https://doi.org/10.15407/apmm2021.19.63-71

УДК 539.3

М. Й. Юзв'як[✉], Ю. В. Токовий

РОЗВ'ЯЗОК ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КІЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА

З використанням методу безпосереднього інтегрування вихідних рівнянь плоскої задачі теорії пружності для кільцевого сектора запропоновано методику її розв'язання шляхом зведення до ключового інтегро-диференціального рівняння для визначальної функції Вігака. Отримано систему локальних крайових та інтегральних умов для визначальної функції на основі заданих нормальних та дотичних навантажень прямолінійних та округлих сторін кільцевого сектора. Виведено умови рівноваги для заданих силових навантажень, необхідні для існування розв'язку задачі.

***Ключові слова**: кільцевий сектор, функція Вігака, інтегральні умови, кутові точки, плоска задача теорії пружності.*

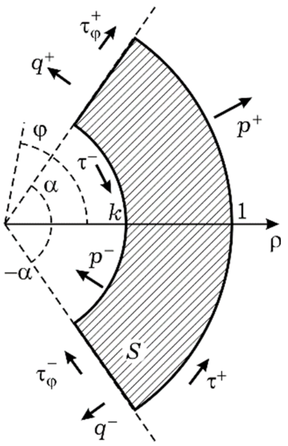
Вступ. Розвиток ефективних методів аналізу напружено-деформованого стану тіл з кутовими точками [4] є своєрідним індикатором прогресу методології механіки деформівного твердого тіла через складнощі, пов'язані з формулюванням та розв'язуванням відповідних крайових задач. Ці складнощі пояснюють тим, що кутові точки межі тіла є певними концентраторами напружень, в околі яких зазнають збурень внутрішні механічні поля, і спричиняють «перемикання» крайових умов, заданих на сегментах поверхні, розмежованих кутами (ребрами). Тому слід встановити певні умови погодження у кутах для заданих крайових умов та забезпечити відповідні ступені вільності у розв'язках ключових рівнянь відповідних крайових задач. Відтак не дивно, що відносно просту на перший погляд задачу Ляме про пружну рівновагу куба за довільного нормального силового навантаження усіх його граней порівняно за складністю зі задачею про «два тіла» небесної механіки [11]. Хоча у плоскому формулюванні задачі такого класу є дещо простішими проти просторових (наприклад, плоска задача теорії пружності для прямокутної області [3, 15]), однак, зберігають основну складність: відокремлення змінних у ключових рівняннях так, щоб точно задовольнити загальні крайові умови на усіх гранях (поверхнях, розмежованих кутовими точками) тіла [14].

Аналогом плоскої задачі теорії пружності для прямокутної області у полярній системі координат є відповідна задача для кільцевого сектора. Вивчення найпростіших випадків навантаження кільцевого сектора пов'язане з дослідженням чистого згину прямокутних брусів моментами, прикладеними до протилежних торців [7]. При цьому використано елементарні розв'язки бігармонічного рівняння в полярній системі координат для функції напружень Ері, які дали змогу задовольнити крайові умови на навантажених згинальними моментами торцях в інтегральному сенсі [6, 9]. Втім, як зазначено вище, для точного задоволення загальних крайових умов на усіх сторонах кільцевого сектора потрібні адекватніші підходи.

У праці [1] для побудови розв'язку мішаної задачі теорії пружності для кільцевого сектора використано метод однорідних розв'язків, який полягає у побудові двох систем власних функцій, що забезпечують виконання заданих умов на циліндричних сегментах поверхні та нульових – на прямолінійних, і навпаки. У результаті задачу зведено до розв'язання безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь для комплексних коефіцієнтів розвинень напружень і переміщень за побудованими системами власних функцій. У праці [16] для спрощення задоволення крайових умов застосовано варіаційне

✉ yuzvyaky@ukr.net

формулювання задачі. У праці [13] використано так званий просторовий підхід, внаслідок чого задачу записано в операторному вигляді та проаналізовано шляхом зведення матриці оператора до жорданової форми. Напружений стан кільцевого сектора з вільними торцями проаналізовано у тривимірному формулювання [12]. Числові методики розв'язування такого класу задач наведено в праці [10].



У праці В. М. Вігака та М. І. Свириди [2] розвинуто метод безпосереднього інтегрування для розв'язування плоскої задачі теорії пружності для кільцевого сектора. Розв'язання задачі зведено до ключового рівняння для визначальних функцій, за які вибрано колові та сумарні напруження з відповідними локальними крайовими та інтегральними умовами. Щоб відокремити змінні у ключовому рівнянні, використали алгоритм побудови розв'язку допоміжної некласичної задачі теплопровідності з інтегральними умовами. У результаті побудували повні системи власних та приєднаних функцій для подання напружень згідно зі встановленими алгоритмами розвинення. Приєднані функції у цих системах виділяють у розвиненнях напружень частини, які розподілені у всьому кільцевому сегменті та відповідають головному вектору та моменту прикладених до однотипних сегментів поверхні зовнішніх силових навантажень. Власні функції відповідають самозрівноваженим частинам напружень, які мають нульові головні вектор та момент, розподілені поблизу навантажених ділянок межі і згасають з просуванням углибину області. Таким чином, побудований розв'язок дає змогу точно задовольнити задані на сторонах кільцевого сектора крайові умови та відповідає основоположному принципу Сен-Венана. Для плоскої задачі термопружності для кільцевого сектора з вільною від силових навантажень межею цей метод розвинуто у статті [5], де запровадили як визначальну спеціально побудовану функцію, пов'язану з компонентами тензора напружень інтегро-диференціальними співвідношеннями. Цю функцію названо функцією Вігака [8]. Вказано на переваги її використання під час розв'язання задач такого класу.

У цій статті поширено підхід [5] до розв'язання плоскої задачі теорії пружності для кільцевого сектора, навантаженого на округлих та прямолінійних сторонах довільними нормальними та дотичними силовими навантаженнями. Отримано ключове інтегро-диференціальне рівняння для функції Вігака та встановлено інтегральні умови для функцій, що задають зовнішні навантаження, необхідні для існування розв'язку поставленої задачі.

1. **Формулювання задачі**. Розглянемо кільцеву область внутрішнього і зовнішнього радіусів $R_в$ та $R_з$, віднесену до полярної системи координат (r, φ) з початком у центрі кільця. Перейшовши до безрозмірної радіальної змінної $\rho = r / R_з$, виокремимо сектор цієї області променями $\varphi = \pm\alpha$, де $\mathrm{const} = \alpha \in (0, \pi)$. У новій системі координат (ρ, φ) отримаємо область $\mathcal{S} = \{(\rho, \varphi) : \rho \in [k, 1], \quad \varphi \in [-\alpha, \alpha], k = R_в / R_з\}$ (див. рисунок). За відсутності масових сил відповідну плоску задачу теорії пружності описують рівняння рівноваги [7]

$$\frac{\partial(\rho\sigma_r(\rho,\varphi))}{\partial\rho} + \frac{\partial\sigma_{r\varphi}(\rho,\varphi)}{\partial\varphi} = \sigma_\varphi(\rho,\varphi),$$

$$\frac{\partial(\rho^2\sigma_{r\varphi}(\rho,\varphi))}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial\sigma_\varphi(\rho,\varphi)}{\partial\varphi} = 0, \qquad (\rho,\varphi) \in \mathcal{S}, \tag{1}$$

та суцільності

$$\Delta(\sigma_r(\rho,\varphi)+\sigma_\varphi(\rho,\varphi))=0, \qquad (\rho,\varphi)\in\mathcal{S}, \tag{2}$$

за заданих на сторонах сектора зовнішніх силових навантажень:

$$\sigma_r(k,\varphi)=p^-(\varphi), \qquad \sigma_r(1,\varphi)=p^+(\varphi), \qquad \varphi\in[-\alpha,\alpha], \tag{3}$$

$$\sigma_{r\varphi}(k,\varphi)=\tau_r^-(\varphi), \qquad \sigma_{r\varphi}(1,\varphi)=\tau_r^+(\varphi), \qquad \varphi\in[-\alpha,\alpha], \tag{4}$$

$$\sigma_\varphi(\rho,\pm\alpha)=q^\pm(\rho), \qquad \rho\in[k,1], \tag{5}$$

$$\sigma_{r\varphi}(\rho,\pm\alpha)=\tau_\varphi^\pm(\rho), \qquad \rho\in[k,1]. \tag{6}$$

Тут σ_r, σ_φ, $\sigma_{r\varphi}$ – нормальні та дотичні компоненти тензора напружень, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, $p^\pm(\varphi)$, $\tau_r^\pm(\varphi)$, $q^\pm(\rho)$, $\tau_\varphi^\pm(\rho)$ – задані функції.

Використовуючи друге рівняння рівноваги (1), умову (6) для дотичних напружень перетворимо в умову для колових:

$$\left.\frac{\partial\sigma_\varphi(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\pm\alpha}=-\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho^2\tau_\varphi^\pm(\rho))}{d\rho}, \qquad \rho\in[k,1]. \tag{7}$$

Нижче наведено методику побудови аналітичного розв'язку сформульованої задачі теорії пружності (1)–(7) для кільцевого сектора $\mathcal{S}$.

2. **Побудова розв'язку**. Застосовуючи методику [2, 5], використаємо рівняння рівноваги (1) для отримання виразів для функції Вігака $\mathcal{V}(\rho,\varphi)$:

$$\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\mathcal{V}(\rho,\xi))\,|\,\varphi-\xi\,|\,d\xi+\rho\mathcal{V}(\rho,\varphi)=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial(\rho\sigma_r(\rho,\varphi))}{\partial\rho}\right), \tag{8}$$

$$\mathcal{V}(\rho,\varphi)=\frac{\partial^2\sigma_\varphi(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}, \tag{9}$$

$$\rho\mathcal{V}(\rho,\varphi)=-\frac{\partial^2(\rho^2\sigma_{r\varphi}(\rho,\varphi))}{\partial\rho\partial\varphi}. \tag{10}$$

Проінтегрувавши рівняння (9) за кутовою координатою з урахуванням умови (7), одержимо:

$$2\frac{\partial\sigma_\varphi(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}=-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho^2(\tau_\varphi^+(\rho)+\tau_\varphi^-(\rho))\Big)+\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathcal{V}(\rho,\xi)\operatorname{sgn}(\varphi-\xi)d\xi. \tag{11}$$

Звідси при $\varphi=\pm\alpha$ з урахуванням умови (7) випливає інтегральна умова для функції Вігака:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathcal{V}(\rho,\varphi)d\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho^2(\tau_\varphi^-(\rho)-\tau_\varphi^+(\rho))\Big). \tag{12}$$

Інтегруванням цієї рівності за радіальною координатою з урахуванням умов (4) знайдемо вирази

$$\iint_{\mathcal{S}}\eta\mathcal{V}(\eta,\varphi)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)d\eta d\varphi=2\rho^2(\tau_\varphi^-(\rho)-\tau_\varphi^+(\rho))+$$
$$+k^2(\tau_\varphi^+(k)-\tau_\varphi^-(k))+\tau_\varphi^+(1)-\tau_\varphi^-(1), \tag{13}$$

$$\iint_{\mathcal{S}}\mathcal{V}(\eta,\varphi)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)d\eta d\varphi=\tau_\varphi^-(1)-\tau_\varphi^+(1)+k(\tau_\varphi^-(k)-\tau_\varphi^+(k))+$$

$$+2\rho(\tau_\varphi^+(\rho)-\tau_\varphi^-(\rho))+\int_k^1(\tau_\varphi^+(\eta)-\tau_\varphi^-(\eta))\operatorname{sgn}(\rho-\eta)d\eta\,. \tag{14}$$

При $\rho=k,1$ з (13), (14) дістанемо інтегральні умови

$$\iint_{\mathcal S}\rho\mathcal V(\rho,\varphi)d\rho d\varphi=k^2(\tau_\varphi^+(k)-\tau_\varphi^-(k))+\tau_\varphi^-(1)-\tau_\varphi^+(1)\,,$$

$$\iint_{\mathcal S}\mathcal V(\rho,\varphi)d\rho d\varphi=\int_k^1(\tau_\varphi^+(\rho)-\tau_\varphi^-(\rho))d\rho+$$

$$+k(\tau_\varphi^-(k)-\tau_\varphi^+(k))+\tau_\varphi^+(1)-\tau_\varphi^-(1)\,. \tag{15}$$

Інтегруючи рівність (11) за φ з урахуванням (4), (12), одержимо вираз

$$2\sigma_\varphi(\rho,\varphi)=q^+(\rho)+q^-(\rho)+\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathcal V(\rho,\xi)\,|\,\varphi-\xi\,|\,d\xi-$$

$$-\frac{\varphi-\alpha}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho^2\tau_\varphi^+(\rho))-\frac{\varphi+\alpha}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho^2\tau_\varphi^-(\rho))\,, \tag{16}$$

з якого при $\varphi=\pm\alpha$ випливає інтегральна умова

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi\mathcal V(\rho,\varphi)d\varphi=q^-(\rho)-q^+(\rho)-\frac{\alpha}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho^2(\tau_\varphi^+(\rho)+\tau_\varphi^-(\rho)))\,. \tag{17}$$

Множенням цього виразу на ρ та інтегруванням результату в межах зміни радіальної координати отримаємо ще дві інтегральні умови

$$\iint_{\mathcal S}\eta\varphi\mathcal V(\eta,\varphi)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)d\eta d\varphi=\int_k^1\eta(q^-(\eta)-q^+(\eta))\operatorname{sgn}(\rho-\eta)\,d\eta+$$

$$+\alpha(\tau_\varphi^+(1)+\tau_\varphi^-(1)+k^2(\tau_\varphi^+(k)+\tau_\varphi^-(k)))-2\alpha\rho^2(\tau_\varphi^+(\rho)+\tau_\varphi^-(\rho))\,,$$

$$\iint_{\mathcal S}\varphi\mathcal V(\eta,\varphi)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)d\eta d\varphi=\int_k^1(q^-(\eta)-q^+(\eta))\operatorname{sgn}(\rho-\eta)d\eta+$$

$$+\alpha(\tau_\varphi^+(1)-\tau_\varphi^-(1)+k(\tau_\varphi^+(k)-\tau_\varphi^-(k))+2\rho(\tau_\varphi^-(\rho)-\tau_\varphi^+(\rho)))+$$

$$+\alpha\int_k^1(\tau_\varphi^-(\eta)-\tau_\varphi^+(\eta))\operatorname{sgn}(\rho-\eta)d\eta\,, \tag{18}$$

з яких при $\rho=k,1$ випливають інтегральні умови для функції Вігака:

$$\iint_{\mathcal S}\rho\varphi\mathcal V(\rho,\varphi)d\rho d\varphi=\int_k^1\rho(q^-(\rho)-q^+(\rho))d\rho+$$

$$+\alpha(k^2(\tau_\varphi^+(k)+\tau_\varphi^-(k))-\tau_\varphi^+(1)-\tau_\varphi^-(1))\,,$$

$$\iint_{\mathcal S}\varphi\mathcal V(\rho,\varphi)d\rho d\varphi=\int_k^1(q^-(\rho)-q^+(\rho))d\rho+\alpha\Bigg(k(\tau_\varphi^+(k)-\tau_\varphi^-(k))+$$

$$+\tau_\varphi^-(1)-\tau_\varphi^+(1)+\int_k^1(\tau_\varphi^-(\rho)-\tau_\varphi^+(\rho))d\rho\Bigg)\,.$$

Проінтегруємо (10) по ρ з урахуванням (3), щоб одержати рівність

$$\frac{\partial\sigma_{r\varphi}(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{d\tau_r^+(\varphi)}{d\varphi}+k^2\frac{d\tau_r^-(\varphi)}{d\varphi}-\int_k^1\eta\mathcal V(\eta,\varphi)\operatorname{sgn}(\rho-\eta)d\eta\right), \tag{19}$$

з якої при $\rho = k, 1$ випливає інтегральна умова

$$\int\limits_k^1 \rho\mathcal{V}(\rho,\varphi)d\rho = k^2\frac{d\tau_r^-(\varphi)}{d\varphi} - \frac{d\tau_r^+(\varphi)}{d\varphi}. \tag{20}$$

Інтегруванням (20) по φ одержимо:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho\mathcal{V}(\rho,\xi)\,\mathrm{sgn}(\varphi-\xi)d\rho d\xi = 2(k^2\tau_r^-(\varphi) - \tau_r^+(\varphi)) +$$

$$+\tau_r^+(\alpha) + \tau_r^+(-\alpha) - k^2(\tau_r^-(\alpha) + \tau_r^-(-\alpha)).$$

Звідси при $\varphi = \pm\alpha$ випливає умова

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho\mathcal{V}(\rho,\varphi)d\rho d\varphi = k^2(\tau_r^-(\alpha) - \tau_r^-(-\alpha)) + \tau_r^+(-\alpha) - \tau_r^+(\alpha). \tag{21}$$

Порівнявши (21) із (15), встановлюємо необхідну умову для дотичних навантажень у кутових точках сектора:

$$k^2(\tau_\varphi^+(k) - \tau_\varphi^-(k)) + \tau_\varphi^-(1) - \tau_\varphi^+(1) =$$

$$= k^2(\tau_r^-(\alpha) - \tau_r^-(-\alpha)) + \tau_r^+(-\alpha) - \tau_r^+(\alpha). \tag{22}$$

Проінтегруємо (19) з урахуванням (5), звідки отримаємо вираз

$$\sigma_{r\varphi}(\rho,\varphi) = \frac{1}{2}\left(\tau_\varphi^+(\rho) + \tau_\varphi^-(\rho) + \frac{1}{\rho^2}(\tau_r^+(\varphi) + k^2\tau_r^-(\varphi))\right) -$$

$$-\frac{1}{4\rho^2}\left(\tau_r^+(\alpha) + \tau_r^+(-\alpha) + k^2(\tau_r^-(\alpha) + \tau_r^-(-\alpha))\right) -$$

$$-\frac{1}{4\rho^2}\iint\limits_{\mathcal{S}} \eta\mathcal{V}(\eta,\xi)\,\mathrm{sgn}(\rho-\eta)\,\mathrm{sgn}(\varphi-\xi)d\eta d\xi, \tag{23}$$

з якого при $\varphi = \pm\alpha$ дістанемо інтегральну умову

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \eta\mathcal{V}(\eta,\varphi)\,\mathrm{sgn}(\rho-\eta)d\eta d\varphi = 2\rho^2(\tau_\varphi^-(\rho) - \tau_\varphi^+(\rho)) +$$

$$+k^2(\tau_r^-(\alpha) - \tau_r^-(-\alpha)) + \tau_r^+(\alpha) - \tau_r^+(-\alpha). \tag{24}$$

Зіставленням виразів (24) та (13) одержимо умову погодження

$$\tau_r^+(\alpha) - \tau_r^+(-\alpha) + k^2(\tau_r^-(\alpha) - \tau_r^-(-\alpha)) =$$

$$= \tau_\varphi^+(1) - \tau_\varphi^-(1) + k^2(\tau_\varphi^+(k) - \tau_\varphi^-(k)). \tag{25}$$

Крім того, при $\rho = k, 1$ з виразу (24) випливає рівність

$$\tau_r^+(\alpha) + \tau_r^+(-\alpha) + k^2(\tau_r^-(\alpha) + \tau_r^-(-\alpha)) =$$

$$= \tau_\varphi^+(1) + \tau_\varphi^-(1) + k^2(\tau_\varphi^+(k) + \tau_\varphi^-(k)). \tag{26}$$

Умови (22), (25) і (26) виконуються, якщо задані дотичні навантаження є погодженими в кутових точках області $\mathcal{S}$, тобто

$$\tau_\varphi^+(1) = \tau_r^+(\alpha) = \tau_{1,\alpha}, \qquad \tau_\varphi^+(k) = \tau_r^-(\alpha) = \tau_{k,\alpha},$$

$$\tau_\varphi^-(k) = \tau_r^-(-\alpha) = \tau_{k,-\alpha}, \qquad \tau_\varphi^-(1) = \tau_r^+(-\alpha) = \tau_{1,-\alpha}. \tag{27}$$

Домножимо (20) на φ і проінтегруємо від $-\alpha$ до α, звідки

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \rho\xi\mathcal{V}(\rho,\xi)\,\mathrm{sgn}(\varphi-\xi)d\rho d\xi = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha}(\tau_r^+(\xi) - k^2\tau_r^-(\xi))\,\mathrm{sgn}(\varphi-\xi)d\xi +$$

$$+\alpha(\tau_r^+(\alpha)-\tau_r^+(-\alpha)+k^2(\tau_r^-(-\alpha)-\tau_r^-(\alpha)))-2\varphi(\tau_r^+(\varphi)-k^2\tau_r^-(\varphi)).$$

Звідси при $\varphi=\pm\alpha$ випливає інтегральна умова

$$\iint_{\mathcal{S}}\rho\varphi\mathcal{V}(\rho,\varphi)d\rho d\varphi=\int_{-\alpha}^{\alpha}(\tau_r^+(\varphi)-k^2\tau_r^-(\varphi))d\varphi+$$
$$+\alpha(k^2(\tau_r^-(\alpha)+\tau_r^-(-\alpha))-\tau_r^+(\alpha)-\tau_r^+(-\alpha)). \qquad (28)$$

Порівнявши (28) із першою формулою (18) з урахуванням умов (25), встановимо інтегральну умову для заданих зовнішніх навантажень:

$$\int_k^1\rho(q^+(\rho)-q^-(\rho))d\rho=\int_{-\alpha}^{\alpha}(k^2\tau_r^-(\varphi)-\tau_r^+(\varphi))d\varphi. \qquad (29)$$

Залишилося побудувати розв'язок рівняння (8), щоб визначити радіальні напруження через функцію Вігака. Але зручніше використати інший підхід. З урахуванням (16) та (23) перше рівняння (1) подамо у вигляді

$$\frac{\partial(\rho\sigma_r(\rho,\varphi))}{\partial\rho}=-\frac{1}{2}(q^+(\rho)+q^-(\rho))-\frac{1}{2\rho^2}\frac{d}{d\varphi}(\tau_r^+(\varphi)+k^2\tau_r^-(\varphi))-$$
$$-\frac{\varphi-\alpha}{2\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho^2\tau_\varphi^+(\rho))-\frac{\varphi+\alpha}{2\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho^2\tau_\varphi^-(\rho))+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathcal{V}(\rho,\xi)\,|\,\varphi-\xi\,|\,d\xi+\frac{1}{2\rho^2}\int_k^1\eta\mathcal{V}(\eta,\varphi)\,\mathrm{sgn}(\rho-\eta)d\eta.$$

Інтегруванням цього рівняння за радіальною змінною з урахуванням умов (3) отримаємо вираз для радіальних напружень

$$\sigma_r(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\rho}(p^+(\varphi)+kp^-(\varphi))+\frac{1}{4\rho}\int_k^1(q^+(\eta)+q^-(\eta))\,\mathrm{sgn}(\rho-\eta)d\eta+$$
$$+\frac{1-\rho}{2\rho^2}\frac{d\tau_r^+(\varphi)}{d\varphi}-k\frac{\rho-k}{2\rho^2}\frac{d\tau_r^-(\varphi)}{d\varphi}+$$
$$+\frac{\varphi-\alpha}{4\rho}\left(\tau_{1,\alpha}+k\tau_{k,\alpha}-2\rho\tau_\varphi^+(\rho)-\int_k^1\tau_\varphi^+(\eta)\,\mathrm{sgn}(\rho-\eta)d\eta\right)+$$
$$+\frac{\varphi+\alpha}{4\rho}\left(\tau_{1,-\alpha}+k\tau_{k,-\alpha}-2\rho\tau_\varphi^-(\rho)-\int_k^1\tau_\varphi^-(\eta)\,\mathrm{sgn}(\rho-\eta)d\eta\right)+$$
$$+\frac{1}{4\rho}\iint_{\mathcal{S}}\mathcal{V}(\eta,\xi)\,|\varphi-\xi|\,\mathrm{sgn}(\rho-\eta)d\xi d\eta+$$
$$+\frac{1}{2\rho^2}\int_k^1\mathcal{V}(\eta,\varphi)\,|\,\rho-\eta\,|\,d\eta, \qquad (30)$$

який задовольняє умови (3) за виконання інтегральної умови

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{S}}\mathcal{V}(\rho,\xi)\,|\,\varphi-\xi\,|\,d\rho d\xi+\int_k^1\mathcal{V}(\rho,\varphi)d\rho=p^+(\varphi)-kp^-(\varphi)+$$
$$+k\frac{d\tau_r^-(\varphi)}{d\varphi}-\frac{d\tau_r^+(\varphi)}{d\varphi}-\frac{1}{2}\int_k^1(q^+(\rho)+q^-(\rho))d\rho+$$
$$+\frac{\varphi-\alpha}{2}\left(\int_k^1\tau_\varphi^+(\rho)d\rho+\tau_{1,\alpha}-k\tau_{\mathrm{k},\alpha}\right)+$$

$$+\frac{\varphi+\alpha}{2}\left(\int_k^1 \tau_\varphi^-(\rho)d\rho + \tau_{1,-\alpha} - k\tau_{k,-\alpha}\right). \tag{31}$$

Формула (31) є інтегральним рівнянням для функції $\int_k^1 \mathcal{V}(\rho,\varphi)d\rho$, загальний розв'язок якого подамо у вигляді

$$\int_k^1 \mathcal{V}(\rho,\varphi)d\rho = A\cos\varphi + B\sin\varphi + g(\varphi) - \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} g(\xi)\sin|\varphi-\xi|\,d\xi, \tag{32}$$

де

$$g(\varphi) = p^+(\varphi) - kp^-(\varphi) - \frac{d\tau_r^+(\varphi)}{d\varphi} + k\frac{d\tau_r^-(\varphi)}{d\varphi},$$

$$A = \frac{1}{2(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha)}\left(2(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)\int_{-\alpha}^{\alpha} g(\varphi)\cos\varphi d\varphi + \right.$$

$$+\alpha(k(\tau_{k,\alpha} - \tau_{k,-\alpha}) - \tau_{1,\alpha} + \tau_{1,-\alpha}) -$$

$$\left. -\int_k^1 (\alpha(\tau_\varphi^+(\rho) - \tau_\varphi^-(\rho)) + q^+(\rho) + q^-(\rho))d\rho\right),$$

$$B = \frac{1}{2\cos\alpha}\left(2\sin\alpha\int_{-\alpha}^{\alpha} g(\varphi)\sin\varphi d\varphi - k(\tau_{k,\alpha} + \tau_{k,-\alpha}) + \right.$$

$$\left. +\int_k^1 (\tau_\varphi^+(\rho) + \tau_\varphi^-(\rho))d\rho + \tau_{1,\alpha} + \tau_{1,-\alpha}\right).$$

Рівняння суцільності (2) з урахуванням (16) та (30) матиме вигляд

$$4\rho^2\mathcal{V}(\rho,\varphi) + \frac{\rho}{2}\iint_{\mathcal{S}} \mathcal{V}(\eta,\xi)\,\mathrm{sgn}(\rho-\eta)\,|\varphi-\xi|\,d\xi d\eta +$$

$$+\int_k^1 \frac{\partial^2\mathcal{V}(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2}|\rho-\eta|\,d\eta + 2\int_k^1 \mathcal{V}(\eta,\varphi)(\rho-2\eta)\,\mathrm{sgn}(\rho-\eta)d\eta +$$

$$+\rho^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\mathcal{V}(\rho,\xi)}{\partial\rho}\right) - \mathcal{V}(\rho,\xi)\right)|\varphi-\xi|\,d\xi =$$

$$= -\rho\frac{d^2}{d\varphi^2}(p^+(\varphi) + kp^-(\varphi)) - \rho(p^+(\varphi) + kp^-(\varphi)) -$$

$$-\rho^4\frac{d^2}{d\rho^2}(q^+(\rho) + q^-(\rho)) - 2\rho^3\frac{d}{d\rho}(q^+(\rho) + q^-(\rho)) +$$

$$+\rho^2(q^+(\rho) + q^-(\rho)) - \frac{1}{2}\int_k^1 (q^+(\eta) + q^-(\eta))\,\mathrm{sgn}(\rho-\eta)d\eta +$$

$$+(\varphi+\alpha)\left(\frac{\rho}{2}\int_k^1 \tau_\varphi^-(\eta)\,\mathrm{sgn}(\rho-\eta)d\eta + \rho^5\frac{d^3\tau_\varphi^-(\rho)}{d\rho^3} + \right.$$

$$\left. +6\rho^4\frac{d^2\tau_\varphi^-(\rho)}{d\rho^2} + 5\rho^3\frac{d\tau_\varphi^-(\rho)}{d\rho} - \rho^2\tau_\varphi^-(\rho)\right) +$$

$$+(\varphi-\alpha)\left(\frac{\rho}{2}\int_k^1 \tau_\varphi^+(\eta)\,\mathrm{sgn}(\rho-\eta)d\eta+\rho^5\frac{d^3\tau_\varphi^+(\rho)}{d\rho^3}+\right.$$

$$\left.+6\rho^4\frac{d^2\tau_\varphi^+(\rho)}{d\rho^2}+5\rho^3\frac{d\tau_\varphi^+(\rho)}{d\rho}-\rho^2\tau_\varphi^+(\rho)\right)+$$

$$+(\rho-1)\frac{d^3\tau_r^+(\varphi)}{d\varphi^3}+(\rho-4)\frac{d\tau_r^+(\varphi)}{d\varphi}+$$

$$+k(\rho-k)\frac{d^3\tau_r^-(\varphi)}{d\varphi^3}+k(\rho-4k)\frac{d\tau_r^+(\varphi)}{d\varphi}+$$

$$+\frac{\rho\varphi}{2}(\tau_{1,\alpha}+\tau_{1,-\alpha}+k(\tau_{k,\alpha}+\tau_{k,-\alpha}))+$$

$$+\frac{\rho\alpha}{2}(\tau_{1,\alpha}-\tau_{1,-\alpha}+k(\tau_{k,\alpha}-\tau_{k,-\alpha}))\,. \qquad (33)$$

Висновки. Визначення компонент тензора напружень для кільцевого сектора через функцію $\mathcal{V}(\rho,\varphi)$ за формулами (16), (23) та (30) дає змогу звести вихідну задачу до розв'язання інтегро-диференціального рівняння (33) з чотирма інтегральними умовами (12), (17), (20) та (32). Виконання рівнянь рівноваги накладає певні обмеження на задані зовнішні навантаження. Зокрема, дотичні навантаження повинні задовольняти умови погодження в кутових точках області (27) та інтегральну умову рівноваги (29).

Як і для плоскої задачі термопружності [5], використовуючи запропонований метод відокремлення змінних, можна побудувати аналітичний розв'язок інтегро-диференціального рівняння суцільності (35). Для цього за коловою координатою φ слід використати таку ж систему функцій, як і для декартової системи координат для прямокутної області [14], зокрема, $\{1,\varphi,\cos\gamma_n\varphi,\sin\lambda_n\varphi, n=1,2,\ldots\}$, де $\gamma_n = n\pi/\alpha$, а λ_n – пронумеровані у порядку зростання додатні корені трансцендентного рівняння $\mathrm{tg}\,\lambda=\lambda$. Алгоритм розвинення залежних від колової координати функцій наведено в працях [3, 14]. За радіальною координатою використовують повну неортогональну систему $\left\{\frac{1}{\rho^2},\frac{1}{\rho^2}\ln\rho,\frac{1}{\rho^2}\sin\frac{æ_m\ln\rho}{1-k},\ \frac{1}{\rho^2}\cos\frac{æ_m\ln\rho}{1-k},\quad m=2,3,\ldots\right\}$, де $æ_n$ – пронумеровані у порядку зростання додатні корені трансцендентного рівняння $\mathrm{tg}\left(\frac{\lambda}{2}\ln k\right)=-\frac{1-k}{1+k}\lambda$, а алгоритм розвинення довільної функції в ряд наведено раніше [2].

1. *Александров В. М., Чебаков М. И.* О методе однородных решений в смешанных задачах теории упругости для усеченного клина и кольцевого сектора // Прикл. математика и механика. – 1983. – 47, вып. 5. – С. 790–798.
   Те саме: *Aleksandrov V. M., Chebakov M. I.* On the method of homogeneous solutions in mixed problems of the theory of elasticity for a truncated wedge and a ring sector // J. Appl. Math. Mech. – 1983. – 47, No. 5. – P. 639–645. – https://doi.org/10.1016/0021-8928(83)90138-7.
2. *Вігак В. М., Свирида М. І.* Відокремлення змінних у рівняннях двовимірної задачі термопружності в напруженнях для кільцевого сектора // Доп. НАН України. – 1998. – № 2. – С. 68–74.
3. *Вігак В. М., Токовий Ю. В.* Дослідження плоского напруженого стану в прямокутній області // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – 37, № 2. – С. 61–66.
   Те саме: *Vihak V. M., Tokovyi Yu. V.* Investigation of the plane stressed state in a rectangular domain // Materials Sci. – 2002. – 38, No. 2. – P. 230–237. – https://doi.org/10.1023/A:1020994204806.

4. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
5. *Кушнір Р. М., Токовий Ю. В., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В.* Зведення двовимірних задач термопружності для тіл з кутовими точками до ключових інтегро-диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2021. – 73, № 10. – С. 1355–1367. – https://doi.org/10.37863/umzh.v73i10.6784.
6. *Саусвелл Р. В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. – Москва: Иностр. лит., 1948. – 674 с.
7. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
8. *Токовий Ю. В., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В.* Подання розв'язків плоских задач теорії пружності для прямокутної області через функції Вігака // Вісн. Київськ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. наук. – 2021. – № 3. – С. 123–126. – https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.24.
9. *Carothers S.* Plane strain in a wedge, with applications to masonry dams // *Proc. Royal Soc. Edinburgh*. – 1914. – 33. – P. 292–306. – https://doi.org/10.1017/S0370164600031448.
10. *Chernyshov A. D., Goryainov V. V., Danshin A. A.* Analysis of the stress field in an annular sector using the method of fast expansions // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2009. – 1203. – ID: 012031. – https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012031.
11. *Meleshko V. V.* Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – 2003. – 56, No. 1. – P. 33–85. –https://doi.org/10.1115/1.1521166.
12. *Okumura I. A., Miyake K.* On stresses and displacements in a thick circular ring sector plate based on the three-dimensional theory of elasticity // Theor. Appl. Mech. – 1981. – 29. – P. 127–138. – https://doi.org/10.1007/s00707-009-0147-6.
13. *Stephen N. G.* On state-space elastostatics within a plane stress sectorial domain – the wedge and the curved beam // Int. J. Solids Struct. – 2008. – 45, No. 20. – P. 5437–5463. – https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.05.023.
14. *Vihak V., Tokovyi Yu., Rychahivskyy A.* Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region // J. Comput. Appl. Mech. – 2002. – 3, No. 2. – P. 193–206.
15. *Vihak V. M., Yuzvyak M. Y., Yasinsky A. V.* The solution of plane thermoelasticiti problem for rectangular domain // J. Thermal Stresses. – 1988. – 21, No. 5. – P. 545–562. – https://doi.org/10.1080/01495739808956162.
16. *Zhong W. X.* Plane elasticity in sectorial domain and the Hamiltonian system // Appl. Math. Mech. – 1994. – 15. – P. 1113–1123. – https://doi.org/10.1007/BF02451982.

A SOLUTION TO THE PLANE ELASTICITY PROBLEM FOR AN ANNULAR WEDGE

By using the direct integration method with regard to the original equations within the framework of a plane elasticity problem for an annular wedge, a solution technique is suggested concerning the reduction to a governing integro-differential equation for Vihak's key function. A system of the local boundary conditions and integral ones for the key function is derived on the basis of the normal and tangential force loadings imposed on the rectilinear and circumferential segments of the wedge boundary. The equilibrium conditions are derived for the given force loading, which are necessary for existence of the solution to the problem formulated.

Key words: annular wedge, Vihak's function, integral conditions, corner points, plane elasticity problem.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.10.21