https://doi.org/10.15407/apmm2021.19.94-106

УДК 517.983

Г. В. Івасик ✉, М. І. Кучма

ФОРМУЛА ФУНКЦІЇ ВЕЙЛЯ ЧЕРЕЗ РЕЗОЛЬВЕНТУ ОПЕРАТОРА

Використовуючи так зване розгалуження резольвенти, визначили функцію Вейля для моделі Фрідріхса. Отримано формулу функції Вейля через резольвенту оператора. Подано достатні умови для існування резольвенти.

Ключові слова: *спектр транспортного оператора, неперервний спектр, модель Фрідріхса, інтегральний оператор, оператор Штурма–Ліувілля, гільбертів простір, компактність оператора, функція Вейля, просторовий аргумент, векторнозначні функції, розгалуження резольвенти, збурення оператора.*

Вступ. У класичному варіанті функцію Вейля визначають через зв'язок між різноманітними розв'язками рівняння за різних граничних умов. Пропонуємо інший підхід, який ґрунтується на можливості розрізняти розв'язки рівнянь залежно від характеру їх властивостей. Для цього використовуємо так зване розгалуження резольвенти, яке виявляють під час розгляду її властивостей як операторної функції. Далі шукаємо таку вектор-функцію, аналітичну за параметром ζ, що має той же стрибок, що і резольвента. На наступному кроці розглядаємо цю вектор-функцію і шукаємо для неї скалярну функцію з тим самим стрибком, що і вектор-функція. Цю скалярну функцію називатимемо функцією Вейля. Таким чином, можемо перейти до загальнішої ситуації, не прив'язуючись до диференціальних рівнянь, для будь-якої моделі Фрідріхса. Розглянемо описаний алгоритм детально. Щоб довести, що це дійсно є узагальненням, потрібно ввести оператор Штурма–Ліувілля в модель Фрідріхса і переконатись, що в частковому випадку ця класична функція Вейля збігатиметься з нашою функцією Вейля. Крім того, даємо достатні умови існування функції Вейля для довільної моделі Фрідріхса.

У праці [1] подано класичне означення функції Вейля. Мета дослідження – перевірити, чи наше означення збігатиметься з наведеним у цьому дослідженні, де не подано спектральний розклад оператора Шредінгера R^n.

Наведено [2] умови для моделі Фрідріхса, які дають можливість отримати формулу для стрибка резольвенти на неперервному спектрі. Недолік праці в тому, що формули громіздкі і незручні для використання, а також відсутній безпосередній зв'язок з резольвентою.

У праці [3] визначили матричну функцію Вейля, використовуючи так зване розгалуження резольвенти, а в [4] вивчили теорію Вейля для самоспряженого оператора Шредінгера. Встановили існування функції Вейля та структуру резольвенти, але не отримали спектральний розклад оператора.

Виявили [5], що спектральні особливості оператора Штурма–Ліувілля на прямій осі породжують деякі зростальні компоненти в асимптотиці за часом розв'язків відповідних еволюційних рівнянь. Під час обчислення цих компонент використовували модель Фрідріхса для оператора Штурма–Ліувілля. Одержали рівність Парсеваля з використанням функції Вейля, але її подали недостатньо детально.

У праці [6] встановили, що власні значення та спектральні особливості транспортного оператора за деяких умов на спектр можуть мати точку скупчення лише в нулі. Тут побудовано модель Фрідріхса та знайдено умови, за яких при $\zeta = 0$ оператор має єдину точку скупчення власних значень.

✉ Ivasyk-g@ukr.net

У статті [7] вивчили пряму і обернену задачі для оператора Штурма–Ліувілля з розривними коефіцієнтами на скінченному проміжку. Побудували резольвенту оператора і отримали спектральний розклад. Виявили, що власні функції утворюють повну систему. Знайшли функцію Вейля. Довели теорему єдиності для розв'язку оберненої задачі. Але ця праця стосується саме скінченного проміжку $L^2(0,\pi)$.

Вивчено [8] сімейство деяких операторних матриць. При цьому модель Фрідріхса відіграє допоміжну роль. Її можна застосувати під час розгляду різноманітних фізичних задач, використовуючи додатньо визначені оператори моделі Фрідріхса.

Розглянуто [9] локалізацію спектральних сингулярностей дисипативних операторів у термінах асимптотики відповідної експоненійної функції зі застосуванням традиційного класичного підходу, досліджено функцію Вейля для збуреного лапласіана в просторі $L^2\left(R^3\right)$.

Мета цього дослідження – узагальнити поняття функції Вейля для несамоспряженої моделі Фрідріхса, використовуючи так зване розгалуження резольвенти, отримати класичну функцію Вейля (заздалегідь включивши в модель Фрідріхса оператор Штурма–Ліувілля); подати умови існування функції Вейля, а також загальне зображення функції Вейля через резольвенту оператора.

1. **Розгалуження резольвенти і функція Вейля**

Нехай $H = L^2_\rho(0,\infty)$, $\rho(\tau) > 0$. Припустимо, що неперервний спектр деякого оператора належить до інтервалу $[0,\infty)$:

$$T : H \to H, \quad \overline{D(T)} = H. \tag{1}$$

Позначимо $T_\zeta = (T-\zeta)^{-1}$. Білінійна форма резольвенти $\left(T_\zeta\varphi,\psi\right)$ є аналітичною функцією, якщо $\zeta \notin [0,\infty)$. Припустимо, що існує такий лінійний простір $\Phi \subset H$, $\overline{\Phi} = H$, що форма $\left(T_\zeta\varphi,\psi\right)$, $\varphi,\psi \in \Phi$ допускає аналітичне продовження $\left(T_\zeta\varphi,\psi\right)_\pm$ над віссю $(0,\infty)$. Вважаємо, що $T : \Phi \to \Phi$ і що кратність неперервного спектра оператора T є $m = 1$.

Позначимо через $h_\zeta \in H$ $\zeta \in \Omega \setminus [0,\infty)$ аналітичний за ζ елемент у просторі H, $\Omega = \{\zeta : \operatorname{dist}(\zeta,[0,\infty)) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Нехай $a(\zeta), b(\zeta), r(\zeta)$ – деякі функціонали в H і $B(\zeta) : \Phi \to \Phi$ – деякий оператор.

Означення 1. Кажемо, що елемент h_ζ, $\zeta \in \Omega \setminus [0,\infty)$ відокремлює розгалуження резольвенти T_ζ, $\zeta \in \Omega \setminus [0,\infty)$, якщо

$$T_\zeta\varphi = \left(\varphi, b\left(\bar\zeta\right)\right)h_\zeta + B(\zeta)\varphi, \quad \varphi \in \Phi, \quad \zeta \in \Omega \setminus [0,\infty), \tag{2}$$

де функції $\left(\varphi,\overline{b(\zeta)}\right)$ і $B(\zeta)\varphi$, $\varphi \in \Phi$ аналітичні в Ω.

Кажемо, що скалярна функція $M(\zeta)$, $\zeta \in \Omega \setminus [0,\infty)$ *відокремлює розгалуження* h_ζ, якщо

$$\left(h_\zeta,\psi\right) = m(\zeta)\left(a(\zeta),\psi\right) + \left(r(\zeta),\psi\right), \quad \psi \in \Phi, \ \zeta \in \Omega \setminus [0,\infty), \tag{3}$$

де функції $(a(\zeta),\psi)$ і $\left(r(\zeta),\psi\right)$ аналітичні в Ω. Функцію $m(\zeta)$ називають *функцією Вейля* оператора T.

Іншими словами, розгалуження резольвенти T_ζ задає елемент h_ζ, а розгалуження h_ζ – скалярна функція $m(\zeta)$.

Визначаємо $(T_\sigma\varphi,\psi)_\pm = \lim\limits_{\tau\to\pm0}(T_{\sigma+i\tau}\varphi,\psi)$, $\varphi,\psi\in\Phi$ і за аналогією – елементи $(h_\sigma)_\pm$ та функції $m_\pm(\sigma),\sigma>0$. Далі припускаємо для оператора T, що існують такі елементи φ, $\psi\in\Phi$, що

$$(T_\sigma\varphi,\psi)_+ - (T_\sigma\varphi,\psi)_- \neq 0 \ , \ \sigma>0. \qquad (4)$$

Лема 1. Функціонали $a(\sigma)$, $b(\sigma)$ в (2) , (3) є власними функціоналами оператора T, (T^*), що відповідають точці $\sigma\in(0,\infty)$ неперервного спектра.

Доведення. Оскільки $T:\Phi\to\Phi$, замінюємо в (2) елемент φ на $(T-\zeta)\varphi$, то

$$T_\zeta(T-\zeta)\varphi = \left((T-\zeta)\varphi, b(\bar\zeta)\right)h_\zeta + B(\zeta)(T-\zeta)\varphi.$$

Тут $T_\zeta(T-\zeta)\varphi=\varphi$, тому, якщо $\zeta\to\sigma\pm0$, тоді

$$\varphi = \left((T-\sigma)\varphi, b(\sigma)\right)(h_\sigma)_\pm + B(\sigma)(T-\sigma)\varphi. \qquad (5)$$

Як випливає з (2) і (4), $(h_\sigma)_+-(h_\sigma)_-\neq0$, з огляду на (5) маємо: $\left((T-\sigma)\varphi,b(\sigma)\right)\equiv0$. Тому $b(\sigma)$ є власний функціонал T^*. Отже, підставимо (3) у рівність (2), тоді $(T_\zeta\varphi,\psi)=\left(\varphi,b(\bar\zeta)\right)\left(m(\zeta)\left(a(\zeta),\psi\right)+\left(r(\zeta),\psi\right)\right)$.

Враховуючи (4), матимемо $m_+(\sigma)-m_-(\sigma)\neq0$. Після підсталяння $\left(T^*-\bar\zeta\right)\psi$ замість ψ і обчислення стрибка через піввісь $(0,\infty)$ отримаємо $0=\left(\varphi,b(\sigma)\right)\left(m_+(\sigma)-m_-(\sigma)\right)\left(a(\sigma),\left(T^*-\bar\sigma\right)\psi\right)$.

Вибираємо такий φ, що $\left(\varphi,b(\sigma)\right)\neq0$, $\sigma>0$, тоді з огляду на $m_+(\sigma)-m_-(\sigma)\neq0$, $\sigma>0$, матимемо $\left(a(\sigma),\left(T^*-\sigma\right)\psi\right)=0$, $\sigma>0$, тому $a(\sigma)$ є власним функціоналом оператора T.

Лема 1 доведена.

2. **Означення максимального оператора** $T_{\max}$

Деякий оператор $T_1\supset T$ називають *розширенням* оператора T, якщо $D(T)\subset D(T_1)$ і $T_1\varphi=T\varphi$, $\varphi\in D(T)$.

***Означення** 2.* Розширення $T_{\max}\supset T$ називають *максимальним оператором* для T:

1) якщо для кожного елемента $\varphi\in\Phi$ і кожного значення $\sigma>0$ існує єдиний розв'язок рівняння

$$(T_{\max}-\sigma)f_\sigma=\varphi,\ \sigma>0,\ \varphi\in\Phi \qquad (6)$$

і якщо $f_\sigma\in\Phi$; вводимо оператор $T_{\max,\sigma}:\Phi\to\Phi$ у вигляді

$$T_{\max,\sigma}\varphi=(T_{\max}-\sigma)^{-1}\varphi=f_\sigma,\ \sigma>0; \qquad (7)$$

2) якщо розв'язок $T_{\max,\sigma}$ допускає таке аналітичне продовження f_ζ в область Ω, що $f_\zeta\in D(T_{\max})$ і $(T_{\max}-\zeta)f_\zeta=\varphi$, $\varphi\in\Phi$. Позначимо $T_{\max,\zeta}\varphi=f_\zeta$, тоді

$(T_{\max} - \zeta) T_{\max,\zeta}\varphi = \varphi$, $\varphi \in \Phi$, $\zeta \in \Omega$. (8)

Очевидно, що $T_{\max,\zeta} : \Phi \to \Phi$.

Оператор $T_{\max} - \sigma$, $\sigma > 0$ є зворотним (див.(7)).

Лема 2. Маємо такі властивості оператора $T_{\max,\zeta}$ (див. означення 2):

1)

$$T_{\max,\zeta} T_{\max,z}\varphi = T_{\max,z} T_{\max,\zeta}\varphi, \quad \zeta, z \in \Omega; \tag{9}$$

2) формальна резольвента $T_{\max,\sigma}$ на півосі $(0,\infty)$ стає псевдорезольвентою $T_{\max,\zeta}$, $\zeta \in \Omega$ в лінійному просторі Φ.

Доведення.

1) Нехай $\mu, \nu > 0$, оператори $T_{\max} - \nu$ і $T_{\max} - \mu$ комутують, тому

$$T_{\max,\nu} T_{\max,\mu} = T_{\max,\mu} T_{\max,\nu}, \tag{10}$$

Використовуючи аналітичне продовження і змінюючи позначення, $\nu \to \zeta \in \Omega$, $\mu \to z \in \Omega$, отримуємо (9) з (10).

2) Використовуючи (10), маємо:

$$(\zeta - z) T_{\max,\zeta} T_{\max,z}\varphi = \left[(T_{\max} - z) - (T_{\max} - \zeta)\right] T_{\max,\zeta} T_{\max,z}\varphi =$$

$$= (T_{\max} - z) T_{\max,z} T_{\max,\zeta}\varphi - (T_{\max} - \zeta) T_{\max,\zeta} T_{\max,\zeta}\varphi = T_{\max,\zeta}\varphi - T_{\max,z}\varphi,$$

тому

$$T_{\max,\zeta}\varphi - T_{\max,z}\varphi = (\zeta - z) T_{\max,\zeta} T_{\max,z}\varphi, \quad \zeta, z \in \Omega. \tag{11}$$

Отже, $T_{\max,\zeta}$ є псевдорезольвентою.

Лема 2 доведена.

3. **Функціонал** $c(\varphi)$ **і розгалуження** T_ζ

Поняття, які застосуватимемо до моделі Фрідріхса, розглянемо для випадку, коли область максимального оператора відрізняється розмірністю від області цього оператора на одиницю. Припустимо, що оператор $T_{\max}$ існує і для деякого $e \in H$:

$$D(T_{\max}) = D(T) \dot{+} \{e\}, \qquad e \notin D(T). \tag{12}$$

У цьому випадку означимо функціонал $c(\varphi)$,

Означення *3.* Позначимо через $c(\varphi)$ функціонал на $D(T_{\max})$, що визначає умова

$$\varphi + c(\varphi)e \in D(T), \quad \varphi \in D(T_{\max}). \tag{13}$$

Наприклад, якщо $\varphi \in D(T_{\max})$, то

1) $\varphi \in D(T) \Leftrightarrow c(\varphi) = 0$;

2) $\varphi = e \Rightarrow c(e) = -1$ як $e + c(e)e = (1 + c(e))e \in D(T)$, маємо $1 + c(e) = 0$, якщо $\varphi \in D(T_{\max})$, то $\varphi = \varphi_0 + \alpha e$, $\alpha \in C$, $\varphi_0 \in D(T)$. Застосовуючи функціонал $c(\varphi)$, маємо $c(\varphi) = c(\varphi_0) + \alpha c(e) = -\alpha$, звідки $c(\varphi_0) = 0$) $\alpha = -c(\varphi)$ і

$$\varphi = \varphi_0 - c(\varphi)e \in D(T_{\max}), \ T_{\max}\varphi = T\varphi_0 - c(\varphi)E, \tag{14}$$

де $T_{\max}e = E$ – для деякого заданого елемента $E \in H$. Маючи максимальний оператор $T_{\max}$ і функціонал $c(\varphi)$, можемо подати розгалуження резольвенти T_ζ.

Теорема 1. Нехай $T_{\max} \supset T$ є максимальним оператором згідно з означенням 2. Тоді резольвента оператора T допускає відокремлення розгалуження

$$T_{\zeta}\varphi = \left(\varphi, b_{\bar{\varsigma}}\right)h_{\varsigma} + T_{\max,\zeta}\varphi, \quad \varsigma \in \Omega \setminus [0,\infty), \tag{15}$$

де

$$\left(\varphi, b_{\bar{\varsigma}}\right) = c\left(T_{\max,\zeta}\varphi\right), \tag{16}$$

і елемент

$$h_{\varsigma} = e - T_{\varsigma}\left(T_{\max} - \varsigma\right)e \tag{17}$$

є власним вектором $T_{\max}$:

$$\left(T_{\max} - \varsigma\right)h_{\varsigma} = 0, c\left(h_{\zeta}\right) = -1, \quad \varsigma \in \Omega \setminus [0,\infty). \tag{18}$$

Доведення. З урахуванням (8) $\left(T_{\max} - \varsigma\right)T_{\max,\,\varsigma}\varphi = \varphi$. Оскільки $T_{\max,\,\varsigma}\varphi \in D\left(T_{\max}\right)$, то (див (12)):

$$T_{\max,\,\varsigma}\varphi = \varphi_0 + \alpha e, \quad \varphi_0 \in D(T). \tag{19}$$

Далі $\left(T_{\max} - \varsigma\right)\left(\varphi_0 + \alpha e\right) = \varphi \Rightarrow (T - \varsigma)\varphi_0 + \alpha\left(T_{\max} - \varsigma\right)e = \varphi$, $\varphi_0 + \alpha T_{\varsigma}\left(T_{\max} - \varsigma\right)e = T_{\varsigma}\varphi$. Тут підставимо φ_0 з (19), а тоді

$$\left(T_{\max,\,\varsigma}\varphi - \alpha e\right) + \alpha T_{\varsigma}\left(T_{\max} - \varsigma\right)e = T_{\zeta}\varphi,$$

$$T_{\zeta}\varphi = -\alpha\left(e - T_{\varsigma}\left(T_{\max} - \varsigma\right)e\right) + T_{\max,\zeta}\varphi,$$

$$T_{\varsigma}\varphi = -\alpha h_{\varsigma} + T_{\max,\varsigma}\varphi. \tag{20}$$

Оскільки $c(e) = -1$, то $c\left(h_{\zeta}\right) = -1$ (див (17)). З рівності (20), з урахуванням $c\left(T_{\varsigma}\varphi\right) = 0$ і $c\left(h_{\varsigma}\right) = -1$, маємо $0 = -\alpha \cdot (-1) + c\left(T_{\max,\,\varsigma}\varphi\right)$.

Таким чином, $\alpha = -c\left(T_{\max,\,\varsigma}\varphi\right)$ і (15), (16) доведено як наслідок (20).

Залишається довести (18): $\left(T_{\max} - \varsigma\right)h_{\varsigma} = \left(T_{\max} - \varsigma\right)\left[e - T_{\varsigma}\left(T_{\max} - \varsigma\right)e\right] = \left(T_{\max} - \varsigma\right)e = \left(T_{\max} - \varsigma\right)\big|_{D(T)} T_{\varsigma}\left(T_{\max} - \varsigma\right)e = \left(T_{\max} - \varsigma\right)e - \left(T_{\max} - \varsigma\right)e = 0$. До того ж, $c\left(h_{\varsigma}\right) = -1$ однозначно визначає h_{ς} як власний вектор оператора $T_{\max}$.

Теорема 1 доведена.

Зауваження. Функція Вейля існує, якщо існує оператор $T_{\max}$.

4. **Модель Фрідріхса**

Нехай $H = L^2_{\rho}(0,\infty)$, $\rho(\tau) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\tau}$. Позначимо через $\Phi, \overline{\Phi} = H$, підпростір функцій $\varphi(\tau)$, які допускають аналітичне продовження $\varphi(\zeta)$, $\zeta = \tau + i\mu$ в область Ω (див. означення 1). Позначимо через $S : H \to H$ оператор $S\varphi(\tau) = \tau\varphi(\tau), \tau > 0$ з максимальною областю визначення $D(S)$. Нехай G – деякий гільбертів простір і $V = A^*B$, де $A, B : H \to G$ – обмежені інтегральні оператори. Оператор

$$T = S + V, \quad V = A^*B, \quad D(T) = D(S), \quad R\left(A^*\right), R\left(B^*\right) \subset \Phi \tag{21}$$

називають моделлю Фрідріхса. Отримаємо інше визначення максимального оператора $S_{\max}$ (див. означення 2 та обчислення в (12), (13), де $T=S$). Якщо $S_\zeta=(S-\zeta)^{-1}$, $\zeta\notin[0,\infty]$, то $S_\zeta\psi(\tau)=\dfrac{\psi(\tau)}{\tau-\zeta}=\psi(\zeta)\dfrac{1}{\tau-\zeta}+\dfrac{\psi(\tau)-\psi(\zeta)}{\tau-\zeta}$. Цей розклад збігається з (15), отже,

$$S_{\max,\zeta}\psi(\tau)=\frac{\psi(\tau)-\psi(\zeta)}{\tau-\zeta}. \tag{22}$$

Щоб отримати $S_{\max,}\varphi$, розв'яжемо рівняння $S_{\max,\sigma}\psi(\tau)=\varphi(\tau)$ або

$$\frac{\psi(\tau)-\psi(\sigma)}{\tau-\sigma}=\varphi(\tau). \tag{23}$$

Розв'язок рівняння (23) дає $\psi(\tau)=(S_{\max}-\sigma)\varphi(\tau)=(\tau-\sigma)\varphi(\tau)+\psi(\sigma)$.

Отже, маємо означення $S_{\max},\varphi$, яке відрізняється від (14).

***Означення** 4.* Область визначення

$$D(S_{\max})=\{\varphi\in H:\exists c(\varphi):\tau\varphi(\tau)+c(\varphi)\in H\} \tag{24}$$

і максимальний оператор

$$S_{\max}\varphi(\tau)=\tau\varphi(\tau)+c(\varphi),\qquad \tau>0. \tag{25}$$

Збережемо той самий розклад (12), де $e(\tau)=\dfrac{1}{\tau+1}$:

$$D(S_{\max})=D(S)\dot{+}\left\{\frac{1}{\tau+1}\right\}. \tag{26}$$

Зверніть увагу, що означення $c(\varphi)$ згідно з (20) еквівалентне такому ж згідно з (13). Насправді,

$$\tau\varphi(\tau)+c(\varphi)\in H\Leftrightarrow(\tau+1)\varphi(\tau)+c(\varphi)\in H\Leftrightarrow\varphi(\tau)+\frac{c(\varphi)}{\tau+1}\in D(S)\Leftrightarrow\varphi+c(\varphi)e\in D(S).$$

Оцінимо значення $|c(\varphi)|$: помножимо (25) на $\chi_{[0,1]}$, тоді $\|\ \chi_{[0,1]}\ \|$

$$\cdot|c(\varphi)|\le\|\ \chi_{[0,1]}S_{\max}\varphi(\tau)\ \|+\|\ \chi_{[0,1]}\tau\varphi(\tau)\ \|\le\left(\int_0^1|S_{\max}\varphi(\tau)|^2\rho(\tau)d\tau\right)^{\frac12}+$$

$$\left(\int_0^1|\tau\varphi(\tau)|^2\rho(\tau)d\tau\right)^{\frac12}\le\left(\int_0^\infty|S_{\max}\varphi(\tau)|^2\rho(\tau)d\tau\right)^{\frac12}+\left(\int_0^\infty|\varphi(\tau)|^2\rho(\tau)d\tau\right)^{\frac12}\le\|S_{\max}\varphi\|+\|\varphi\|,$$

тому

$$|c(\varphi)|\le C(\|S_{\max}\varphi\|+\|\varphi\|). \tag{27}$$

Отже, функціонал $c(\varphi)$ неперервний у сенсі норми графіка оператора $S_{\max}$.

Оскільки оператор $S_{\max}$ є розширенням оператора S, то наступну лему використаємо в теоремі 2.

Лема 3. Нехай $S\supseteq S$ і оператор $S_z=(S-z)^{-1}$ обмежений. Нехай $V=A^*B$ і оператор $K(z)=1+BS_zA^*$ має обмежений обернений оператор. Якщо $T=S+A^*B$, то для $T_z=(T-z)^{-1}$ маємо:

$$T_z=S_z-S_zA^*K^{-1}(z)BS_z. \tag{28}$$

Доведення. Рівняння $(T-z)f=g$ або $(S-z)f+A^*Bf=g$ означає, що

$$f+S_zA^*Bf=S_zg. \tag{29}$$

Застосовуючи B, отримаємо $(1+BS_zA^*)Bf=BS_zg$, отже, $Bf=K^{-1}(z)BS_zg$. Підставлення Bf в (29) дає f, тобто (28).

Лема 3 доведена.

Друге рівняння (3) розгалуження (2), (3) можна визначити з рівняння (2), яке написане для спряженого оператора. Дійсно, шляхом формального перетворення маємо:

$$(S_\varsigma 1,\psi)=\overline{(S_{\bar\varsigma}\psi,1)}, \tag{30}$$

Для рівності (30) слід визначити функціонал $(\cdot,1)$ на елементах суми (26).

Означення *5.* Позначимо через $(\cdot,1)$ або “1” функціонал, визначений на $D(S_{\max})=D(S)\dot{+}\left\{\frac{1}{\tau+1}\right\}$, співвідношеннями:

$$(\varphi,1)=\lim_{N\to\infty}(\varphi,1_N),\quad 1_N(x)=\chi_{[0,N]}(x),\quad \varphi\in D(S) \tag{31}$$

і

$$\left(\frac{1}{\tau+1},1\right)=-1. \tag{32}$$

Значення $(\varphi,1)$ функціонала “1” на елементі φ існує на множині елементів φ, щільній в H (наприклад, якщо φ – фінітна функція або швидко спадна $\varphi(\tau)$ при $\tau\to\infty$). Це означає, що функціонал “1” є необмеженим (див. (44)). Якщо $A:H\to H$ є обмеженим оператором і $|(A^*f,1)|\le C\|f\|$, $f\in H$, то визначимо елемент $A\cdot 1$ співвідношенням

$$(f,A1)=(A^*f,1),\quad f\in H. \tag{33}$$

Згідно з (33) значення оператора A на функціонал “1” визначають за умови, що значення $(A^*f,1)$ є обмеженим функціоналом від f, тому, згідно з поданням Рісса, існує елемент $A_1\in H$. Нехай, наприклад, $A=S_\zeta$, то $A^*f=S_{\bar\zeta}f\in D(S)$ і $(S_{\bar\zeta}f,1)=\lim_N(S_{\bar\varsigma}f,1_N)=\lim_N(f,S_\varsigma 1_N)$, де $\|S_\varsigma 1_N\|^2=$ $=\frac{1}{\pi}\int_0^N\frac{1}{|\tau-\varsigma|^2}\sqrt{\tau}d\tau\le\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{|\tau-\varsigma|^2}\sqrt{\tau}d\tau=C^2$. І, нарешті, $|(A^*f,1)|\le C\|f\|$. Наприклад, співвідношення (30) означає, що

$$h_{0,\varsigma}=S_\zeta 1\ \text{або}\ h_{0,\varsigma}(\tau)=\frac{1}{\tau-\varsigma}. \tag{34}$$

5. Оператори $T_{\max,\zeta}$ і $(T^*)_{\max,\zeta}$

Використовуємо лему 3, щоб отримати максимальний оператор для оператора T (див (21)).

Теорема 2. Позначимо $N(\zeta)=1+BS_{\max,\zeta}A^*$ $\left(N_*(\zeta)=1+AS_{\max,\zeta}B^*\right)$ (див (22)). Якщо умови

$$\|BS_{\max,\zeta}A^*\|_G<1,\qquad \|AS_{\max,\zeta}B^*\|_G<1,\qquad \zeta\in\Omega \tag{35}$$

виконуються, то для оператора $T = S + A^*B \left(T^* = S + B^*A \right)$ існує максимальний оператор

$$T_{\max} = S_{\max} + A^*B \qquad \left(\left(T^* \right)_{\max} = S_{\max} + B^*A \right). \tag{36}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $T = S + A^*B$, $\tau > 0$. З урахуванням (35) обернений оператор $N(\sigma)^{-1}$ існує і за лемою 3 існує обернений оператор

$$T_{\max,\sigma} = \left(T_{\max} - \sigma \right)^{-1} = S_{\max,\sigma} - S_{\max,\sigma} A^* N(\sigma)^{-1} B S_{\max,\sigma} \tag{37}$$

і співвідношення (6), (7) справедливі.

Аналітичне продовження (37) дає:

$$T_{\max,\zeta}\varphi = S_{\max,\zeta}\varphi - S_{\max,\zeta} A^* N(\zeta)^{-1} B S_{\max,\zeta}. \tag{38}$$

Аналогічно, $\left(T^* \right)_{\max,\zeta} \varphi = S_{\max,\zeta}\varphi - S_{\max,\zeta} B^* N_* (\zeta)^{-1} A S_{\max,\zeta}\varphi$.

Маємо: $T_\zeta = S_\zeta - S_\zeta \left(A^* K(\zeta)^{-1} B \right) S_\zeta$, $\qquad \left(T_\zeta \right)^* = S_{\bar\zeta} - S_{\bar\zeta} \left(A^* K(\zeta)^{-1} B \right)^* S_{\bar\zeta}$,

$\left(\left(T_\zeta \right)^* f, 1_N \right) = \left(f - \left(A^* K(\zeta)^{-1} B \right)^* S_{\bar\zeta} f, S_\zeta 1_N \right)$.

Так як $\left\| S_\zeta 1_N \right\| \le C$, $\quad N = 1, 2 \ldots$, то $\left| \left(T_\zeta \right)^* f, 1_N \right| \le C_1 \|f\| \cdot \left\| S_\zeta 1_N \right\| \le C_1 C \|f\|$.

Тому, згідно з (33), визначимо елемент $T_\zeta 1$.

Оскільки $R\left(A^* \right) \subset \Phi$, то $T_{\max,\zeta} : \Phi \to \Phi$ і співвідношення (6)–(8) справедливі.

Теорема 2 доведена.

Якщо $T = S + A^*B$ і оператор $K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*$, $\zeta \in [0, \infty)$ оборотний, то (див. 28)):

$$(T - \zeta)^{-1} \varphi = T_\zeta \varphi = S_\zeta \varphi - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} B S_\zeta \varphi, \qquad K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*.$$

Враховуючи рівняння $\left(T_{\max} - \zeta \right) h_\zeta = 0$ і означення 5, отримаємо:

$$(S - \zeta) h_\zeta + V h_\zeta + c\left(h_\zeta \right) = 0, \; (T - \zeta) h_\zeta = -c\left(h_\zeta \right) \cdot 1, \; h_\zeta = -c\left(h_\zeta \right) T_\zeta 1.$$

Беручи до уваги (18), отримаємо $c\left(h_\zeta \right) = -1$, тому $h_\zeta = T_\zeta 1$. Таким чином, розклад (15) резольвенти для операторів T і T^* дає:

$$T_\zeta \varphi = \left(\varphi, b_{\bar\zeta} \right) T_\zeta 1 + T_{\max,\zeta}\varphi, \; \left(T^* \right)_{\bar\zeta} \psi = \left(\psi, a_{\bar\zeta} \right) \left(T^* \right)_{\bar\zeta} 1 + \left(T^* \right)_{\max,\bar\zeta} \psi. \tag{39}$$

Теорема 3. Нехай $T = S + A^*B$ (див (21)), тоді умови (35) достатні для існування функції Вейля $m(\zeta)$ оператора T (див. означення 1). Якщо вони виконуються, то

$$m(\zeta) = \left(T_\zeta 1, 1 \right), \quad \zeta \in \Omega \setminus [0, \infty). \tag{40}$$

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 2 і умовами (35), існують оператори $T_{\max}$ і $\left(T^* \right)_{\max}$. Згідно з означенням 2 (див (7), (8)) визначаємо оператори $T_{\max}$, $\left(T^* \right)_{\max,\zeta}$. Використовуючи теорему 1 і означення 5, отримуємо співвідношення (39), де елемент $h_\zeta = T_\zeta 1$ відокремлює розгалуження $T_\zeta \varphi$. Тоді

$$\left(h_\zeta,\psi\right)=\left(T_\zeta 1,\psi\right)=\left(1,\left(T^*\right)_{\bar\zeta}\psi\right)=\overline{\left(\psi,a_{\bar\zeta}\right)}\left(1,\left(T^*\right)_{\bar\zeta}1\right)+\left(1,\left(T^*\right)_{\max,\bar\zeta}\psi\right). \quad (41)$$

Враховуючи означення 1, маємо співвідношення (40), де $m\left(\zeta\right)=$
$=\left(1,\left(T^*\right)_{\bar\zeta}1\right)=\left(T_\zeta 1,1\right)$.

Теорема 3 доведена.

Зауваження. Функції $\left(R\left(\zeta\right),\psi\right)=\left(1,\left(T^*\right)_{\max,\bar\zeta}\psi\right)$, $\left(a\left(\zeta\right),\psi\right)=\overline{\left(\psi,a_{\bar\zeta}\right)}$, $\psi\in\Phi$ є аналітичними від $\zeta\in\Omega$, і функціонали $a(\sigma)$ і $R(\sigma)$ є власними функціоналами операторів T і $T_{\max}$, що відповідають точці $\sigma>0$.

Співвідношення (41), зокрема,

$$a\left(\zeta\right)\bullet m\left(\zeta\right)+R\left(\zeta\right)=h_\zeta\in H \quad (42)$$

визначає функцію $m\left(\zeta\right)$ однозначно, якщо функціонали $a\left(\zeta\right)$ і $R\left(\zeta\right)$ знайдені однозначно.

6. **Оператор Штурма–Ліувілля на півосі**

Привертаємо увагу до розгалуження резольвенти оператора Штурма–Ліувілля на півосі. Необхідно показати, що відокремлення розгалуження (див. означення 1) є природним способом зменшити в два етапи ту частину, яка несе розгалуження $T_\zeta=\left(T-\zeta\right)^{-1}$.

Тут виникає питання про співвідношення між функціями, аналітичними в Ω і в $\Omega\setminus\left[0,\infty\right)$, де $\left[0,\infty\right)$ – неперервний спектр T.

Почнемо з несамоспряженого оператора L, породженого диференціальним виразом $ly=-y''$, y (0) = 0 у просторі $L^2\left(0,\infty\right)$. Використовуючи унітарний оператор $\mathrm{F}\colon L^2\left(0,\infty\right)\to L^2_\rho\left(0,\infty\right)$, $\rho\left(\tau\right)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\tau}$, $\tau>0$, що заданий співвідношеннями

$$\varphi\left(\tau\right)=Fy\left(\tau\right)=\int_0^\infty y\left(x\right)\frac{\sin x\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}}dx,$$

$$y\left(x\right)=F^{-1}\varphi\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\varphi\left(\tau\right)\sin x\sqrt{\tau}d\tau, \quad (43)$$

діагоналізуємо оператор L, зокрема $FLF^{-1}=S$ (див.[2]).

Лема 4

1) Нехай $D\left(L_{\max}\right)=\left\{y\in L^2\left(0,\infty\right): y'-\text{abs.cont.}, y''\in L^2\left(0,\infty\right)\right\}$, $L_{\max}y=-y''$ і оператор $\varphi\left(\tau\right)=Fy\left(\tau\right)=\int_0^\infty y\left(x\right)\frac{\sin x\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}}dx$ задають формули (24), (25), тоді

$$FL_{\max}F^{-1}=S_{\max}. \quad (44)$$

2) Якщо $\varphi=Fy$, то

$$c\left(\varphi\right)=-y\left(0\right),\ \left(\varphi,1\right)=y'\left(0\right). \quad (45)$$

Доведення. Якщо $y\in D\left(L_{\max}\right)$, то рівність $\int_0^\infty y''\left(x\right)\frac{\sin x\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}}dx=$

$$-y(0)+\tau\int_0^\infty y(x)\frac{\sin x\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}}dx=-y(0)+\tau Fy(\tau),\qquad y,y''\in L^2(0,\infty)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $FL_{\max}y=S_{\max}Fy$, що збігається з (44) і, крім того, $c(\varphi)=-y(0)$.

Похідна за змінною x в (43) дає $y'(0)=(\varphi,1)$. Отже, співвідношення (45) доведені.

Лема 4 доведена.

Примітка. Оскільки $F\left(e^{-x}\right)(\tau)=\frac{1}{1+\tau}$, то $\left(\frac{1}{\tau+1},1\right)=\left(e^{-x}\right)'\big|_{x=0}=-1$. Тому (32) доведено.

Для обчислення $(\varphi,1)$, де $\varphi=Fy$, використовуючи (45), маємо:

$$(\varphi,1)=y'(0)=\left(y(x)\right)'\Big|_{x=0}=\left(F^{-1}\varphi(x)\right)'\Big|_{x=0} \tag{46}$$

Аналогічно $c(\varphi)=-F^{-1}\varphi(x)\big|_{x=0}$, якщо $\varphi\notin D(S)$ (інакше $c(\varphi)=0$).

Розглянемо диференціальне вираз $ly=-y''+q(x)y,\ y(0)=0.$ Позначимо відповідний оператор через $M=L+Q$. Перетворення Фур'є (43) M дає оператор

$$T=FMF^{-1}=F(L+Q)F^{-1}=S+V,\qquad V=FQF^{-1}. \tag{47}$$

Розглянемо диференціальний вираз $ly=-y''+q(x)y,\ y(0)=0.$ Припустимо, що $q(x)$ є комплекснозначною вимірною функцією і

$$|q(x)|<C\exp(-\varepsilon x),\ x>0,\ \varepsilon>0. \tag{48}$$

Нехай $q(x)=\overline{q_1(x)}q_2(x)$, $|q_1(x)=|q_2(x)||$. Позначимо $Qy(x)=q(x)y(x)$, $x>0$, тоді аналогічно $Q=Q_1^*Q_2$. Позначимо $M=L+Q$. Перетворення Фур'є (43) оператора M дає оператор

$$T=FMF^{-1}=F(L+Q)F^{-1}=S+V,$$

$$V=A^*B,\ \ A^*=FQ_1^*,\ \ B=Q_2F^{-1}. \tag{49}$$

Теорема 4 1) Існує таке значення $C_0>0,\varepsilon_0>0$, що, якщо $0<C<C_0$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, то для оператора T (за умови (48)) достатня умова (35) існування функції Вейля $m(\zeta)$ виконується.

2) Функція Вейля $m(\zeta)=(T_\zeta 1,1)$ (див (40)) за самосопряженого оператора T збігається з добре відомою функцією Вейля оператора Штурма–Ліувілля на півосі.

Д о в е д е н н я. 1) Враховуючи (35), позначимо:

$$N(\zeta)c=c+BS_{\max,\zeta}A^*c=c+Q_2F^{-1}S_{\max,\zeta}FQ_1^*c.$$

Маємо $FQ_1^*c(\tau)=\int_0^\infty\overline{q_1(y)}c(y)\frac{\sin y\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}}dy$.

Згідно з (22)

$$S_{\max,\zeta} F Q_1^* c(\tau) = \int_0^\infty q_1(y) c(y) \frac{\dfrac{\sin y\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}} - \dfrac{\sin y\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}}{\tau - \zeta} dy.$$

Оскільки $F^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\tau)\sin x\sqrt{\tau}d\tau$, то

$$Q_2 F^{-1} S_{\max,\zeta} F Q_1^* c(x) = \frac{1}{\pi} q_2(x) \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \overline{q_1(y)} c(y) \frac{\dfrac{\sin y\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}} - \dfrac{\sin y\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}}{\tau - \zeta} dy \right) \sin x\sqrt{\tau} d\tau.$$

Змінюємо порядок інтегрування, тоді

$$Q_2 F^{-1} S_{\max,\zeta} F Q_1^* c(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} q_2(x) \int_0^\infty \overline{q_1(y)} c(y) \left[\int_0^\infty \frac{\dfrac{\sin y\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}} - \dfrac{\sin y\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}}{\tau - \zeta} \sin x\sqrt{\tau} d\tau \right] dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} q_2(x) \int_0^\infty \overline{q_1(y)} c(y) I(y,x) dy, \tag{50}$$

$$I(y,x) = \int_0^\infty \frac{\dfrac{\sin y\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}} - \dfrac{\sin y\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}}{\tau - \zeta} \sin x\sqrt{\tau} d\tau = \int_0^\infty h\left(y, \sqrt{\tau}\right) \sin x\sqrt{\tau} d\tau,$$

$$h\left(y, \sqrt{\tau}\right) = \frac{\dfrac{\sin y\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}} - \dfrac{\sin y\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}}{\tau - \zeta}$$

Далі (після заміни $\sqrt{\tau} = \theta$) маємо:

$$I(y,x) = \int_0^\infty h(y,\theta)\sin x\theta \cdot 2\theta d\theta = 2\int_0^\infty \theta h(y,\theta) d\left(\frac{1-\cos x\theta}{x}\right).$$

Використовуючи формулу $\theta h(y,\theta) = \dfrac{\sin y\theta - \theta\dfrac{\sin y\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}}{\theta^2 - \zeta}$, інтегруємо частинами:

$$I(y,x) = 2\left[\theta h(y,\theta) \cdot \frac{1-\cos x\theta}{x}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1-\cos x\theta}{x} \left(\frac{\sin y\theta - \theta\dfrac{\sin y\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}}{\theta^2 - \zeta} \right)'_\theta d\theta \right] =$$

$$= -2\int_0^\infty \frac{1-\cos x\theta}{x}\left(\frac{\sin y\theta - \theta\dfrac{\sin y\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}}{\theta^2-\zeta}\right)_\theta' d\theta.$$

Тому вираз $I(y,x)$ є обмеженим, $|I(y,x)|<K$ – для усіх y,x.

Згідно з (50) $BS_{\max,\zeta}A^* c(x) = \frac{1}{\pi}q_2(x)\int_0^\infty q_1(y)c(y)I(y,x)dy$, тому $\|BS_{\max,\zeta}A^*\| \le \frac{K}{\pi}\|q_1\|\cdot\|q_2\|$. Очевидно, що існують такі C_0 і ε_0 (див.(48)), що $\|BS_{\max,\zeta}A^*\|<1$ для $C<C_0$, $\varepsilon<\varepsilon_0$. Таким чином, пункт 1) доведено.

2) Враховуючи [2], маємо:

$$M_\zeta f(x) = (M-\zeta)^{-1} f(x) =$$

$$= \frac{e(x,\sqrt{\zeta})}{e(\sqrt{\zeta})}\cdot\int_0^x s(t,\zeta)f(t)dt + s(x,\zeta)\cdot\int_x^\infty \frac{e(t,\sqrt{\zeta})}{e(\sqrt{\zeta})}f(t)dt.$$

У результаті $(M_\zeta)^* g(x) = \overline{s(x,\zeta)}\int_x^\infty \overline{\frac{e(t,\sqrt{\zeta})}{e(\sqrt{\zeta})}}g(t)dt + \overline{\frac{e(x,\sqrt{\zeta})}{e(\sqrt{\zeta})}}\int_0^x s(t,\zeta)g(t)dt.$

Враховуючи (33), одержимо $(\psi,T_\zeta 1) = \left((T_\zeta)^*\psi,1\right) = \left(F(M_\zeta)^* F^{-1}\psi,1\right) = y'(0)$, де $y(x) = \left((M_\zeta)^* g\right)(x)$, $g = F^{-1}\psi$. Просте обчислення дає $y'(0) = \int_0^\infty \overline{\frac{e(t,\sqrt{\zeta})}{e(\sqrt{\zeta})}}g(t)dt$,

тоді $(\psi,T_\zeta 1) = y'(0) = \left(g,\frac{e(t,\sqrt{\zeta})}{\sqrt{\zeta}}\right)_H = \left(F^{-1}\psi,\frac{e(t,\sqrt{\zeta})}{e(\sqrt{\zeta})}\right)_H = \left(\psi,F\frac{e(t,\sqrt{\zeta})}{e(\sqrt{\zeta})}\right)_{L^2_\rho}$.

І, нарешті, $T_\zeta 1 = F\left(\frac{e(t,\sqrt{\zeta})}{e(\sqrt{\zeta})}\right)$ і (згідно з (45)) маємо добре відомий вираз для функції Вейля $m(\zeta)$:

$(T_\zeta 1,1) = (F\left(\frac{e(t,\sqrt{\zeta})}{\sqrt{\zeta}}\right),1) = \left(\frac{e(t,\sqrt{\zeta})}{e(\sqrt{\zeta})}\right)_t^1(0) = \frac{e'(\sqrt{\zeta})}{e(\sqrt{\zeta})}$. Таким чином, співвідношення (40) доведено для оператора Штурма–Ліувілля на півосі. Пункт 2) доведено.

Теорема 4 доведена.

Висновки. Узагальнено поняття функції Вейля (див. (2), (3)) (тобто узагальнено (1)) для несамоспряженої моделі Фрідріхса з використанням так званого розгалуження резольвенти, подано умови існування (див. (35)) та загальний вигляд функції Вейля через резольвенту оператора (див. (40)).

1. *Behrndt M., Langer M., Lotoreichik V.* Boundary triples for Schrodinger operators with singular interactions on hypersurfaces // Nanosystems: physics, chemistry, math. – 2016. – 7, No. 2. – P. 290–302.

2. *Cheremnikh E.* A remark about calculation of the jump of the resolvent in Friedrichs' model // Eastern European J. of Enterprise Technologies. – 2012. – 1/4(55). – P. 37–40.
3. *Diaba F., Zemmouri A., Cheremnykh E. V.* Sturm–Liouville on the line with retarted potential // J. of Advanced Research in Dynamical and Control Systems. – 2014. – 6, No. 3, – P. 53–61.
4. *F. Gesztezy, R. Weikard, M. Zinchenko.* Initial value problems and Weyl–Titchmarsh theory for Schrödinger operators with operator-valued potentials // Oper. Matrices. – 2013. – 7, No. 2. – P. 241–283, https://doi.org/10.7153/oam-07-15.
5. *Gouasmia O., Diaba A., Diaba F., Cheremnikh E.* Time asymptotic behavior of exponential function of Sturm–Liouville operator on the line. // Global J. of Pure and Appl. Math. – 2016. – 12, No. 6. – P. 5233–5243.
6. *Ivasyk H.V., Cheremnikh E.V.* Friedrichs' model for the transport operator // Visnyk of the Nat. University "Lviv Polytechnic". – 2009.– 643. –P. 30–36.
7. *Mamedov Kh. R., Karahan D.* On an inverse spectral problem for Sturm–Liouville operator with discontinuous coefficient // Uphimskiy Math. J. – 2015. – 7, No. 3. – P. 125–137.
8. *Muminov M. I., Rasulov T. H.* On the number of eigenvalues of the family of operator matrices // Nanosystems: physics, chemistry, math. – 2014. – 5, No. 5. – P. 619–625.
9. *Naboko S., Romanov R.* Spectral singularities and asymptotics of contractive semigroups // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2004. – 70. – P. 379–403.

FORMULAE OF WEYL FUNCTION USING RESOLVENT OF THE OPERATOR

The Weyl function for the Friedrichs model is determined by using the so-called branching of the resolvent. The formulae for the Weyl function via resolvent of operator is obtained. Sufficient conditions for the existence of the resolvent are given.

Key words: *spectrum of the transport operator, continuous spectrum, Friedrichs' model, integral operator, Sturm–Liouville operator, Hilbert space, compactness of the operator, Weyl function, spatial argument, vector-valued functions, branching of the resolvent, perturbation of the operator.*

Нац. ун-т "Львівська політехніка", Львів

Одержано
02.12.21