https://doi.org/10.15407/apmm2021.19.37-43

УДК512.53+512.64

О. В. Зубарук[✉]

ОБЧИСЛЕННЯ Σ-ФУНКЦІЙ ДЛЯ ЦИКЛІЧНИХ НАПІВГРУП МАЛОГО ПОРЯДКУ

Для довільного алгебрично замкненого поля характеристики 0 *обчислено* Σ*-функції числа параметрів для всіх циклічних напівгруп порядку, меншого за* 4*, які є категорно-комбінаторними характеристиками таких напівгруп. Для них описано також матричні алгебри Ауслендера.*

***Ключові слова**: характеристика поля, циклічна напівгрупа, визначальні співвідношення, матричні зображення, нормальна форма Жордана,* Σ*-функція, стабілізатор матриці, алгебра Ауслендера.*

Вступ. Сучасна теорія зображень над полями вивчає як класичні об'єкти (групи, напівгрупи, алгебри Лі), так і порівняно нові (сагайдаки, частково впорядковані множини тощо). Виділимо деякі праці, приділяючи основну увагу математикам, що належать до Київської школи матричних задач, заснованої А. В. Ройтером [1, 2, 4, 7, 11–22]. У сучасній теорії зображень важливу роль відіграють не лише дослідження самих зображень, а й категорії, яку вони утворюють [8, 9]. Якщо зображення алгебричного об'єкта розглядають у матричній формі, то категорію її об'єктів індукує категорія всіх матриць (морфізмами з матриці A в матрицю B є такі матриці X, що $AX = XB$).

Ця праця присвячена вивченню комбінаторних властивостей категорій матричних зображень циклічних напівгруп другого і третього порядків.

Нехай T – матричне зображення скінченно породженої напівгрупи S над полем K. Позначимо через $p(T)$ максимальну кількість незалежних параметрів матриці X, що задовольняє систему лінійних матричних рівнянь $T(s)X = XT(s)$, де s пробігає напівгрупу S. Очевидно, що $p(T)$ не змінюється зі зміною T на еквівалентне йому зображення. Якщо S – напівгрупа скінченного (зображувального) типу над полем K, тобто має скінченну кількість класів еквівалентності нерозкладних зображень, а $T = \{T_1,\ T_2, \ldots,\ T_m\}$ – повна система її нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень, то для $n \in [1,\ m] =: \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$ покладемо:

$$p_n(T) =: \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_n} p(T_{i_1} \oplus T_{i_2} \oplus \cdots \oplus T_{i_n}),\ \Sigma_S(n) =: p_n(T).$$

Введену функцію $\Sigma_S : [1, m] \to N$ називають Σ*-функцією числа параметрів для напівгрупи* S або просто Σ*-функцією напівгрупи* S [5].

У цьому дослідженні обчислено Σ-функцію числа параметрів для всіх таких напівгруп порядку $p = 2,\ 3$ (випадок $p = 1$ тривіальний).

1. **Список циклічних напівгруп порядку** 2 **і** 3. Кожну напівгрупу однозначно задають множина їх елементів (для якої використовуємо круглі дужки), система твірних (вживаємо кутові дужки) та визначальні співвідношення. Напівгрупу називають циклічною, якщо вона породжена одним елементом. Наприклад, єдина напівгрупа порядку 1 ізоморфна циклічній напівгрупі $(a) = \ < a > \ : \ a^2 = a$. Надалі цю тривіальну напівгрупу не розглядатимемо.

✉ Sambrinka@ukr.net

Отже, довільна циклічна напівгрупа ізоморфна напівгрупі

$$\left(a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{q-1}\right) = \ < a > \ :\ a^q = a^p\ ,\ q > p \ge 1.$$

Нульовий елемент напівгрупи (якщо він існує) позначають через 0, а одиничний – через e.

Твердження 1. *Циклічні напівгрупи порядку 2 вичерпуються, з точністю до ізоморфізму, такими двома напівгрупами:*

$$S_{21} = (0,\ a) = \ < a > \ :\ a^2 = 0\,;$$

$$S_{22} = (e,\ a) = \ < a > \ :\ a^2 = e\,.$$

Маємо два випадки:

$$S_{21} = \left(a,\ a^2\right) = \ < a > \ :\ a^3 = a^2\,,$$

$$S_{22} = \left(a,\ a^2\right) = \ < a > \ :\ a^3 = a\,,$$

елемент a^2 у першому з них є нульовим (бо $a^2x = a^2$ для $x = a,\ a^2$), а в другому – одиничним (бо $a^2y = y$ для $y = a,\ a^2$).

Твердження 2. *Циклічні напівгрупи порядку 3 вичерпуються, з точністю до ізоморфізму, такими трьома напівгрупами:*

$$S_{31} = \left(0,\ a,\ a^2\right) = \ < a > \ :\ a^3 = 0\,;$$

$$S_{32} = \left(a,\ a^2,\ a^3\right) = \ < a > \ :\ a^4 = a^2\,;$$

$$S_{33} = \left(e,\ a,\ a^2\right) = \ < a > \ :\ a^3 = e\,.$$

Дійсно, маємо три випадки:

$$S_{31} = \left(a,\ a^2,\ a^3\right) = \ < a > \ :\ a^4 = a^3\,,$$

$$S_{32} = \left(a,\ a^2,\ a^3\right) = \ < a > \ :\ a^4 = a^2\,,$$

$$S_{33} = \left(a,\ a^2,\ a^3\right) = \ < a > \ :\ a^4 = a\,,$$

елемент a^3 у першому з них є нульовим (бо $a^3x = a^3$ для $x = a,\ a^2,\ a^3$), а в третьому – одиничним (бо $a^3y = y$ для $y = a,\ a^2,\ a^3$).

2. **Формулювання основного результату**. Наступна теорема описує Σ-функції для всіх напівгруп другого і третього порядків.

Теорема 1. *Для довільного алгебрично замкненого поля* K *характеристики* 0

$$\Sigma_{S_{21}}(n) = \begin{cases} 3, & \text{якщо } n = 1, \\ 5, & \text{якщо } n = 2; \end{cases}$$

$$\Sigma_{S_{22}}(n) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } n = 1, \\ 2, & \text{якщо } n = 2; \end{cases}$$

$$\Sigma_{S_{31}}(n) = \begin{cases} 6, & \text{якщо } n = 1, \\ 20, & \text{якщо } n = 2, \\ 14, & \text{якщо } n = 3; \end{cases}$$

$$\Sigma_{S_{32}}(n)=\begin{cases}5, & \text{якщо } n=1,\\ 17, & \text{якщо } n=2,\\ 19, & \text{якщо } n=3,\\ 7, & \text{якщо } n=4;\end{cases}$$

$$\Sigma_{S_{33}}(n)=\begin{cases}3, & \text{якщо } n=1,\\ 6, & \text{якщо } n=2,\\ 3, & \text{якщо } n=3.\end{cases}$$

3. **Алгебри Ауслендера**. Переходимо до матричних зображень згаданих напівгруп, але спочатку нагадаємо основні поняття.

Нехай S – напівгрупа порядку, більшого за 1. Матричним зображенням розмірності k напівгрупи S над полем K називають довільний гомоморфізм $\Psi : S \to M_k(K)$ напівгрупи S у напівгрупу $M_k(K)$ всіх квадратних матриць порядку k над полем K. Надалі вважатимемо, що нульовому елементу напівгрупи S (якщо він є) відповідає нульова матриця, а одиничному – одинична. Два матричних зображення Ψ і Ψ' називають еквівалентними, якщо існує така оборотна матриця C, що $\Psi'(x) = C\Psi(x)C^{-1}$ для будь-якого $x \in S$. Очевидно, вказану рівність, як і самі матричні зображення, досить розглядати лише для елементів довільної фіксованої системи твірних напівгрупи S.

Пряма сума $\Psi \oplus \Psi'$ матричних зображень Ψ і Ψ' – це таке матричне зображення Φ, що

$$\Phi = \begin{pmatrix}\Psi(x) & 0\\ 0 & \Psi'(x)\end{pmatrix}$$

для будь-якого $x \in S$. Зображення Ψ називають розкладним, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох зображень, і нерозкладним – в іншому разі.

Надалі матрицю (x) розміру 1×1 ототожнюємо зі самим елементом $x \in K$.

Теорема 2. *Повні системи нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень циклічних напівгруп другого та третього порядків над алгебрично замкненим полем характеристики 0 такі:*

1) $S_{21} = (0,\ a) = \ < a > \ :\ a^2 = 0$;

$T_1:\ a \to 0$;

$$T_2:\ a \to \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

2) $S_{22} = (e,\ a) = \ < a > \ :\ a^2 = e$;

$T_1:\ a \to 1$;

$T_2:\ a \to -1$;

3) $S_{31} = (0,\ a,\ a^2) = \ < a > \ :\ a^3 = 0$;

$T_1:\ a \to 0$;

$$T_2:\ a \to \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$T_3 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

4) $S_{32} = \left(a,\ a^2,\ a^3\right) = \ < a > \ : \ a^4 = a^2;$

$T_1 : \ a \to 0;$

$T_2 : \ a \to 1;$

$T_3 : \ a \to -1;$

$$T_4 : \ a \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

5) $S_{33} = \left(e,\ a,\ a^2\right) = \ < a > \ : \ a^3 = e;$

$T_1 : \ a \to 1;$

$T_2 : \ a \to \varepsilon;$

$T_3 : \ a \to \varepsilon^2,$

де $1 \neq \varepsilon = \sqrt[3]{1}$.

Доведення випливає (після елементарних обчислень) з відомих результатів лінійної алгебри про нормальну форму Жордана для перетворень подібності матриць (див. теорему 2 [3]).

Для матриці A над полем K позначаємо через $St(A)$ її стабілізатор, тобто алгебру всіх таких матриць X, що $AX = XA$.

Нехай S – циклічна напівгрупа, породжена елементом a, і $T = \{T_1,\ T_2, \ldots,\ T_m\}$ – повна система її нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень над полем K.

Згідно зі загальним означенням, матричною алгеброю Ауслендера $\mathrm{A}(S)$ напівгрупи S називають алгебру $St\left(T_1(a) \oplus T_2(a) \oplus \cdots \oplus \ T_m(a)\right)$. Вона не залежить (з точністю до спряженості в повній матричній алгебрі) від вибору представників у класах еквівалентності зображень (див. працю [6]).

Наступна теорема описує алгебри Ауслендера для всіх циклічних напівгруп другого і третього порядків (матриці записані в блоковому вигляді згідно з розмірностями нерозкладних зображень T_i).

Теорема 3. *Для довільного алгебрично замкненого поля* K *характеристики* 0

$$\mathrm{A}\left(S_{21}\right) = St\left(T_1(a) \oplus T_2(a)\right) = \left\{\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{22} \end{pmatrix}\right\};$$

$$\mathrm{A}\left(S_{22}\right) = St\left(T_1(a) \oplus T_2(a)\right) = \left\{\begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}\right\};$$

$$\mathrm{A}\left(S_{31}\right)=St\left(T_1(a)\oplus T_2(a)\oplus T_3(a)\right)=\left\{\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & 0 & 0 & x_{16} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & x_{25} & x_{26} \\ 0 & 0 & x_{22} & 0 & 0 & x_{25} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} \\ 0 & 0 & x_{42} & 0 & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{44} \end{pmatrix}\right\};$$

$$\mathrm{A}\left(S_{32}\right)=St\left(T_2(a)\oplus T_3(a)\oplus T_1(a)\oplus T_4(a)\right)=\left\{\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & x_{35} \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{44} \end{pmatrix}\right\};$$

$$\mathrm{A}\left(S_{33}\right)=St\left(T_1(a)\oplus T_2(a)\oplus T_3(a)\right)=\left\{\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}\right\},$$

де (в усіх випадках) x_{ij} *пробігають поле* K*.*

Зауважимо, що в деяких випадках матриці $T_i(a)$ розташовані не в порядку зростання індексу i. Це зроблено заради простішого вигляду алгебр Аусслендера (зокрема, природнішого розташування нульових елементів у відповідних матрицях).

Д о в е д е н н я. Оскільки для всіх алгебр Аусслендера всі матриці $T_i(d)$ є клітинами Жордана, то доведення теореми випливає з відомих результатів [10, гл. VIII, §2] про явний вигляд матриць, які комутують з довільною фіксованою матрицею у вигляді нормальної форми Жордана.

4. **Доведення теореми** 1. Для напівгруп S_{21} і S_{22} (другого порядку) теорема випливає із §2 праці [5].

Нехай тепер S – циклічна напівгрупа третього порядку і нехай m – кількість класів еквівалентності її нерозкладних матричних зображень. Тоді функція $\Sigma_S(n)$ визначена на множині $[1,m]$ і її значення для $n=m$ дорівнює числу незалежних параметрів матриці, яка задає відповідну алгебру Аусслендера. Перебором всіх випадків легко впевнитися, що в кожному з них число $\Sigma_S(m)$ збігається з вказаним в умові теореми 1. Якщо $1\le n<m$, то доводять аналогічно, але число параметрів підраховують вже в стабілізаторах часткових прямих сум нерозкладних зображень (вказаних у теоремі 2). Але повторно використовувати результати із праці [10] не слід, бо простіше скористатися твердженням, яке випливає із правила множення блокових матриць.

Твердження 3. *Нехай* A_1, A_2, …, A_m *– квадратні матриці над полем* K *і* A *– їх пряма сума. Зафіксуємо таку послідовність натуральних чисел* $I=\left(i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_s\right)$, *де* $1\le s<m$, *що* $1\le i_1<i_2<\dots<i_s$, *і позначимо через* A_I *пряму суму матриць* $A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_s}$. *Параметричні матриці*

$St(A)$ *і* $St(A_I)$ *вважатимемо, як і матриці* A *та* A_I*, блочними* (*розміри блоків залежать від розмірностей матриць* A_1, A_2, $\ldots$, A_m). *Тоді* $St(A_I)$ *– блокова підматриця матриці* $St(A)$*, яка стоїть на перетині горизонтальних і вертикальних смуг з номерами із* I.

1. *Бондаренко В. М.* Связки полуцепных множеств и их представления // Препр. АН УССР. Ин-т математики; 88.60 – Киев, 1988. – 32 с.
2. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления: Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – 71. – С. 24–41.
3. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: Математика і інформатика. – 2018. – 32, № 1. – С. 36–49.
4. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Про матричні зображення моноїдів четвертого порядку // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: Математика і інформатика. – 2018. – 33, № 2. – С. 19–26.
5. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Σ-функція числа параметрів для системи матричних зображень // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – 12, № 3. – С. 56–64.
6. *Бондаренко В. М., Костишин Е. М.* Модулярні зображення з додатковими умовами напівгрупи $T_2 \times S_2$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: Математика і інформатика. – 2017. – 31, № 2. – С. 28–36.
7. *Бондаренко В. М., Назарова Л. А., Завадский А. Г.* О представлениях ручных частично упорядоченных множеств // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН УССР., 1979. – С. 75–105.
8. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. – Москва: Мир, 1972. – 260 с.
9. *Габриэль П., Ройтер А. В.* Представления конечномерных алгебр // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фунд. направления. – 2003. – 73. – 224 с.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1966, – 576 с.
11. *Гельфанд И. М., Пономарьов В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи матем. наук – 1968. – 23, вып. 2. – С. 3–60.
12. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 104–114.
13. *Дяченко С. М.* Напівгрупи Рісса над циклічною групою простого порядку скінченного зображувального типу // Наукові записки НаУКМА (Фіз.-матем. науки). – 2016. – 178. – С. 23–26.
14. *Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В.* Ручные частино упорядоченные множества с инволюцией // Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. – 1990. – 183. – С. 149–159.
15. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – 28. – С. 5–31.
16. *Bondarenko V. M.* Linear operators on S-graded vector spaces // Linear algebra and its app. – 2003. – 365. – P. 45–90.
17. *Bondarenko V. M., Gerasimova T. G., Sergeichuk V. V.* Pairs of mutually annihilating operators // Linear algebra and its app. - 2009. – 430 (1). – P 86–105.
18. *Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M.* On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$ // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – 16, No. 1. – P. 16–19.
19. *Bondarenko, V. M., Tertychna O. M.* On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication // Algebra Discrete Math. – 2008. – No. 4. – P. 15–22.
20. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M., Zubaruk O. V.* On classificatio of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition // Algebra and Discrete Mathematics. – 2016. – 21, No. 1. – P. 18–23.
21. *Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.* On characteristic properties of semigroups // Algebra Discrete Math. – 2015 – 20, No. 1. – P. 32–39.
22. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I // Manus. Math. – 1972. – 6, No. 1. – P. 71–103.

CALCULATIONS OF Σ-FUNCTIONS FOR CYCLIC SEMIGROUPS OF SMALL ORDER

For an arbitrary algebraically closed field of characteristic 0, we calculate the Σ-functions of the number of parameters for all cyclic semigroups of order less than 4, which are categorically combinatorial characteristics of such semigroups. For them, the matrix Auslender algebras are also described.

Key words: characteristic of a field, cyclic semigroup, defining relations, matrix representation, normal Jordan form, Σ-function, matrix stabilizer, Auslander algebra.

Київ. нац. ун-т
ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
03.12.21