https://doi.org/10.15407/apmm2021.19.44-49

УДК 393.3

Р. М. Андрійчук ✉, Я. І. Кунець, В. В. Матус, В. О. Міщенко, В. В. Пороховський

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТОНКОГО П'ЄЗОКЕРАМІЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ З ПРУЖНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ ЗА ОСЕСИМЕТРИЧНОГО КРУЧЕННЯ КОМПОЗИТУ

Побудовано математичні моделі динамічної взаємодії тонкого п'єзокерамічного включення з пружним ізотропним середовищем за осесиметричного кручення композиту. На межі поділу середовищ виконуються умови ідеального механічного контакту. Розглянуто електроізольоване та заземлене п'єзокерамічне включення. Моделювання здійснено за допомогою апарата теорії сингулярних збурень.

Ключові слова: *асимптотичні моделі, ізотропне середовище, тонке п'єзокерамічне включення, осесиметричне кручення, теорія сингулярних збурень*

В елементах конструкцій часто застосовують матеріали зі зв'язаними механічними та електричними полями. Ця взаємодія проявляється в п'єзокераміках, які традиційно використовують у випромінювачах і приймачах звуку, в гідроакустиці, елементах запалювання, п'єзотрансформаторах, вимірювальних приладах тощо [2, 6, 8, 19]. Для застосування п'єзокерамічних матеріалів, які вирізняються значною крихкістю, необхідно вивчити пружне та електричне поля навколо концентраторів напружень (порожнини, включення, тріщини), що містяться в них. Під час дослідження впливу тонких пружних та електропружних неоднорідностей на фізико-механічні поля у середовищах за статичних і динамічних навантажень виникають аналітико-числові труднощі внаслідок математичного моделювання поведінки тонких об'єктів у матриці. Здебільшого їх долають, вводячи деякі додаткові припущення (гіпотези) фізичного або математичного характеру, що призводить до пониження розмірності вихідної задачі в околі тонкої неоднорідності [1, 7, 16, 18].

Малий параметр, що описує відносну товщину об'єкта, вказує на асимптотичний характер розв'язків таких задач. Тому тут застосовували також теорію сингулярних збурень. Згідно з нею розв'язки задач подають у вигляді асимптотичних (зовнішніх) розкладів із подальшим додатковим їх вивченням (побудовою примежових шарів, внутрішніх асимптотичних розкладів) в областях швидкої зміни розглядуваних процесів. Основні положення підходу та огляд праць з цієї проблематики викладено раніше [3, 4, 9–13, 17].

Запропоновано [14] метод розв'язання статичної задачі про осесиметричне кручення пружного середовища з тонким пружним включенням. Згідно з ним асимптотичні розв'язки задачі шукають за різних співвідношень між пружними параметрами складників композиту. Нижче за цією методикою отримано асимптотично точні ефективні умови динамічної взаємодії тонкого дискового п'єзокерамічного включення із пружною матрицею. За подібних припущень досліджено поздовжній зсув композиту [15].

1. **Формулювання задачі**. Нехай у пружному необмеженому ізотропному середовищі за умов осесиметричного кручення та динамічних навантажень знаходиться тонке дискове п'єзокерамічне включення, яке займає область $W_\varepsilon = \left\{(r,z):\ 0 \le r \le a,\ 2|z| \le h\right\}$, де $r\theta z$ – циліндрична система координат; a і h – радіус і постійна товщина включення. Його відносна товщина, яку описує малий безрозмірний параметр $\varepsilon = h/a \ll 1$, мала.

✉ andriychukroman@gmail.com

Рівняння руху для матриці в циліндричній системі координат запишемо у вигляді [2, 6]

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2}{r}\sigma_{r\theta}+\omega^2\rho u_\theta=0, \quad (r,z)\in R^2 \setminus W_\varepsilon ,$$

де $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta z}$ – компоненти тензора напружень у матриці, u_θ – відмінна від нуля компонента зміщень, ω – циклічна частота коливань композиту, ρ – густина матеріалу матриці.

Закон Гука для матеріалу матриці у циліндричній системі координат такий:

$$\sigma_{r\theta}=\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right), \quad \sigma_{\theta z}=\mu\frac{\partial u_\theta}{\partial z} ,$$

де μ – модуль зсуву матриці.

Рівняння руху для матриці в переміщеннях

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}+k^2\right)u_\theta=0, \quad k=\omega/c, \quad c=\sqrt{\mu/\rho}$$

де k – хвильове число крутильних хвиль у матриці, c – їх швидкість.

Повні поля зміщень $u_\theta(r,z)$ та напружень $\sigma_{r\theta}(r,z)$, $\sigma_{\theta z}(r,z)$ у матриці подамо у вигляді

$$u_\theta(r,z)=u_\theta^s(r,z)+u_\theta^{in}(r,z), \quad \sigma_{r\theta}(r,z)=\sigma_{r\theta}^s(r,z)+\sigma_{r\theta}^{in}(r,z),$$

$$\sigma_{\theta z}(r,z)=\sigma_{\theta z}^s(r,z)+\sigma_{\theta z}^{in}(r,z), \quad (r,z)\in R^2 \setminus W_\varepsilon, \tag{1}$$

де $u_\theta^s(r,z)$, $\sigma_{r\theta}^s(r,z)$, $\sigma_{\theta z}^s(r,z)$ – розсіяні неоднорідністю поля зміщень та напружень у матриці, $u_\theta^{in}(r,z)$, $\sigma_{r\theta}^{in}(r,z)$, $\sigma_{\theta z}^{in}(r,z)$ – зміщення та напруження, що характеризують прикладене відоме навантаження. Для $u_\theta^s(r,z)$ виконуються умови випромінювання [6].

Рівняння стану руху для матеріалу включення в циліндричній системі координат та рівняння Максвелла запишемо так [2, 6]:

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^0}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_{\theta z}^0}{\partial z}+\frac{2}{r}\sigma_{r\theta}^0+k_0^2u_\theta^0=0, \quad (r,z)\in W_\varepsilon , \quad k_0=\omega/c_0 , \tag{2}$$

$$c_0=\sqrt{c_{44}\left(1+\eta^2\right)/\rho_0} , \quad \eta=e_{15}^2/c_{44}\,\varepsilon_{11} ,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}^0=\frac{\partial D_r^0}{\partial r}+\frac{D_r^0}{r}+\frac{\partial D_z^0}{\partial z}=0, \tag{3}$$

де $\sigma_{r\theta}^0$, $\sigma_{\theta z}^0$ – компоненти тензора напружень у включенні, u_θ^0 – відмінна від нуля компонента зміщень, D_r^0 та D_z^0 – компоненти вектора індукції електричного поля $\mathbf{D}^0$, k_0 – хвильове число крутильних хвиль у включенні, c_0 – їх швидкість, ρ_0 – густина матеріалу включення; η – коефіцієнт електромеханічного зв'язку; c_{44}, e_{15}, ε_{11} – пружна та п'єзоелектрична сталі, а також діелектрична проникність матеріалу включення.

Співвідношення для матеріалу включення мають вигляд

$$\sigma_{r\theta}^0=c_{44}\left(\frac{\partial u_\theta^0}{\partial r}-\frac{u_\theta^0}{r}+\eta^2\frac{\partial \varphi_p^0}{\partial r}\right), \quad \sigma_{\theta z}^0=c_{44}\left(\frac{\partial u_\theta^0}{\partial z}+\eta^2\frac{\partial \varphi_p^0}{\partial z}\right),$$

$$D_r^0 = e_{15}\left(\frac{\partial u_\theta^0}{\partial r} - \frac{u_\theta^0}{r} - \frac{\partial \varphi_p^0}{\partial r}\right), \qquad D_z^0 = e_{15}\left(\frac{\partial u_\theta^0}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_p^0}{\partial z}\right), \tag{4}$$

$$\varphi_P^0(r,z) = \varepsilon_{11}\varphi^0(r,z)/e_{15}\,, \tag{5}$$

де $\varphi^0(r,z)$ – електричний потенціал.

Враховуючи вирази (2)–(5), отримаємо систему двох рівнянь для переміщення u_θ^0 та електричного потенціалу φ_p^0:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)u_\theta^0 + \eta^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_p^0 + k_0^2(1+\eta^2)u_\theta^0 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}\right)u_\theta^0 - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_p^0 = 0, \quad (r,z) \in W_\varepsilon. \tag{6}$$

На межі поділу середовищ виконуються умови ідеального механічного контакту. Зокрема, на лицевих поверхнях включення маємо:

$$u_\theta(r,\pm h) = u_\theta^0(r,\pm h), \quad \sigma_{\theta z}(r,\pm h) = \sigma_{\theta z}^0(r,\pm h). \tag{7}$$

Для електроізольованого включення на лицевій поверхні виконується умова

$$D_z^0(r,\pm h) = 0\,, \tag{8}$$

а для заземленого

$$\varphi^0(r,\pm h) = 0. \tag{9}$$

Крім цього, вважаємо, що хвильові товщини включення малі:

$$kh << 1, \quad k_0 h << 1.$$

2. **Моделювання динамічної взаємодії середовища з п'єзокерамічним включенням**. Оскільки відносна товщина включення мала, для отримання наближених розв'язків задачі використовуємо методи теорії сингулярних збурень [5, 14]. Подамо шукані величини у вигляді асимптотичних розкладів за степенями ε:

$$u_\theta^s(r,z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{\theta j}^s(r,z)\varepsilon^j, \quad u_\theta^0(r,z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{\theta j}^0(r,\overline{z})\varepsilon^j, \quad (r,z) \in R^2 \setminus W_\varepsilon,$$

$$\varphi_P^0(r,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{P\,j}^0(r,\overline{z})\varepsilon^j, \quad \overline{z} = z/\varepsilon, \quad (r,z) \in W_\varepsilon. \tag{10}$$

Характер асимптотик (10) визначає співвідношення між параметром контрастності жорсткостей складників електропружної системи $\gamma = c_{44}/\mu$ та ε [14, 15]. Тому розглянемо три різні діапазони зміни величини γ:

$$1.\ \varepsilon \le \gamma \le 1/\varepsilon;\quad 2.\ 0 \le \gamma \le \varepsilon \ \text{ і } \ 3.\ 1/\varepsilon \le \gamma \le \infty. \tag{11}$$

Діапазон 1 відповідає випадку, коли механічні властивості матеріалів матриці та включення несуттєво відрізняються порівняно з параметром ε, тобто відповідає неконтрастним неоднорідностям. *Діапазон* 2 описує ситуацію, коли жорсткість включення набагато менша, ніж жорсткість навколишнього середовища, порівняно з ε. *Діапазон* 3 описує випадок, коли включення великої жорсткості.

Підставляючи розклади (10) у співвідношення (1), (6)–(9) та розщеплюючи вирази за степенями ε, у кожному із діапазонів (11) з точністю до головних членів отримаємо ефективні умови спряження складників композиту, записані на серединній поверхні включення. Для електроізольованого п'єзокерамічного включення маємо:

діапазон 1

$$\left[u^s\right]_-^+ \approx 2h\frac{1-\gamma\left(1+\eta^2\right)}{\varepsilon\gamma\left(1+\eta^2\right)}u^{in'}(r,0)\ ,$$

$$\left[\frac{\partial u_1^s}{\partial z}\right]_-^+ \equiv 2\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\right)h\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)u^{in'}(r,0)+$$

$$+2\left(k^2-2\gamma\left(1+\eta^2\right)k_0^2\right)hu^{in}(r,0),\quad 0\le r\le a, z=0\ ; \tag{12}$$

діапазон 2

$$\left[u_0^s\right]_-^+ \equiv \frac{2h}{\varepsilon\gamma\left(1+\eta^2\right)}\left(\frac{\partial u_0^s(r,\pm 0)}{\partial z}+\frac{\partial u^{in'}(r,0)}{\partial z}\right),$$

$$\left[\frac{\partial u_0^s}{\partial z}\right]_-^+ \equiv 0\ ,\quad 0\le r\le a,\quad z=0\ ; \tag{13}$$

діапазон 3

$$\left[\frac{\partial u_0^s}{\partial z}\right]_-^+ \equiv -\frac{2}{\gamma\left(1+\eta^2\right)}\left(u_1^s(r,\pm 0)+\frac{\partial u^{in'}(r,0)}{\partial z}\right),$$

$$\left[u_0^s\right]_-^+ \equiv 0\ ,\quad 0\le r\le a,\quad z=0. \tag{14}$$

Тут і надалі $[f]_-^+ = f(x_1,+0)-f(x_1,-0)$.

Для заземленого п'єзокерамічного включення

діапазон 1

$$\left[u_1^s\right]_-^+ \equiv 2\left(\frac{1}{\varepsilon\gamma}-\frac{1}{\varepsilon}\right)hu^{in'}(r,0)\ ,$$

$$\left[\frac{\partial u_1^s}{\partial z}\right]_-^+ \equiv 2\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\right)h\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)u^{in'}(r,0)+$$

$$+2\left(k^2-2\gamma\left(1+\eta^2\right)k_0^2\right)hu^{in}(r,0),\quad 0\le r\le a,\ z=0\ ; \tag{15}$$

діапазон 2

$$\left[u_0^s\right]_-^+ \equiv \frac{2}{\varepsilon\gamma}h\left(\frac{\partial u_0^s(r,\pm 0)}{\partial z}+\frac{\partial u^{in'}(r,0)}{\partial z}\right),$$

$$\left[\frac{\partial u_0^s}{\partial z}\right]_-^+ \equiv 0\ ,\quad 0\le r\le a,\quad z=0; \tag{16}$$

діапазон 3

$$\left[\frac{\partial u_0^s}{\partial z}\right]_-^+ \equiv -\frac{2}{\gamma}\left(u_1^s(r,\pm 0)+\frac{\partial u^{in'}(r,0)}{\partial z}\right),$$

$$\left[u_0^s\right]_-^+ \equiv 0\ ,\quad 0\le r\le a,\quad z=0. \tag{17}$$

Із моделей (15)–(17) видно, що за електричної умови (9) вплив п'єзоефекту на напружено-деформований стан композиту нівелюється.

Співвідношення (12)–(17) з точністю до головних членів розкладів (10) визначають розв'язок поставленої задачі всюди, за винятком деяких малих околів кінців включення, де виникають примежові шари. Тут розв'язок задачі шукаємо у вигляді примежових поправок, алгоритм побудови яких подано в працях [4, 9 , 11–14].

Висновки. За допомогою теорії сингулярних збурень побудовано математичні моделі динамічної взаємодії тонкого п'єзокерамічного включення з пружним середовищем за осесиметричного кручення композиту та динамічних навантажень. Розглянуто ідеальний механічний контакт між складниками композиту та різні граничні електричні умови на поверхні включення. Запропонований підхід можна використати для дослідження дифракційних полів у пружних композитах із множинними тонкими п'єзокерамічними неоднорідностями.

1. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 488 с.
2. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
3. *Кунецъ Я. І., Матус В. В.* Асимптотичний підхід у динамічних задачах теорії пружності для тіл з тонкими пружними включеннями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – 63, № 1. – P. 75–93.
4. *Мовчан А. Б., Назаров С. А.* Напряженно-деформированное состояние плоской области с тонким упругим включением конечных размеров // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 1. – С. 75–83.
5. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. – Ленинград: ЛГУ, 1983. – 118 с.
6. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – Москва: Наука, 1988. – 472 с.
7. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
8. *Chen W. Q., Lim C. W.* 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium // Int. J. Fract. – 2005. – 131, No. 3. – P. 231–246.
9. *Emets V. F., Kunets Ya. I., Matus V. V.* Scattering of SH waves an elastic thin-walled rigidly supported inclusion // Archive of Appl. Mech. – 2004. – 73. – P. 769–780.
10. *Kanaun S. K., Levin V. M.* Self-consistent methods for composites. – Vol. 2. Wave propagation in heterogeneous materials. – Heidelberg: Springer, 2008. – 302 p.
11. *Kit H. S., Emets V. F., Kunets Ya. I.* A model of the elastodynamic interaction of a thin-walled inclusion with a matrix under antiplanar shear // J. Math. Sci. – 1999. – 97, No. 1. – P. 3810–3816.
12. *Kit H. S., Kunets Ya. I., Mykhas'kiv V. V.* Interaction of a stationary wave with a thin low stiffness pennyshaped inclusion in an elastic body // Mechanics of solids. – 2004. – 39, No. 5. – P. 64–70.
13. *Kit H. S., Kunets Ya. I., Yemets V. F.* Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Int. J. Eng. Sci. – 1999. – 37, No. 3. – P. 331–345.
14. *Kunets Ya. I.* Axisymmetric torsion of an elastic space with a thin elastic inclusion // J. of App. Math. and Mech. – 1987. – 51, No. 4. – P. 497–503.
15. *Kunets Ya. I., Rabosh R. V.* Longitudinal shear of an elastic medium with a thin rectilinear sharp-pointed piezoelectric inclusion of low rigidity // J. Math. Sci. – 2012. – 180, No. 2. – P. 153–160.
16. *Pasternak Ya. M.* Doubly periodic arrays of cracks and thin inhomogeneities in an infinite magnetoelectroelastic medium // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2012. – 36, No. 5. – P. 799–811.
17. *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1980. – 400 p.
18. *Zhang B., Bostrom A., Niklasson A. J.* Antiplane shear waves from a piezoelectric strip actuator: exact versus effective boundary condition solutions // Smart Mater. Struct. – 2004 – 13. – P. 161–168.
19. *Zhuoye C., Donghua W., Wei L., Kong D.* Torsional wave propagation in a piezoelectric radial phononic crystals // Noise Control Eng. J. – 2016. – 64, No. 1. – P. 75–84.

MATHEMATICAL MODELING OF THE DYNAMIC INTERACTION OF THIN PIEZOCERAMIC INCLUSION WITH ELASTIC MEDIUM AT AXISYMMETRIC TORSION OF THE COMPOSITE

Mathematical models of dynamic interaction between a thin plane piezoceramic inclusion and elastic isotropic medium in case of axisymmetric torsion of a composite are constructed. At the interface, the conditions of ideal mechanical contact hold. Cases of electrically insulated and grounded piezoceramic inclusions are considered. Modelling is performed using the apparatus of the theory of singular perturbations.

Key words: *asymptotic models, isotropic medium, thin piezoceramic inclusion, axisymmetric torsion, theory of singular perturbations.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
14.11.21