https://doi.org/10.15407/apmm2021.19.72-78

УДК 512.553.2

М. О. Малоїд-Глєбова✉

ПРО ВТОРИННИЙ СПЕКТР МОДУЛІВ

Розглянуто вторинні модулі над асоціативними кільцями та наведено основні їх властивості. Також встановлено взаємозв'язки вторинних модулів із іншими типами: нетеровими, ін'єктивними, плоскими та подільними.

***Ключові слова**: вторинні, мультиплікаційні та ін'єктивні модулі.*

Вступ. Спектри кілець та модулів перебувають у полі зору багатьох математиків, оскільки дають можливість скористатися засобами геометричної інтуїції для дослідження абстрактних кілець та модулів. В останні десятиліття з'явилося багато узагальнень поняття первинного ідеалу як для некомутативних кілець, так і для модулів. Спочатку згадаємо історію розвитку поняття первинного модуля. Першу згадку про такі модулі можна знайти в статті Р. Джонсона [15], незалежно з ним первинні модулі ввів та досліджував В. Андрунакієвич [4]. Деякі модифікації поняття первинного модуля чи підмодуля можна знайти у працях Е. Феллера та Е. Своковскі [14], Г. Каракаса [16], С. Пейджа [21], Р. Вісбауера [23] та Й. Даунса [13]. Сьогоденний потік публікацій, де розглядають ті чи інші поняття первинного модуля чи первинного підмодуля, стрімко зростає. Це свідчить про важливість цих понять та підтверджує інтенсивність пошуку найвдалішого з них, котре дало б можливість сформулювати та довести аналоги найважливіших фактів класичної алгебричної геометрії.

Дослідження первинних модулів та підмодулів природно призвело до виникнення похідних понять цих алгебричних структур, таких, зокрема, як модулі та підмодулі. У 2001 р. Ясеммі в статті [24] ввів поняття вторинного підмодуля, як дуальне до первинного. Пізніше, у 2008 р., його узагальнив Аннін у статті [5] для модулів над довільними асоціативними кільцями, де вторинні модулі називав "ко-первинними модулями". Більше інформації про вторинні модулі та підмодулі можна знайти у працях [6, 7, 11, 12, 24].

1. **Термінологія та попередні відомості**. Нехай R – асоціативне кільце з одиницею і нехай M – лівий R-модуль. Той факт, що N є підмодулем M, позначатимемо $N \le M$.

Розглянемо різні підходи до визначення понять "вторинний модуль" та "вторинний підмодуль".

***Означення** 1*. Лівий R-модуль M називають вторинним, якщо $M \neq 0$ і ${}_R Ann(M) = {}_R Ann(M / N)$ для кожного власного підмодуля $N \le M$.

Це означення подав Ясеммі [24] для комутативного випадку. Узагальнення для модулів над довільними асоціативними кільцями подав Аннін [5], проте такі модулі називав "ко-первинними", а також навів і означення вторинного підмодуля:

***Означення** 2*. Підмодуль N лівого R-модуля M називають вторинним підмодулем, якщо він сам по собі є вторинним модулем.

Інше означення вторинного підмодуля можна подати так.

***Означення** 3*. Ненульовий підмодуль N лівого R-модуля M називають вторинним, якщо N та усі його ненульові гомоморфні образи мають той самий анулятор у кільці R.

Це означення взято зі статті Цекена [10], який досліджував загальні властивості вторинних підмодулів та їх взаємозв'язки із первинними. Очевидно, що, систематично вивчаючи вторинні модулі та підмодулі, автори

✉ martamaloid@gmail.com

знаходили нові підходи до означення об'єктів. До прикладу, Ансарі–Торохі та Фаршадіфар у статті [6] ввели такі означення.

***Означення** 4*. Ненульовий підмодуль N лівого R-модуля M називають вторинним, якщо для кожного $a \in R$, гомоморфізм $N \xrightarrow{a} N$, котрий діє як $n \mapsto an$, є або сюр'єктивним, або нільпотентним.

Відповідно:

***Означення** 5*. Лівий R-модуль M називають вторинним, якщо він є вторинним підмодулем сам у собі.

***Означення** 6*. Підмодуль N лівого R-модуля M називають вторинним, якщо ${}_R Ann(M) = W(M/N)$, $W(M/N) = \{a \in R \mid$ ендоморфізм на M/N, котрий діє як $k \mapsto ak$, не є сюр'єктивним, де $k \in M/N\}$.

Це означення узяте зі статті Абухілаіла [2].

Прикладами вторинних модулів та підмодулів можуть бути прості модулі, раціональні числа як модуль над кільцем цілих чисел є простим модулем, кожен векторний простір M над полем R є вторинним R-модулем.

2. **Властивості вторинних модулів та підмодулів**

Твердження 1. Нехай M – мультиплікаційний модуль над асоціативним кільцем R і нехай S − мультиплікативно замкнена підмножина кільця R. Якщо всі елементи S діють бієктивно на M, то M є вторинним R-модулем тоді і лише тоді, коли $S^{-1}M$ є вторинним $S^{-1}R$-модулем.

Доведення. Найперше покажемо, що ${}_{S^{-1}R} Ann(S^{-1}M) = S^{-1}({}_R Ann(M))$. Очевидно, що $S^{-1}({}_R Ann(M)) \subseteq {}_{S^{-1}R} Ann(S^{-1}M)$. Нехай $r/s \in {}_{S^{-1}R} Ann(S^{-1}M)$, де $r \in R$, $s \in S$. Тоді $\frac{m}{1}\frac{r}{s} = 0$ для кожного $m \in M$ і тому $mrt = 0$ для деякого елемента $t \in S$. За нашою гіпотезою, введеною на S, отримаємо, що $mr = 0$. А це означає, що $r \in {}_R Ann(M)$, тому $r/s \in S^{-1}({}_R Ann(M))$. □

Твердження 2. Нехай M – вторинний модуль над асоціативним кільцем R і нехай S − мультиплікативно замкнена підмножина кільця R. Тоді M_S є вторинним R_S-модулем.

Доведення очевидно випливає із попереднього твердження.

Наслідок 1. Нехай M – скінченно-породжений R-модуль і нехай S – мультиплікативно замкнена підмножина кільця R. Якщо M є вторинним R-модулем, то M_S є P_S-вторинним R_S-модулем.

Доведення. Оскільки M є P-вторинним модулем, то M є вторинним і ${}_R Ann(M) = P$. Тому, за твердженням 2, M_S є вторинним R_S-модулем. Тепер нехай ${}_R Ann(M) = (0:M) = P$, тобто $(0:M)_S = P_S$, і за працею [22], $(0_S : M_S) = P_S$. Отже, ${}_{R_S} Ann(M_S) = P_S$. Тому M_S є P_S-вторинним R_S-модулем. □

Теорема 1. Нехай M – лівий вторинний R-модуль, N − ненульовий класично-первинний R-підмодуль M. Тоді N є вторинним підмодулем.

Доведення. Нехай $r \in R$. За означенням вторинності: $r^n M = 0$ для деякого елемента $n \in N$, а отже, $r^n N \subseteq r^n 0$, тому r є нільпотентним елементом в N. Припустимо, що r ділить N. Нехай $n \in N$. Тому $n = rRm$ для деякого елемента $m \in M$. Можемо припустити, що $0 \neq rRm$. Отже, $0 \neq rRm \in N$, звідки за класичною первинністю N отримуємо той факт, що $m \in M$. Тому $rN = N$, що і слід було довести. □

Теорема 2. Нехай M – лівий R-модуль над асоціативним кільцем. Такі твердження еквівалентні:

1. M − вторинний R-модуль.

2. ${}_R Ann(M) = {}_R Ann(M / N)$ для кожного власного інваріантного підмодуля N модуля М.

Д о в е д е н н я. (1) ⇒ (2) є очевидним за означенням вторинного модуля.

(2) ⇒ (1). Щоб довести, що M є вторинним R-модулем, припустимо, що ${}_R Ann(M / N) \subsetneq {}_R Ann(M)$ для деякого власного підмодуля $N \le M$. Нехай $I = {}_R Ann(M / N)$. Тоді $I \subsetneq {}_R Ann(M)$ та $IM \subseteq N$. Проте IM є інваріантним підмодулем, оскільки для довільного $f \in End(M)$, $f(IM) = If(M) \subseteq IM$. Отже, $I \subseteq_R Ann(M / IM) =_R Ann(M)$. А це протиріччя. □

Твердження 3.

1. Довільний простий модуль є мультиплікаційним.

2. Якщо M є мультиплікаційним вторинним R-модулем, то M є простим модулем.

Д о в е д е н н я. Нехай M є вторинним R-модулем, тобто ${}_R Ann(M) = (N : M)$ для кожного власного підмодуля N з M. А отже, $({}_R Ann(M)) \cdot M = (N : M) \cdot M$. Тому $(0) = (N : M) \cdot M$. Проте модуль M є мультиплікаційним, тому $(N : M) \cdot M = N$, а отже, $N = (0)$. Звідси випливає, що M є простим R-модулем. □

Твердження 4. Нехай M – мультиплікаційний R-модуль. Розглянемо такі твердження:

1. M є вторинним R-модулем.
2. ${}_R Ann(M) = (x : M)$ для кожного такого елемента $x \in M$, що (x) є власним підмодулем модуля M.
3. Для кожного ідеалу I кільця R і для кожного елемента $x \in M$, з того, що (x) є таким власним підмодулем модуля M, що $I \cdot M / (x) = (x)$, випливає, що $I = (0)$ або $IM = (0)$.

Тоді (1) ⇒ (2) ⇔ (3).

Д о в е д е н н я. (1) ⇒ (2) є очевидним за означенням вторинного модуля.

(2) ⇒ (3) Нехай $I \cdot M / (x) = (x)$ і припустимо, що $I \ne 0$. Тоді $IM \subseteq (x)$, тобто $I \subseteq (x : M)$ і тому $I \subseteq_R Ann(M)$. А отже, $IM = (0)$.

(3) ⇒ (2) Нехай $r \in (x : M)$, де $x \in M$ та (x) є власним підмодулем модуля M. Тоді $r \in {}_R Ann(M) / (x)$, тобто $(r) \cdot M / (x) = 0$. А отже, або $r = 0$, або $(r)M = (0)$. Звідси випливає, що $r \in {}_R Ann(M)$. □

Твердження 5. Нехай M – скінченно-породжений мультиплікаційний модуль над асоціативним кільцем R. M є вторинним R-модулем тоді і лише тоді, коли ${}_R Ann(M) = (P : M)$ для кожного первинного підмодуля P модуля M.

Д о в е д е н н я. (⇒) Очевидне за доведеними вище властивостями вторинних модулів.

(⇐) Нехай N – власний підмодуль модуля M. Оскільки M є скінченно-породженим мультиплікаційним R-модулем, то за працею [17] існує такий максимальний підмодуль P модуля M, що $N \subseteq P \ne M$. Окрім того, такий максимальний підмодуль P є ще й первинним. Отже, $(N : M) \subseteq (P : M)$. Проте, за припущенням $(P : M) = Ann(M)$, тобто $(N : M) \subseteq_R Ann(M)$. А отже, ${}_R Ann(M) = (N : M)$. □

Наслідок 2. Нехай M – R-модуль і нехай I – такий ідеал кільця R, що $I \subseteq_R Ann(M)$. Тоді M є вторинним R-модулем тоді і лише тоді, коли M є вторинним R / I-модулем.

Означення *7*. Модуль M називають P-вторинним, якщо M є вторинним модулем і ${}_R Ann(M) = P$ для деякого первинного підмодуля P модуля M.

Твердження 6. Нехай N – такий ненульовий власний підмодуль R-модуля M, що $rM \cap N = rN$ для кожного елемента $r \in R$. M є P-вторинним R-модулем тоді і лише тоді, коли N та M / N є P-вторинними R-модулями.

Доведення. За означенням, якщо M є P-вторинним R-модулем, то M є вторинним модулем і ${}_RAnn(M) = P$ для деякого первинного підмодуля модуля M. Отже, за наслідком 14 [3], модуль M / N є вторинним. Оскільки $P = {}_RAnn(M) = {}_RAnn(M / N)$, то M / N теж є P-вторинним модулем. Доведемо, що N є P-вторинним модулем. Оскільки модуль M є вторинним модулем, то за означенням вторинного модуля, для довільного елемента $r \in R$, $r \neq 0$ або $rM = 0$, або $rM = M$. Якщо $rM = M$, то $rM \cap N = N$. Проте, оскільки за даними теореми $rM \cap N = rN$, то $rM = 0$. Якщо $rM = M$, то $rM \cap N = N$. Проте, за даними теореми, $rM \cap N = rN$, тому $rN = N$, тобто N є вторинним модулем.

Тепер доведемо, що N є P-вторинним модулем, тобто покажемо, що $N = P = {}_RAnn(M)$. Очевидно, що ${}_RAnn(M) \subseteq {}_RAnn(N)$. Нехай $r \in_R Ann(N)$, тобто $rN = 0$. Якщо $rM = 0$, то все доведено, а якщо $rM = M$, то $rM \cap N = N$. Але $rM \cap N = rN$ (за даними теореми). Отже, $rN = N$, а за доведеним вище, $N = (0)$ – суперечність. Навпаки, якщо N і M / N є P-вторинними модулями, тоді $P = {}_RAnn(N)$ і $P = {}_RAnn(M / N)$. Іншими словами, $rN = N$ і $r \cdot M / N = M / N$ для кожного елемента $r \notin P$ (це за тим фактом, що якщо і N і M / N є P-вторинними, то вони найперше є вторинними модулями). Доведемо, що M є P-вторинним модулем. Очевидно, ${}_RAnn(M) \subseteq_R Ann(N) =_R Ann(M / N) = P$. Нехай $r \in P$, тому $rN = 0$ і $rM \subseteq N$. Отже, $rN \cap N = rM$, але $rM \cap N = rN$. Тому $rM = rN = 0$. Отже, $r \in {}_RAnn(M)$, а тому $P = {}_RAnn(M)$ (що і треба було довести). Нехай $r \notin P = {}_RAnn(M)$ і нехай $m \in M$. Тоді $m + N \in M / N = r \cdot M / N$. А отже, $m + N = r(m' + N)$ для деякого $m' \in M$. Звідси $m - rm' \in N = rN$, тому $m - rm' = rn$ для деякого елемента $n \in N$ і тому $m = r(m' + n) \in rM$. Звідси випливає, що $M = rM$ для кожного $r \in P$, тому M є P-вторинним модулем. □

Наслідок 3. Нехай M – модуль над регулярним (за Нейманом) кільцем R і нехай N – його підмодуль. Модуль M є P-вторинними тоді і лише тоді, коли і N і M / N є P-вторинними R-модулями.

Доведення. Оскільки R – регулярне за Нейманом кільце, то для кожного елемента $r \in R$, $rM \cap N = rN$. Потрібний результат випливає із попереднього твердження. □

Твердження 7. Нехай N – такий скінченно-породжений підмодуль R-модуля M, що ${}_RAnn(N) = {}_RAnn(M)$. Якщо N є вторинним R-модулем, то M теж є вторинним R-модулем.

Доведення. Нехай $r \in R$ і $r \notin_R Ann(M)$. Оскільки N є вторинним модулем і ${}_RAnn(M) = {}_RAnn(N)$, то $rN = N$. Проте N є скінченно-породженим підмодулем, то за працею [19] існує такий елемент $r' \in R$, що $(1 - rr')N = 0$. Отже, $(1 - rr')M = 0$, а тому $M = rM$. Звідси випливає, що M є вторинним модулем. □

Твердження 8. Нехай N – скінченно-породжений підмодуль модуля M і ${}_RAnn(M)$ є первинним ідеалом кільця R. Якщо N є вторинним модулем, то ${}_RAnn(M) = (N : M)_R$.

Доведення. Нехай $r \in (N : M)_R$, тоді $rM \subseteq N$ (за означенням). Очевидно, що або $r \in {}_RAnn(N)$, або $r \notin {}_RAnn(N)$. Якщо $r \in {}_RAnn(N)$, то $rN = 0$ і тому $r^2M \subseteq rN = 0$, тобто $r^2 \in {}_RAnn(M)$. Оскільки ${}_RAnn(M)$ є первинним ідеалом, то $r \in {}_R Ann(M)$. Якщо $r \notin {}_R Ann(N)$, то $rN = N$ (за означенням, оскільки N є вторинним R-модулем). З іншого боку, оскільки N є скінченно-породженим, то існує такий елемент $r' \in R$, що $(1 - rr')N = 0$ (за [19]). З цього випливає, що $r(1 - rr')M \subseteq (1 - rr')N = 0$. Отже, $r(1 - rr')M = 0$ і тому $r(1 - rr') \in_R Ann(M)$, з чого випливає, що або $r \in {}_R Ann(M)$, або $(1 - rr') \in_R Ann(M)$. Якщо $(1 - rr') \in_R Ann(M)$, то $M = rM \subseteq N$, що є протиріччям. Отже, $r \in {}_R Ann(M)$ і тому $(N : M)_R = {}_R Ann(M)$. □

Наслідок 4. Нехай M – такий нетерів R-модуль, що ${}_R Ann(M)$ є первинним ідеалом кільця R. Якщо кожен підмодуль модуля M є вторинним R-модулем, то і M є вторинним R-модулем.

Означення *8*. Модуль M над кільцем R називають подільним, якщо для кожного елемента $r \in R$, що не є дільником нуля, кожен елемент можна "поділити" на r, тобто для кожного елемента $m \in M$ існує такий елемент $m' \in M$, що $m = rm'$.

Твердження 9. Нехай M − модуль над асоціативним кільцем R. Тоді такі твердження еквівалентні:

1. M є вторинним R-модулем.
2. M є подільним $R / {}_R Ann(M)$-модулем.
3. $rM = M$ для кожного елемента $r \in R \setminus {}_R Ann(M)$.
4. $IM = M$ для кожного ідеалу $I \not\subset_R Ann(M)$.

Доведення цього твердження очевидно випливає із означення подільного модуля та із тверджень 6 і 8.

Наслідок 5. Нехай N – власний підмодуль R-модуля M. Якщо N є вторинним підмодулем модуля M, то ${}_R Ann(M / N)$ є первинним ідеалом.

Наслідок 6. Нехай M – модуль без скруту над областю цілісності R. Тоді такі твердження еквівалентні:

1. M є вторинним R-модулем.
2. M є подільним R-модулем.
3. M є ін'єктивним R-модулем.

Доведення випливає з твердження 9 та наслідку 5.

Наслідок 7. Нехай M – ін'єктивний модуль над областю цілісності R. Тоді M є вторинним модулем.

Теорема 3. Нехай M – первинний R-модуль. Такі твердження еквівалентні:

1. M – вторинний R-модуль.
2. M – ін'єктивний $R / {}_R Ann(M)$-модуль.

Доведення. Оскільки M є первинним R-модулем, то за працею [9], ${}_R Ann(M)$ є первинним ідеалом, тому $\bar{R} = R / {}_R Ann(M)$ є областю цілісності і M є модулем без скруту над кільцем $\bar{R}$ ([20], [1]).

(1) ⇒ (2). Оскільки модуль M є вторинним R-модулем, то за наслідком 2, M є вторинним $\bar{R}$-модулем. Отже, за твердженням 9, M є ін'єктивним $\bar{R}$-модулем.

(2) ⇒ (1). Якщо модуль M є ін'єктивним $\bar{R}$-модулем, то за наслідком 7, M є вторинним $\bar{R}$-модулем. Тоді, за наслідком 2, M є вторинним R-модулем. □

Теорема 4. Нехай M – вторинний R-модуль. Такі твердження еквівалентні:

1. M є певинним R-модулем.
2. M є плоским $\bar{R}$-модулем, де $\bar{R} = R / {}_R Ann(M)$.

Доведення. Оскільки M є вторинним R-модулем, то $\bar{R} = R / {}_R Ann(M)$ є областю цілісності. Тому, за твердженням 9, M є подільним $\bar{R}$-модулем.

(1) ⇒ (2) Оскільки M є первинним R-модулем, то M є $\bar{R}$-модулем без

скруту, де $\bar{R} = R / {}_R Ann(M)$. Тепер покажемо, що M є векторним простором над фактор-полем $\bar{R}$. Нехай $\frac{r + {}_R Ann(M)}{s + {}_R Ann(M)} \in \bar{R}$, де $r, s \in R$, $s \notin {}_R Ann(M)$. Нехай $m \in M$, $m = (s + {}_R Ann(M))m'$ для деякого $m' \in M$. Оскільки M є подільним $\bar{R}$-модулем, то $\frac{r + {}_R Ann(M)}{s + {}_R Ann(M)} \cdot m = (r + {}_R Ann(M))m' = rm' \in M$. Тому M є векторним простором над полем $\bar{R}$ і, відповідно, має базу. З цього випливає, що модуль M є вільним $\bar{R}$-модулем, а отже, за працею [19], M є плоским $\bar{R}$-модулем. Тому за [18] $\bar{R}$ є плоским $\bar{R}$-модулем. Звідси, за працею [8], модуль M є плоским $\bar{R}$-модулем.

(2) $\Rightarrow$ (1). Оскільки $\bar{R}$ є областю цілісності, то $(\bar{0})$ є первинним ідеалом кільця $\bar{R}$. Тому $(\bar{0})M = (0)$ є первинним $\bar{R}$-підмодулем модуля M. Отже, (0) є первинним $\bar{R}$-підмодулем. Тоді легко перевірити, що (0) є первинним R-підмодулем M, а тому є первинним R-модулем. □

1. *Abbdule-Razak H. M.* Quasi-Prime Modules and Quasi Prime Submodules. – Univ. of Baghdad, M.D. Thesis, – 1999.
2. *Abuhilail J.* Zariski-like topologies for modules over commutative rings. // Ph.D. dissertation.
3. *Ali I. M., Khalaf R. I.* Dual Notion of Prime Modules // IBN Al-Haitham J. for Pure and Appl. Sci. – 2010. – 23(3) – P. 226–237.
4. *Andrunakievich V.A.* Prime modules and Baer radical // Siberian Mathematical J. – 1961. – 2(6). – P. 801–806. (in Russian).
5. *Annin S.* Attached Primes Over Noncommutative Rings // J. Pure Appl. Algebra. – 2008. – 212(3). – P. 510–521.
6. *Ansari-Toroghy H., Farshadifar F.* On the Dual Notion of Prime Submodules // Algebra Coloq. – 2012. – 19, Special Issue No. 1. – P. 1109–1116.
7. *Ansari-Toroghy H., Farshadifar F.* On the Dual Notion of Prime Submodules (II) // Mediterr. J. Math. –2012. – 19. – P. 327–336.
8. *Atyah M. F., MacDonald I. G.* Introduction to Commutative Algebra // Univercity of London, 1969. – 128 p.
9. *Bhraany B. Al.* A Note on Prime Modules and Pure Submodules // J. Sci. – 1969. – 37. – P. 1431–1441.
10. *Cёken S., Alkan M.* On second submodules // Contemporary Mathematics. – 2015. – 634. – P. 67–77.
11. *Cёken S., Alkan M.* Dual Zariski Topology for Modules // AIP Conf. Proc. – 2011. – 1389(1). – P. 357–360.
12. *Cёken S., Alkan M, Smith P. F.* Second Modules over Noncommutative Rings // Commun. Algebra. – 2013. – 41. – P. 83–98.
13. *Dauns J.* Prime modules // Reine Angew. Math. – 1978. – 298. – P. 156–181.
14. *Feller E. H., Swokowski E. W.* Prime modules // Can. J. Math. – 1965. – 17. – P. 1041–1052.
15. *Johnson R. E.* Representations of prime rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – 74. №2. – P. 351–357.
16. *Karakas H. I.* On Noetherian modules // J. of Pure and Applied Sci. – 1972. – P. 165–168.
17. *Khakaf R. I.* Dual Notions of Prime Submodules and Prime Modules / – Univ. of Baghdad, M.D. Thesis,.
18. *Lam T. Y.* Lecture on Modules and Rings. – New York: Springer Verlag, 1999. GTM, 189.
19. *Larsen M. D., Mc Carthy P. J.* Multiplication Theory of Ideals. – New York and London: Academic Pres, 1971.– 300 p.
20. *Lu C. P.* M-Radicals of Submodules in Module // Math Japonica. – 1989. – 34. – P. 211–219.
21. *Page S.* Properties of quotient rings // Can. J. Math. – 1972. – 24(6). – P. 1122–1128.

22. *Northcott D. G.* Lessons on Rings, Modules and Multiplication. – London: Cambridge Univercity Press, 2018. – 464 p.
23. *Wisbauer R.* On prime modules and rings // Commun. Algebra. – 1983. – 11. – P. 2249–2265.
24. *Yassemi S.* The dual notion of prime submodules // Arch. Math (Brno). – 2001. – 37. – P. 273–278.

ON THE SECOND SPECTRUM OF MODULES

Secondary modules over associative rings are considered and the main properties of such modules are proved. The relationships between secondary modules and other types of modules (Noetherian, injective, flat and divisible modules) are shown.

Key words: *secondary modules, multiplication modules, injective modules.*

Львів. нац. ун-т
ім. Івана Франка, Львів

Одержано
01.12.21