https://doi.org/10.15407/apmm2021.19.50-56

УДК 512.546

Н. М. Пирч ✉

УНІВЕРСАЛЬНО *M*-ЕКВІВАЛЕНТНІ ПАРИ ТИХОНОВСЬКИХ ПРОСТОРІВ

Вивчено умови, за яких топологічний ізоморфізм між підгрупами двох вільних топологічних груп може бути продовжений до ізоморфізму відповідних вільних груп.

***Ключові слова**: вільна топологічна група, ізоморфізм, пара просторів, M-еквівалентність*

Вступ. У статті [3] вивчали ін'єктивність дії функтора вільної топологічної групи на пари тихоновських просторів, зокрема, запропонували поняття M-еквівалентних пар, досліджували спільні їх властивості, встановлювали методи побудови. Нижче досліджено модифікацію поняття M-еквівалентних пар – поняття універсальної M-еквівалентності пар, яке передбачає не тільки існування топологічного ізоморфізму між вільними групами, що зберігає певні підгрупи, а й можливість продовження довільного ізоморфізму між цими підгрупами до ізоморфізму відповідних вільних топологічних груп.

Для тихоновського простору X через $F(X)$ позначимо вільну топологічну групу простору X. Для підпростору $Y \subseteq X$ через $\langle Y \rangle$ – підгрупу в $F(X)$, породжену множиною твірних Y. Скажемо, що пари (X, A) та (Y, B) є M-еквівалентними, якщо існує такий топологічний ізоморфізм $i : F(X) \to F(Y)$, що $j(\langle A \rangle) = \langle B \rangle$.

У монографії [5] найповніше на сьогодні викладено теорію вільних топологічних груп, зокрема, тих, які використовуватимемо у цій статті. Всі розглядувані простори є тихоновськими.

Універсальні *M*-еквівалентні пари.

***Означення** 1*. Скажемо, що M-еквівалентні пари (X, A) та (Y, B) перебувають *у відношенні* uM, якщо довільний топологічний ізоморфізм $j : \langle A \rangle \to \langle B \rangle$ продовжується до топологічного ізоморфізму $i : F(X) \to F(Y)$.

***Означення** 2*. Скажемо, що пара (X, A) *є* M*-універсальною*, якщо довільний топологічний автоморфізм $j : \langle A \rangle \to \langle A \rangle$ продовжується до топологічного автоморфізму $i : F(X) \to F(X)$.

Нагадаємо [2], що ізоморфізм $i : F(X) \to F(Y)$ називають *спеціальним*, якщо композиція $e_Y^* \circ i$ є постійним відображенням, де $e_Y^* : F(Y) \to Z$ – гомоморфізм, що продовжує функцію $e_Y : Y \to Z$, тотожно рівну 1, на Y.

Приклад. Нехай $I = [0,1]$ – одиничний відрізок з топологією, породженою евклідовою метрикою, $a, b \in I$ – відмінні точки, $Y = \{a, b\}$. Означимо відображення $s : Y \to \langle Y \rangle$, поклавши $s(a) = a$, $s(b) = b^{-1}$. Продовження $j : \langle Y \rangle \to \langle Y \rangle$ відображення s до топологічного автоморфізму є автоморфізмом, який не є спеціальним. Оскільки кожен ізоморфізм, заданий на зв'язному топологічному просторі, є спеціальним, то автоморфізм j не допускає продовження до топологічного автоморфізму $F(X) \to F(X)$. Тобто, пара (I, Y) не є M-універсальною. ◊

✉ pnazar@ukr.net

Твердження 1. Відношення uM є симетричним і транзитивним.

Доведення. Нехай $(X,A)\overset{uM}{\sim}(Y,B)$. Покажемо, що $(Y,B)\overset{uM}{\sim}(X,A)$.

Нехай $j_1:\langle B\rangle\to\langle A\rangle$ – топологічний ізоморфізм, $j:\langle A\rangle\to\langle B\rangle$ – ізоморфізм, обернений до j_1. Тоді існує такий топологічний ізоморфізм $i:F(X)\to F(Y)$, що $i\,|_{\langle A\rangle}=j$. Для топологічного ізоморфізму $i_1:F(Y)\to F(X)$, оберненого до i, виконується умова $i_1\,|_{\langle A\rangle}=j_1$.

Нехай $(X,A)\overset{uM}{\sim}(Y,B)$, $(Y,B)\overset{uM}{\sim}(Z,C)$. Покажемо, що $(X,A)\overset{uM}{\sim}(Z,C)$.

Нехай $j_A:\langle A\rangle\to\langle C\rangle$ — довільний топологічний ізоморфізм. З того, що пари (Z,C) та (Y,B) є M-еквівалентними, випливає існування такого топологічного ізоморфізму $i_C:F(Z)\to F(Y)$, що $i_C\left(\langle C\rangle\right)\to\langle B\rangle$. Покладемо $j=j_C\circ j_A$. Оскільки пари (X,A) та (Y,B) перебувають у відношенні uM, то існує такий топологічний ізоморфізм $i:F(X)\to F(Y)$, що $i\,|_{\langle A\rangle}=j$. Покладемо $i_A=i_C^{-1}\circ i$. Відображення $i_A=i_C^{-1}\circ i$ є композицією топологічних ізоморфізмів, а отже, топологічний ізоморфізм. За побудовою $i_A\,|_{\langle A\rangle}=i_C^{-1}\circ i\,|_{\langle A\rangle}=j_C^{-1}\circ j=j_A$. ◊

Теорема 1. Нехай $(X,A)\overset{M}{\sim}(Y,B)$. Тоді наступні умови є еквівалентні:

1) $(X,A)\overset{uM}{\sim}(Y,B)$;

2) пари (X,A) та (Y,B) є M-універсальними;

3) пара (X,A) є M-універсальною.

Доведення. $(1\Rightarrow 2)$ Нехай $v:\langle A\rangle\to\langle A\rangle$ – топологічний автоморфізм. Нехай також $i:F(X)\to F(Y)$ – такий топологічний ізоморфізм, що $i\left(\langle A\rangle\right)=\langle B\rangle$. Покладемо $j=i\,|_{\langle A\rangle}$. Розглянемо ізоморфізм $s:\langle A\rangle\to\langle B\rangle$, означений як $s=j\circ v$. З того, що пари (X,A) та (Y,B) перебувають у відношенні uM випливає існування такого топологічного ізоморфізму $l:F(X)\to F(Y)$, що $l\,|_{\langle A\rangle}=s$. Відображення $u=i^{-1}\circ l$ є композицією топологічних ізоморфізмів, а отже, також топологічний ізоморфізм. За побудовою $u\,|_{\langle A\rangle}=i^{-1}\circ l\,|_{\langle A\rangle}=j^{-1}\circ s=v$.

$(2\Rightarrow 3)$ Очевидно.

$(3\Rightarrow 1)$ Нехай $v:\langle A\rangle\to\langle B\rangle$ – топологічний ізоморфізм. Нехай також $i:F(X)\to F(Y)$ – такий топологічний ізоморфізм, що $i\left(\langle A\rangle\right)=\langle B\rangle$. Покладемо $j=i\,|_{\langle A\rangle}$. Розглянемо ізоморфізм $s:\langle A\rangle\to\langle A\rangle$, означений як $s=j\circ v$. З того, що пара (X,A) є M-універсальною, випливає існування такого топологічного ізоморфізму $l:F(X)\to F(X)$, що $l\,|_{\langle A\rangle}=s$. Відображення $u=i^{-1}\circ l$ є композицією топологічних ізоморфізмів, а отже, також є топологічним ізоморфізмом. За побудовою $u\,|_{\langle A\rangle}=i^{-1}\circ l\,|_{\langle A\rangle}=j^{-1}\circ s=v$. ◊

Іншими словами, відношення uM – це відношення M-еквівалентності на множині M-універсальних пар. Тому називатимемо пари, які перебувають у відношенні uM, *універсально M-еквівалентними.*

Наслідок 1. Нехай $(X,A)\overset{M}{\sim}(Y,B)$ і пара (X,A) є M-універсальною. Тоді пара (Y,B) є також M-універсальною.

Нагадаємо, що підпростір Y топологічного простору X називають G-ретраком простору, якщо довільне неперервне відображення з топологічного простору Y у довільну топологічну групу H допускає неперервне продовження на X.

Теорема 2. Якщо підпростір A є G-ретраком простору X, то пара (X,A) є M-універсальною.

Доведення. Випливає з теореми 3 зі статті [4]. $\Diamond$

Наслідок 2. Нехай $(X,A)\overset{M}{\sim}(Y,B)$ і підпростір A є G-ретраком простору X. Тоді $(X,A)\overset{M}{\sim}(Y,B)$.

Нагадаємо, що підпростір Y топологічного простору X називають P-вкладеним, якщо довільна неперервна псевдометрика, задана на Y, допускає продовження до неперервної псевдометрики на X. Якщо підпростір Y є P-вкладеним у X, то підгрупа $\langle Y\rangle\subseteq F(X)$ є топологічно ізоморфною $F(Y)$ ([7]).

Твердження 2. Якщо $(X_1,Y_1)\overset{uM}{\sim}(X_2,Y_2)$, $(Y_1,Z_1)\overset{M}{\sim}(Y_2,Z_2)$, а підпростір Y_i є P-вкладеним у X_i, $i=1,2$, то $(X_1,Z_1)\overset{M}{\sim}(X_2,Z_2)$.

Доведення. Нехай $j:F(Y_1)\to F(Y_2)$ – такий топологічний ізоморфізм, що $j(\langle Z_1\rangle)=\langle Z_2\rangle$. Оскільки підпростори Y_i є P-вкладеними у X_i, то ізоморфізм $j:F(Y_i)\to F(Y_i)$ можна розглядати як ізоморфізм $j:\langle Y_1\rangle_{X_1}\to\langle Y_2\rangle_{X_2}$, де $\langle Y_i\rangle_{X_i}$ – підгрупа в $F(X_i)$, породжена множиною твірних Y_i. А тому існує такий топологічний ізоморфізм $w:F(X_1)\to F(X_2)$, що $w|_{\langle Y_1\rangle}=j$. За побудовою $w(\langle Z_1\rangle)=j(\langle Z_1\rangle)=\langle Z_2\rangle$. $\Diamond$

Твердження 3. Якщо $(X_1,Y_1)\overset{uM}{\sim}(X_2,Y_2)$, $(Y_1,Z_1)\overset{uM}{\sim}(Y_2,Z_2)$, а підпростір Y_i є P-вкладеним у X_i, $i=1,2$, то $(X_1,Z_1)\overset{uM}{\sim}(X_2,Z_2)$.

Доведення. З твердження 2 випливає, що пари (X_1,Z_1) та (X_2,Z_2) є M-еквівалентими. Нехай $u:\langle Z_1\rangle\to\langle Z_2\rangle$ – довільний топологічний ізоморфізм. З того, що $(Y_1,Z_1)\overset{uM}{\sim}(Y_2,Z_2)$ випливає існування такого топологічного ізоморфізму $v:F(Y_1)\to F(Y_2)$, що $v|_{\langle Z_1\rangle}=u$. Оскільки підпростори Y_i є P-вкладеними у X_i, то ізоморфізм $v:F(Y_i)\to F(Y_i)$ можна розглядати як ізоморфізм $v:\langle Y_1\rangle_{X_1}\to\langle Y_2\rangle_{X_2}$, де $\langle Y_i\rangle_{X_i}$ – підгрупа в $F(X_i)$, породжена множиною твірних Y_i. А тому існує такий топологічний ізоморфізм $w:F(X_1)\to F(X_2)$, що $w|_{\langle Y_1\rangle}=v$. За побудовою $w|_{\langle Z_1\rangle}=v|_{\langle Z_1\rangle}=u$. $\Diamond$

Твердження 4. Якщо пари (X,Y) та (Y,Z) є M-універсальними, а підпростір Y є P-вкладеним у X, то пара (X,Z) є M-універсальною.

Доведення. Нехай $u:\langle Z\rangle\to\langle Z\rangle$ – топологічний автоморфізм. З того, що пара (Y,Z) є M-універсальною, випливає існування такого топологічного автоморфізму $v : F(Y) \to F(Y)$, що $v|_{\langle Z\rangle} = u$. Оскільки підпростір Y є P-вкладеним у X, то ізоморфізм $v : F(Y) \to F(Y)$ можна розглядати як ізоморфізм $v : \langle Y\rangle_X \to \langle Y\rangle_X$, де $\langle Y\rangle_X$ – підгрупа в $F(X)$, породжена множиною твірних Y. А тому існує такий топологічний ізоморфізм $w : F(X) \to F(X)$, що $w|_{\langle Y\rangle} = v$. За побудовою $w|_{\langle Z\rangle} = v|_{\langle Z\rangle} = u$. ◊

Нехай $Y \to X$, $Y' \to Z$ – вкладення топологічних просторів, $h : Y \to Y'$ – деякий гомеоморфізм. Розглянемо на просторі $X \oplus Z$ відношення еквівалентності $\sim$, поклавши $y \sim h(y)$ для всіх $y \in Y$. Отриманий фактор-простір позначимо через $X \cup_Y Z$.

Твердження 5. Якщо $(X_1, Y_1) \overset{uM}{\sim} (X_2, Y_2)$, $(Z_1, Y_1) \overset{M}{\sim} (Z_2, Y_2)$, а підпростір Y_i є P-вкладеним у X_i та Z_i, $i = 1,2$, то $\left(X_1 \cup_{Y_1} Z_1, Y_1\right) \overset{M}{\sim} \left(X_2 \cup_{Y_2} Z_2, Y_2\right)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $j_Z : F(Z_1) \to F(Z_2)$ – такий топологічний ізоморфізм, що $j_Z(\langle Y_1\rangle) \to \langle Y_2\rangle$. Покладемо $j_Z|_{\langle Y_1\rangle} = u_Z$. Нехай $h_i : Y_i \to Y_i$ $(i = 1,2)$ – гомеоморфізми, по яких "склеюються" простори X_i та Z_i, $h_i^* : \langle Y_i\rangle_{X_1} \to \langle Y_i\rangle_{Z_i}$ – їхні гомоморфні продовження. Тоді існує такий топологічний ізоморфізм $u_X : \langle Y_1\rangle_{X_1} \to \langle Y_2\rangle_{X_2}$, що $u_Z \circ h_1^* = h_2^* \circ u_X$. З того, що $(X_1, Y_1) \overset{uM}{\sim} (X_2, Y_2)$ випливає існування такого топологічного ізоморфізму $j_X : F(X_1) \to F(X_2)$, що $j_X|_{\langle Y_1\rangle} = u_X$. Розглянемо відображення $s : X_1 \oplus Z_1 \to F(X_2 \oplus Z_2)$, поклавши

$$s(x) = \begin{cases} j_X(x), & \textit{якщо} \quad x \in X_1 \\ j_Z(x), & \textit{якщо} \quad x \in Z_1 \end{cases}.$$

Продовження $s^* : F(X_1 \oplus Z_1) \to F(X_2 \oplus Z_2)$ відображення s до гомоморфізму вільних топологічних груп є топологічним ізоморфізмом ([1], твердження 8.8). Нехай $p_1 : X_1 \oplus Z_1 \to X_1 \cup_{Y_1} Z_1$, $p_2 : X_2 \oplus Z_2 \to X_2 \cup_{Y_2} Z_2$ – факторні відображення, $p_1^* : F(X_1 \oplus Z_1) \to F\left(X_1 \cup_{Y_1} Z_1\right)$, $p_2^* : F(X_2 \oplus Z_2) \to F\left(X_2 \cup_{Y_2} Z_2\right)$ – їхні гомоморфні продовження. Ядро $\ker p_1^*$ – мінімальна нормальна підгрупа в $F(X_1 \oplus Z_1)$, породжена множиною $K = \left\{y \cdot h_1(y)^{-1} : y \in Y_1\right\}$. Оскільки $s^*\left(y \cdot h_1(y)^{-1}\right) = s(y) \cdot s\left(h_1(y)\right)^{-1} \in \ker p_2^*$, то $i\left(\ker p_1^*\right) = \ker p_2^*$, а отже (див. [6]), існує такий топологічний ізоморфізм $I : F\left(X_2 \cup_{Y_2} Z_2\right) \to F\left(X_2 \cup_{Y_2} Z_2\right)$, що $I \circ p_1^* = p_2^* \circ s^*$. За побудовою $s^*\left(\left\langle p_1(Y_1)\right\rangle_{X_1 \cup_{Y_1} Z_1}\right) = \left\langle p_2(Y_2)\right\rangle_{X_2 \cup_{Y_2} Z_2}$. ◊

Твердження 6. Якщо $(X_1, Y_1) \overset{uM}{\sim} (X_2, Y_2)$, $(Z_1, Y_1) \overset{uM}{\sim} (Z_2, Y_2)$, а підпростір Y_i є P-вкладеним у X_i та Z_i, $i = 1,2$, то $\left(X_1 \cup_{Y_1} Z_1, Y_1\right) \overset{uM}{\sim} \left(X_2 \cup_{Y_2} Z_2, Y_2\right)$.

Д о в е д е н н я. З твердження 5 випливає, що пари (X_1, Y_1) і (X_2, Y_2) є M-еквівалентними. Нехай $p_1 : X_1 \oplus Z_1 \to X_1 \cup_{Y_1} Z_1$, $p_2 : X_2 \oplus Z_2 \to X_2 \cup_{Y_2} Z_2$

– факторні відображення, $p_1^*: F(X_1 \oplus Z_1) \to F\left(X_1 \cup_{Y_1} Z_1\right)$, $p_2^*: F(X_2 \oplus Z_2) \to F\left(X_2 \cup_{Y_2} Z_2\right)$ – їхні гомоморфні продовження. Нехай $u: \left\langle p_1(Y_1)\right\rangle_{X_1 \cup_{Y_1} Z_1} \to \left\langle p_2(Y_2)\right\rangle_{X_2 \cup_{Y_2} Z_2}$ – топологічний ізоморфізм. Тоді існує такий топологічний ізоморфізм $u_X: \langle Y_1\rangle_{X_1} \to \langle Y_2\rangle_{X_2}$, що $u \circ p_1^* = p_2^* \circ u_X$. Нехай $h_i: Y_i \to Y_i$ ($i = 1,2$) – гомеоморфізми, по яких "склеюються" простори X_i та Z_i, $h_i^*: \langle Y_i\rangle_{X_1} \to \langle Y_i\rangle_{Z_i}$ – їхні гомоморфні продовження. Тоді існує такий топологічний ізоморфізм $u_Z: \langle Y_1\rangle_{Z_1} \to \langle Y_2\rangle_{Z_2}$, що $u_Z \circ h_1^* = h_2^* \circ u_X$. З того, що $(X_1, Y_1) \overset{uM}{\sim} (X_2, Y_2)$, випливає існування такого топологічного ізоморфізму $j_X: F(X_1) \to F(X_2)$, що $j_X|_{\langle Y_1\rangle} = u_X$. Розглянемо відображення $s: X_1 \oplus Z_1 \to F(X_2 \oplus Z_2)$, поклавши

$$s(x) = \begin{cases} j_X(x), & \text{якщо} \quad x \in X_1 \\ j_Z(x), & \text{якщо} \quad x \in Z_1 \end{cases}.$$

Продовження $s^*: F(X_1 \oplus Z_1) \to F(X_2 \oplus Z_2)$ відображення s до гомоморфізму вільних топологічних груп є топологічним ізоморфізмом ([1], твердження 8.8).

Ядро $\ker p_1^*$ – це мінімальна нормальна підгрупа в $F(X_1 \oplus Z_1)$, породжена множиною $K = \left\{y \cdot h_1(y)^{-1} : y \in Y_1\right\}$. Оскільки

$$s^*\left(y \cdot h_1(y)^{-1}\right) = s(y) \cdot s\left(h_1(y)\right)^{-1} \in \ker p_2^*,$$

то $i\left(\ker p_1^*\right) = \ker p_2^*$, а отже (див. [6]), існує такий топологічний ізоморфізм $I: F\left(X_2 \cup_{Y_2} Z_2\right) \to F\left(X_2 \cup_{Y_2} Z_2\right)$, що $I \circ p_1^* = p_2^* \circ s^*$. За побудовою $s^*|_{\langle p_1(Y_1)\rangle} = u$. ◊

Наслідок 3. Якщо пари (X, Y) та (Z, Y) є M-універсальними, а підпростір Y – P-вкладеним у X та Z, то пара $(X \cup_Y Z, Y)$ є M-універсальною.

Узагальнюючи ідеї з наведеного вище прикладу, доведемо таке твердження.

Твердження 7. Якщо пара (X, A) є M-універсальною, простір X є зв'язним, а підпростір A є P-вкладеним у X, то простір A є також зв'язним.

Доведення. Нехай простір A є незв'язним, а пара (X, A) є M-універсальною. Покажемо, що X є незв'язним. Розглянемо автоморфізм $i: \langle A\rangle \to \langle A\rangle$ (його через P-вкладеність підпростору A в X можемо розглядати як ізоморфізм $i: F(A) \to F(A)$). Якщо ізоморфізм i не є спеціальним, а $j: F(X) \to F(X)$ – його продовження, то ізоморфізм j не є спеціальним, а тому простір X є незв'язним.

Нехай тепер i – спеціальний ізоморфізм, $A = A_1 \cup A_2$ – подання простору A у вигляді об'єднання двох непорожніх неперетинних відкрито замкнених множин A_1 і A_2. Означимо відображення $m: A \to F(A)$, поклавши

$$m(x) = \begin{cases} i(x), & \text{якщо} \quad x \in A_1 \\ i^{-1}(x), & \text{якщо} \quad x \in A_2 \end{cases}.$$

Продовження відображення m до гомоморфізму $m^* : F(A) \to F(A)$ є неспеціальним топологічним ізоморфізмом, а отже, будь-яке його продовження до деякого ізоморфізму $j : F(X) \to F(X)$ буде також неспеціальним ізоморфізмом, а тому простір X є незв'яним. ◊

Нехай $\{X_i : i \in I\}$ − сім'я підпросторів тихоновського простору X, $\{Y_i : i \in I\}$ − сім'я підпросторів тихоновського простору Y. Скажемо, що сім'я $(X, \{X_i : i \in I\})$ є M-еквівалентною до сім'ї $(Y, \{Y_i : i \in I\})$ (позн. $(X, \{X_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_i : i \in I\})$), якщо існує такий топологічний ізоморфізм $h : F(X) \to F(Y)$, що $h(\langle X_i \rangle) = \langle Y_i \rangle$ для всіх $i \in I$.

Аналогічно до твердження 2 доводимо твердження 8

Твердження 8. Нехай $X_n \subseteq X_{n-1} \subseteq ... \subseteq X_2 \subseteq X_1 \subseteq X_0 = X$ − сім'я підпросторів тихоновського простору X, $Y_n \subseteq Y_{n-1} \subseteq ... \subseteq Y_2 \subseteq Y_1 \subseteq Y_0 = Y$ − сім'я підпросторів тихоновського простору Y. Нехай також виконано умови:

а) $(X_{n-1}, X_n) \overset{M}{\sim} (Y_{n-1}, Y_n)$;

б) $(X_{i-1}, X_i) \overset{uM}{\sim} (Y_{i-1}, Y_i)$ − для всіх $i = 1,..,n-1$;

в) підпростір X_{i+1} є P-вкладеним у X_i, $i = 0,...,n-1$, підпростір Y_{i+1} є P-вкладеним у Y_i, $i = 0,...,n-1$.

Тоді $(X, X_1, X_2, ..., X_n) \overset{M}{\sim} (Y, Y_1, Y_2, ..., Y_n)$.

Скажемо, що сім'я підпросторів $\{X_i : i \in I\}$ топологічного простору X, для яких $K = \bigcap_{i \in I} X_i$, утворює квітку, якщо $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ і $X_i \cap X_j = K$ для всіх $i \neq j$.

Аналогічно до твердження 5 доводимо твердження 9.

Твердження 9. Нехай $\{X_i : i \in I\}$ − сім'я підпросторів тихоновського простору X, що утворює квітку, $\{Y_i : i \in I\}$ − сім'я підпросторів тихоновського простору Y, що утворює квітку. Нехай також виконано умови:

а) $(X, X_{i_0}) \overset{M}{\sim} (Y, Y_{i_0})$ − для деякого $i_0 \in I$;

б) $(X, X_i) \overset{uM}{\sim} (Y, Y_i)$ − для всіх $i \in I \setminus \{i_0\}$;

в) підпростір X_i є P-вкладеним у X для всіх $i \in I$, підпростір Y_i є P-вкладеним у Y для всіх $i \in I$.

Тоді $(X, \{X_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_i : i \in I\})$.

Якщо в означенні 1 замінити всюди функтор вільної топологічної групи $F(X)$ на функтор вільної абелевої топологічної групи $A(X)$ чи вільного локально опуклого простору $L(X)$, отримаємо поняття універсально A-еквівалентних пар $(X_1, Y_1) \overset{uA}{\sim} (X_2, Y_2)$ та універсально L-еквівалентних пар $(X_1, Y_1) \overset{uL}{\sim} (X_2, Y_2)$. Міняючи в означенні 2 функтор вільної топологічної групи на функтор вільної абелевої топологічної групи чи вільного локально опуклого простору, отримаємо поняття та A- та L-універсальних пар, відповідно. Всі твердження цього дослідження, як і їхні доведення, справедливі також для відношення універсальних A- та L-еквівалентності.

Довільні два M-еквівалентні простори (відображення, пари просторів, набори просторів) будуть також A-еквівалентними. Тому виникають природно питання

Питання 1. Чи кожна M-універсальна пара тихоновських просторів буде A-універсальною?

Питання 2. Чи з універсальної M-еквівалентності двох пар випливає їхня універсальна A-еквівалентність?

Питання 3. Припустимо, що довільний спеціальний топологічний ізоморфізм $j:\langle A\rangle\to\langle B\rangle$ продовжується до топологічного ізоморфізму $i:F(X)\to F(Y)$. Чи будуть пари (X,A) та (Y,B) універсально M-еквівалентними?

1. *Гуран І. Й, Зарічний М. М.* Елементи теорії топологічних груп. – Київ: НМК ВО. – 1991. – 75 с.
2. *Окунев О. Г.* M-эквивалентность произведений // Тр. Моск. мат. общества.– 1995. – 56. – С. 192–205.
3. *Пирч Н. М.* M-еквівалентність пар // Наук. зб. Прикл. проблеми математики і механіки. – 2004. – 2. – С. 74–79.
4. *Пирч Н. М.* Еквівалентність за Марковим пар невідокремлюваних просторів // Вісник ЛНУ Сер. мех.-мат. – 2020. – 90. – С. 57–68.
5. *Arhangel'skii A. V., Tkachenko M. G.* Topological Groups and Related Structures. – Amsterdam; Paris: Atlantis Press, 2008 – 782 p.
6. *Okunev O. G.* A method for constructing examples of M-equivalent spaces // Topology Appl. – 1990 – 36. – P. 157–171; Correction: Topology Appl –1993 – 49. – P. 191–192.
7. *Sipacheva O. V.* Free topological groups of spaces and their subspaces// Topology and its Appl. – 2000. – 101. – P. 181–212.

UNIVERSAL *M*-EQUIVALENCE OF THE PAIRS OF TYCHONOFF SPACES

The article investigates the conditions under which the topological isomorphism between subgroups of two free topological groups can be extended to the isomorphism of the corresponding free groups.

Key words: free topological group, isomorphism, pair of topological spaces, M-equivalence

Українська академія друкарства, Львів
НУ „Львівська політехніка”, Львів

Одержано
28.11.21