tung S.-N.* Finiteness properties of the category of $\operatorname{mod} p$ representations of $GL_2(Q_p)$ // Forum Math. Sigma. – 2021. – 9. – Paper No. e80. – 39 p.
31. *Ringel C.* Linear Nakayama algebras which are higher Auslander algebras // Commun. Algebra. – 2022. – 50, No. 11, P. 4842–4881.
32. *Shotton J.* The category of finitely presented smooth $\operatorname{mod} p$ representations of $GL_2(F)$ // Doc. Math. – 2020. – 25. – P. 143–157.
33. *Zhang X.* Classifying tilting modules over the Auslander algebras of radical square zero Nakayama algebras // J. Algebra Appl. – 2022. – 21, No. 2, Article ID 2250041, 8 p.
34. *Zito S.* Three results concerning Auslander algebras // Commun. Algebra. – 2021. – 49, No. 12. – P. 5129–5136.

CALCULATION OF Σ -FUNCTION FOR COMMUTATIVE NON-CYCLIC SEMIGROUP OF ORDER 3 WITHOUT IDENTITY AND ZERO ELEMENTS

For an arbitrary algebraically closed field of characteristic not equal to 2, we calculate the Σ -function of the number of parameters for commutative non-cyclic semigroup of third order without identity and zero elements, which is categorically combinatorial characteristic of such semigroup.

Key words: characteristic of a field, non-cyclic semigroup, defining relations, matrix representation, normal Jordan form, Σ -function, Auslander algebra.

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
28.11.22