https://doi.org/10.15407/apmm2021.19.8-11

УДК 512.628.2

І. О. Мельник✉

ПРО ПЕРВИННІ, КВАЗІ-ПЕРВИННІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ПЕРВИННІ ІДЕАЛИ DMSP-НАПІВКІЛЕЦЬ

Досліджено взаємозв'язки між первинними, квазі-первинними та диференціально-первинними ідеалами в диференціальних, зокрема $dmsp$-напівкільцях. Встановлено, що якщо кожний диференціально-первинний ідеал напівкільця є первинним, то саме напівкільце є $dmsp$-напівкільцем. Доведено, що будь-який квазі-первинний k-ідеал комутативного диференціального напівкільця є диференціально-первинним. Встановлено необхідну і достатню умову того, що напівкільце є $dmsp$-напівкільцем.

***Ключові слова**: диференціальне напівкільце, диференціювання напівкільця, диференціальний ідеал напівкільця, радикальний диференціальний ідеал, первинний диференціальний ідеал, квазі-первинний ідеал, диференціально-первинний ідеал.*

Поняття диференціювання в напівкільцях вивчав Голан [4], який навів найпростіші приклади та властивості диференціювань напівкілець, диференціальних напівкілець та їх ідеалів. Т'єррен [12] довів, що напівкільце мов над деяким алфавітом утворює диференціальне адитивно ідемпотентне напівкільце. У статтях [3, 10, 11] продовжили досліджувати диференціювання напівкілець та їх диференціальні ідеали. Зокрема, встановили, що множина всіх елементів диференціального напівкільця, які мають обернені щодо додавання, є його диференціальним ідеалом. Диференціально-первинні ідеали в кільцях введено у праці [8], а їх узагальнення для модулів розглянуто в працях [1, 9]. Поняття квазі-первинного ідеалу диференціального кільця ввів і почав досліджувати Кейгер [6, 7]. Квазі-первинні підмодулі диференціального модуля вивчали в працях [1, 9], а квазі-первинні ідеали комутативних напівкілець – у [10, 11]. Первинні піднапівмодулі напівмодулів над напівкільцем розглядалися раніше [2]. Ці дослідження мотивують подальше вивчення властивостей різних ідеалів напівкілець з диференціюваннями, взаємозв'язків між ними. Мета цієї статті – встановити деякі взаємозв'язки між напівкільцевими диференціальними аналогами первинних ідеалів напівкілець з диференціюваннями.

Нагадаємо деякі означення та властивості, які використовуватимемо. Більше інформації можна знайти у працях [4, 5].

Напівкільце R – це непорожня множина R, на якій задано дві бінарні алгебричні операції, які називають додаванням (позначають через $+$) і множенням (позначають $\cdot$), причому $(R,+,0)$ є комутативним моноїдом, $(R,\cdot)$ є напівгрупою і $(a+b)c = ac+bc$ та $a(b+c) = ab+ac$ для всіх $a,b,c \in R$. Якщо в напівкільці R умова $ab = ba$ виконується для всіх $a,b \in R$, то R називають *комутативним напівкільцем*.

Нуль $0 \in R$ називають *поглинальним*, якщо $r \cdot 0 = 0 \cdot r = 0$ для всіх $r \in R$. Елемент $1 \in R$, який задовольняє умову $1 \cdot r = r \cdot 1 = r$ для всіх $r \in R$, називають *одиницею напівкільця*.

Напівкільце, яке не є кільцем, називають *власним напівкільцем*. Непорожню підмножину S напівкільця R називають *піднапівкільцем*, якщо $a+b \in S$ і $ab \in S$ для всіх $a,b \in S$. Непорожню підмножину I напівкільця R називають *ідеалом*, якщо $a+b \in I$ і $ra \in I$ для всіх $a,b \in I$, $r \in R$. Ідеал I напівкільця R називають *k-ідеалом*, якщо з $a+b \in I$ та $a \in I$ ви-

✉ ivannamelnyk@yahoo.com

пливає, що $b \in I$.

Відображення $\delta : R \to R$ називають *диференціюванням напівкільця* R [4], якщо $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$ і $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ для будь-яких $a,b \in R$. *Диференціальним напівкільцем*, або δ*-напівкільцем*, називають напівкільце разом зі заданим на ньому диференціюванням, тобто пару (R,δ), де R – напівкільце, а $\delta : R \to R$ – диференціювання. Ідеал I диференціального напівкільця (R,δ) називають *диференціальним*, якщо $\delta(a) \in I$ для будь-якого $a \in I$. Зокрема, мультиплікативно ідемпотентні ідеали та множини всіх адитивно оборотних $V(R)$ і адитивно ідемпотентних елементів $I^+(R)$ напівкільця R є його диференціальними ідеалами. Множина $\{a \in R \mid \exists b \in I \;\; a+b \in I\}$ є диференціальним k-ідеалом, де I – диференціальний ідеал R.

Розглядатимемо тільки комутативні диференціальні напівкільця з $1 \neq 0$, в яких нуль є поглинальним. Диференціювання позначатимемо через δ, а через $\mathbb{N}_0$ – множину $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Нехай $r \in R$. Використовуємо такі позначення: $r^{(0)} = r$, $r' = \delta(r)$, $r'' = \delta(r')$, ... $r^{(n)} = \delta\left(r^{(n-1)}\right)$, де $n \in \mathbb{N}_0$. Множину $A_{\#} = \left\{a \in R \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^{(n)} \in A\right\}$ називають *диференціалом* множини A. Через $|A|$ та $\langle A \rangle$ позначають найменші диференціальний та радикальний диференціальний k-ідеали, які містять множину A.

Власний ідеал P напівкільця R називають *первинним*, якщо з $ab \in P$ випливає, що $a \in P$ або $b \in P$ [2]. Максимальний серед диференціальних ідеалів, які не перетинаються з деякою мультиплікативно замкненою підмножиною напівкільця R, називають *квазі-первинним* [11]. Кожний первинний диференціальний ідеал є квазі-первинним. Для первинного ідеалу P напівкільця R множина $P_{\#}$ є квазі-первинним ідеалом.

Радикалом ідеалу I напівкільця R називають множину $\sqrt{I} = \left\{r \in R \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N} : r^n \in I\right\}$. Ідеал I називають *радикальним*, якщо $I = \sqrt{I}$. Загалом неправильно, що радикал кожного диференціального ідеалу є диференціальним ідеалом. Зокрема, радикал диференціального ідеалу $(x^2, 2)$ диференціального напівкільця $\mathbb{N}_0[x]$ не є диференціальним.

Диференціальне напівкільце R називають *dmsp-напівкільцем*, якщо радикал кожного диференціального k-ідеалу є диференціальним ідеалом. У dmsp-напівкільці максимальний диференціальний k-ідеал є первинним. Відомо, що кожне диференціальне напівполе, нульове та диференціально тривіальне напівкільце є dmsp-напівкільцем. Кільця Кейгера та диференціальні напівкільця, які містять $\mathbb{Q}_+$, є dmsp-напівкільцями [10].

Теорема 1 [10]. *Такі умови еквівалентні:*

1. *R є dmsp-напівкільцем.*
2. *Якщо S – мультиплікативно замкнена підмножина в R, I – диференціальний k-ідеал R, який не перетинається з нею, то кожний диференціальний k-ідеал напівкільця R, максимальний серед тих, які містять I і не перетинаються з S, є первинним.*
3. *Якщо P – первинний k-ідеал R, то $P_{\#}$ є диференціально первинним k-ідеалом в R.*
4. *Якщо A – довільна підмножина в R, то $\langle A \rangle = \sqrt{|A|}$.*
5. *Якщо I – квазі-первинний k-ідеал в R, то I є первинним.*

6. *Якщо I – квазі-первинний k-ідеал в R, то I є радикальним.*

Диференціальний k-ідеал P диференціального напівкільця R називають *диференціально-первинним*, якщо для будь-яких $a,b \in R$, $k \in \mathbb{N}_0$ з $ab^{(k)} \in P$ випливає, що $a \in P$ або $b \in P$. Диференціальний ідеал P диференціального напівкільця R є диференціально-первинним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких k-ідеалів I та J в R з $IJ \subseteq P$ випливає, що $I \subseteq P$ або $J \subseteq P$. У диференціальному напівкільці, яке містить $\mathbb{Q}_+$, первинні диференціальні k-ідеали є диференціально-первинними.

Теорема 2. *Будь-який квазі-первинний k-ідеал є диференціально-первинним.*

Доведення. Нехай Q – квазі-первинний k-ідеал напівкільця R, нехай S – така мультиплікативно замкнена підмножина в R, що Q є максимальним серед диференціальних ідеалів, для яких $Q \bigcap S = \varnothing$. Доведемо, що Q є диференціально-первинним.

Припустимо, від супротивного, що існують k-ідеали I та J в R, що задовольняють такі умови: $IJ \subseteq Q$, $I \not\subset Q$, $J \not\subset Q$. Елементи $a \in I \setminus Q$ та $b \in J \setminus Q$ визначають диференціальні ідеали $Q + [a]$ та $Q + [b]$ напівкільця R відповідно. Очевидно, що $Q \subset Q + [a]$, $Q \subset Q + [b]$. З умови максимальності для Q отримуємо, що $(Q + [a]) \bigcap S = \varnothing$ і $(Q + [b]) \bigcap S = \varnothing$. Таким чином, існують такі $s_1, s_2 \in S$, що $s_1 \in Q + [a]$, $s_2 \in Q + [b]$. Тоді $s_1 s_2 \in (Q + [a])(Q + [b]) \subseteq Q + IJ \subseteq Q$. Отримуємо, що $s_1 s_2 \in Q \bigcap S$. Це суперечить припущенню.

Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай R – диференціальне напівкільце. Якщо кожний диференціально-первинний k-ідеал R є первинним, то R є $dmsp$-напівкільцем.*

Доведення. Нехай Q – квазі-первинний k-ідеал R. За теоремою 2 Q є диференціально-первинним. Отже, Q є первинним ідеалом. Таким чином, за теоремою 1, R є $dmsp$-напівкільцем, що і треба довести.

Теорема 3. *Диференціальне напівкільце R є $dmsp$-напівкільцем тоді і тільки тоді, коли кожний радикальний k-ідеал є диференціальним.*

Доведення. *Необхідність*. Нехай R є $dmsp$-напівкільцем, і I – довільний радикальний k-ідеал в R. Візьмемо довільний елемент $a \in R$. Ідеал (a^n) є диференціальним і за теоремою 1 його радикал $\sqrt{(a^n)} = \sqrt{(a)}$ також є диференціальним k-ідеалом. Якщо $a \in I$, то $\sqrt{(a)} \subseteq I$. Таким чином, з $a \in \sqrt{(a)}$ і диференціальності $\sqrt{(a)}$ отримуємо, що $\delta(a) \in I$. Отже, k-ідеал I є диференціальним.

Достатність. Випливає з теореми 1 і означення радикального ідеалу.

Теорему доведено.

1. *Мельник І. О.* Sdm-системи, диференціально-первинні та диференціально-примарні модулі // Наук. вісник Ужгородськ. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2008. – Вип. 16. – С. 110–118.
2. *Atani R. E., Atani S. E.* On subsemimodules of semimodules // Bul. Acad. Stiinte Repub. Moldova. Matematica. – 2010. – 63, No. 2. – P. 20–30.
3. *Chandramouleeswaran M., Thiruveni V.* On derivations of semirings // Adv. in Algebra. – 2010. – 1. – P. 123–131.
4. *Golan J. S.* Semirings and their Applications. – Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 382 p.
5. *Hebisch U., Weinert H. J.* Semirings: Algebraic Theory and Applications in

Computer Science. – Singapore: World Scientific, 1998. – 362 p.

6. *Keigher W.* Prime differential ideals in differential rings // Contributions to Algebra: A Collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin. – New York: Academic Press, 1977. – P. 239–249.
7. *Keigher W. F.* Quasi-prime ideals in differential rings Houston // J. Math. – 1978. – 3, No. 4. – P. 379–388.
8. *Khadjiev Dj., Callialp F.* On a differential analog of the prime-radical and properties of the lattice of the radical differential ideals in associative differential rings // Turkish J. Math. – 1996. – 20, No. 4. – P. 571–582.
9. *Melnyk I.* Differentially prime, quasi-prime and Δ-*MP*–modules // Bul. Acad. Stiinte Repub. Moldova. Matematica. – 2008. – 58, No. 3. – P. 112–115.
10. *Melnyk I.* On the radical of a differential semiring ideal // Visnyk of the Lviv. Univ. Series Mech. Math. – 2016. – No. 82. – P. 163–173.
11. *Melnyk I.* On quasi-prime differential semiring ideals // Nauk. visnyk Uzhgorod. Univ. Ser. Math. and informat. – 2020. – 2, No. 37. – P. 63--69.
12. *Thierrin G.* Insertion of languages and differential semirings // Where Mathematics, Computer Science, Linguistics and Biology Meet. – Dordrecht; Boston: Kluwer Academic, 2001. – P. 287–296.

ON PRIME, QUASI-PRIME AND DIFFERENTIALLY PRIME IDEALS OF DMSP-SEMIRINGS

Interrelations between prime. quasi-prime and differentially prime ideals of differential, in particular dmsp-semirings, are investigated. It is established that if any differentially prime ideal of the semiring is prime, then the semiring itself is a dmsp-semiring. It is proven that any quasi-prime k-ideal of the commutative differential semiring is differentially prime. The necessary and sufficient condition for the semiring to be a dmsp-semiring is established.

Key words: differential semiring, semiring derivation, differential semiring ideal, radical differential ideal, prime differential ideal, quasi-prime ideal, differentially prime ideal.

Львів. нац. ун-т
ім. Івана Франка, Львів

Одержано
01.10.21