

РОЗРАХУНОК ВІЛЬНИХ ПОЗДОВЖНИХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛОКАЦІЇ

На прикладі задачі про розрахунок вільних поздовжніх коливань стрижня, один кінець якого жорстко закріплений, а інший вільний, досліджено похибку апроксимації хвильових процесів за допомогою В-сплайнів третього степеня. Похибку визначено шляхом порівняння отриманого розв'язку з розв'язком зі застосуванням рядів Фур'є. Встановлено залежність похибки обчислень від сітки вузлів за довжиною стрижня, а також від кроку розбиття процесу коливань за часом. Виявлено високу збіжність методу сплайн-колокації.

Ключові слова: метод сплайн-колокації, вільні поздовжні коливання стрижня.

Вступ. Метод сплайн-колокації широко застосовують для розрахунку коливань елементів конструкцій – стрижнів, пластин і оболонок [2, 6–8]. Аналіз методів розрахунків для оболонок наведено раніше [4]. Про використання сплайнів до розв'язання диференціальних рівнянь із частинними похідними йдеться в монографії [5]. Для моделювання хвильових процесів, які описують диференціальні рівняння другого порядку, використовують сплайни третього степеня. Тому необхідно дослідити залежність збіжності та відносної похибки методу від відстані h між точками розбиття стрижня за довжиною та кроку за часом δ , на які ділять час коливань, щоб апроксимувати частинні похідні від часу.

1. **Формулювання задачі.** Розглянемо коливання стрижня завдовжки ℓ зі жорстко закріпленим кінцем $x = 0$ та вільним $x = \ell$, до якого в нульовий момент часу прикладено силу P_0 (рис. 1).

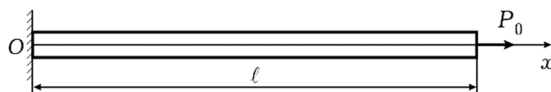


Рис. 1

Після того, як кінець стержня відпущено, виникають вільні поздовжні коливання, які описує рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

де $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, E – модуль Юнга, ρ – густина.

Граничні умови в будь-який момент часу t мають вигляд

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(\ell, t)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Початкова деформація

$$\varepsilon_0 = \frac{P_0}{ES},$$

де S – площа поперечного перерізу стрижня. Тоді початкові умови мають вигляд

✉ ipodil19@gmail.com

$$u(x, 0) = \varepsilon_0 x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Власні частоти коливань стрижня обчислимо за формулою

$$\omega = \frac{(2k+1)\pi a}{2\ell}, \quad k = 0, 1, \dots$$

2. Сплайни третього степеня. Оскільки рівняння (1) є диференціальним із частинними похідними другого порядку, то його розв'язок шукатимемо у вигляді суми сплайнів третього степеня.

Розіб'ємо відрізок $[0, \ell]$ на рівномірну розширену сітку:

$$x_{-1} < x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = \ell < x_{N+1},$$

де N – деяке непарне число, $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$.

Визначимо коливання стрижня на проміжку часу

$$T = \frac{1}{\omega_{\min}} = \frac{2\ell}{5\pi a},$$

який розіб'ємо на M відрізків:

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{M-1} < t_M = T,$$

де $t_{k+1} - t_k = \delta = \text{const}$.

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(x, t_k) = \sum_{i=-1}^{N+1} a_i(t_k) B_3^i(x), \quad (4)$$

де $a_i(t_k)$ – коефіцієнти, які необхідно визначити; $B_3^i(x)$ – такі сплайн-функції [1]

$$B_3^i(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_{i-2}, \\ c^3, & x_{i-2} \leq x < x_{i-1}, \\ -3c^3 + 3c^2 + 3c + 1, & x_{i-1} \leq x < x_i, \\ 3c^3 - 6c^2 + 4, & x_i \leq x < x_{i+1}, \\ (1-c)^3, & x_{i+1} \leq x < x_{i+2}, \\ 0, & x_{i+2} \leq x < \infty, \end{cases} \quad (5)$$

де $c = x - x_j$ на відрізку $[x_j, x_{j+1}]$.

Найбільшу точність розрахунку досягають [1], якщо точки колокації

$$\xi_{2i} = x_{2i} + \rho_1 h, \quad \xi_{2i+1} = x_{2i+1} + \rho_2 h, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (6)$$

де ρ_1, ρ_2 – корені полінома Лежандра другого порядку, $\rho_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$,

$$\rho_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad n = (N-1)/2.$$

3. Граничні та початкові умови, виражені через сплайни. Підставляючи вираз (4) у граничні умови (2) та враховуючи (5), отримуємо для будь-якого моменту часу t_k , $k = 0, 1, \dots, M$, такі співвідношення:

$$\begin{aligned} a_{-1}(t_k) + 4a_0(t_k) + a_1(t_k) &= 0, \\ a_{N-1}(t_k) - a_{N+1}(t_k) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Підставляючи вираз (4) для точок (6) у початкову умову (3) і враховуючи вид сплайн-функцій (5), знаходимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів a_i у нульовий момент часу t_0 :

$$\begin{cases} a_{i-1}(t_0)B_3^{i-1}(\xi_{2i}) + a_i(t_0)B_3^i(\xi_{2i}) + a_{i+1}(t_0)B_3^{i+1}(\xi_{2i}) + \\ \quad + a_{i+2}(t_0)B_3^{i+2}(\xi_{2i}) = \varepsilon_0 \xi_{2i}, \\ a_{i-1}(t_0)B_3^{i-1}(\xi_{2i+1}) + a_i(t_0)B_3^i(\xi_{2i+1}) + a_{i+1}(t_0)B_3^{i+1}(\xi_{2i+1}) + \\ \quad + a_{i+2}(t_0)B_3^{i+2}(\xi_{2i+1}) = \varepsilon_0 \xi_{2i+1}, \\ \quad \quad \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{cases} \quad (8)$$

Система $N + 1$ рівнянь (8) та два рівняння (7) для моменту часу t_0 утворюють систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для обчислення коефіцієнтів $a_j(t_0)$, $j = -1, 0, 1, \dots, N + 1$, тобто визначають стаціонарні переміщення стрижня.

Оскільки з другої рівності початкових умов (3)

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \approx \frac{u(x, t_1) - u(x, t_0)}{\delta} = 0,$$

то для моменту часу t_1 СЛАР для обчислення коефіцієнтів $a_j(t_1)$ збігається зі СЛАР для розрахунку коефіцієнтів $a_j(t_0)$ за умови, що крок розбиття за часом δ є досить малий.

4. Обчислення динамічних переміщень стрижня. Підставляючи вираз (4) у рівняння (1), отримаємо:

$$\sum_{i=-1}^{N+1} \ddot{a}_i(t_k) B_3^i(x) - a^2 \sum_{i=-1}^{N+1} a_i(t_k) B_3^{i''}(x) = 0, \quad (9)$$

де $B_3^{i''}(x)$ – похідні другого порядку сплайн-функцій (5); другі похідні за часом $\ddot{a}_i(t_k)$ апроксимуємо так:

$$\ddot{a}_i(t_k) \approx \frac{a_i(t_{k+1}) - 2a_i(t_k) + a_i(t_{k-1}))}{\delta^2}.$$

Маючи коефіцієнти $a_j(t_0)$ та $a_j(t_1)$, можемо поступово обчислювати коефіцієнти

$$a_j(t_2), a_j(t_3), \dots, a_j(t_M), \quad j = -1, 0, 1, \dots, N, N + 1, \quad (10)$$

зі систем $N + 1$ рівнянь

$$\begin{aligned} & a_{i-1}(t_{k+2})B_3^{i-1}\left(\begin{matrix} \xi_{2i} \\ \xi_{2i+1} \end{matrix}\right) + a_i(t_{k+2})B_3^i\left(\begin{matrix} \xi_{2i} \\ \xi_{2i+1} \end{matrix}\right) + \\ & \quad + a_{i+1}(t_{k+2})B_3^{i+1}\left(\begin{matrix} \xi_{2i} \\ \xi_{2i+1} \end{matrix}\right) + a_{i+2}(t_{k+2})B_3^{i+2}\left(\begin{matrix} \xi_{2i} \\ \xi_{2i+1} \end{matrix}\right) = \\ & = (2a_{i-1}(t_{k+1}) - a_{i-1}(t_k))B_3^{i-1}\left(\begin{matrix} \xi_{2i} \\ \xi_{2i+1} \end{matrix}\right) + \\ & \quad + (2a_i(t_{k+1}) - a_i(t_k))B_3^i\left(\begin{matrix} \xi_{2i} \\ \xi_{2i+1} \end{matrix}\right) + \\ & \quad + (2a_{i+1}(t_{k+1}) - a_{i+1}(t_k))B_3^{i+1}\left(\begin{matrix} \xi_{2i} \\ \xi_{2i+1} \end{matrix}\right) + \\ & \quad + (2a_{i+2}(t_{k+1}) - a_{i+2}(t_k))B_3^{i+2}\left(\begin{matrix} \xi_{2i} \\ \xi_{2i+1} \end{matrix}\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E\delta^2}{\rho} \left(a_{i-1}(t_{k+1})B_3^{i-1n} \begin{pmatrix} \xi_{2i} \\ \xi_{2i+1} \end{pmatrix} + a_i(t_{k+1})B_3^{in} \begin{pmatrix} \xi_{2i} \\ \xi_{2i+1} \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. + a_{i+1}(t_{k+1})B_3^{i+1n} \begin{pmatrix} \xi_{2i} \\ \xi_{2i+1} \end{pmatrix} + a_{i+2}(t_{k+1})B_3^{i+2n} \begin{pmatrix} \xi_{2i} \\ \xi_{2i+1} \end{pmatrix} \right), \\
& i = 0, 1, \dots, n, \quad (11)
\end{aligned}$$

та двох рівнянь (7). Матриця системи лінійних алгебричних рівнянь (11), (7) є діагональною з чотирма елементами по діагоналі.

5. **Похибка обчислення за методом сплайн-колокації.** Розв'язок, отриманий після підставлення коефіцієнтів (10) у вираз (4), порівнюватимемо з відомим розв'язком Фур'є цієї задачі [3]:

$$u_F(x, t) = \frac{8\varepsilon_0 \ell}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2\ell} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2\ell}.$$

Відносну похибку у відсотках, яку досліджуватимемо для різних довжин відрізків розбиття стрижня h та різних значень кроку розбиття часу δ , обчислимо за формулою

$$\Delta(x, t) = \max \left(\frac{u(x, t) - u_F(x, t)}{u_F(x, t)} \cdot 100 \right).$$

У таблиці наведено значення похибки $\Delta(x, t)$ [%] для балки ($\ell = 2$ м, $S = 0.006$ м², $E = 2.1 \times 10^{11}$ МПа, $\rho = 7800$ кг/м³, $P_0 = 220$ кН, $T = 4.9077 \times 10^{-5}$ с) залежно від кількості відрізків розбиття стрижня $N = \ell/h$ та кількості $M = T/\delta$ відрізків, на які розбито максимальний період вільних коливань T . Відносною є найбільша похибка за довжиною стрижня в момент часу $t_M = T$.

Зазначимо, що суттєвою є похибка у точках колокації, які найбільш наближені до країв стрижня. Похибка апроксимації динамічних процесів методом сплайн-колокації демонструє високу точність вже під час вибору розбиття по довжині балки до 100 точок та розбиття за інтервалами часу до 50 інтервалів (див. таблицю).

$M \backslash N$	21	41	61	81
10	1.24	1.22	1.21	1.20
20	0.73	0.62	0.58	0.57
30	0.58	0.49	0.38	0.36
40	0.49	0.41	0.32	0.26
50	0.44	0.33	0.28	0.23

Висновки. Метод сплайн-колокації з використанням сплайнів третього степеня виявився точним для апроксимації процесів коливання і придатним для розрахунків динаміки стрижнів, пластин і оболонок. Похибка розрахунку під час розбиття стрижня лише на 21 відрізок і часу коливань лише на 10 відрізків становить 1.24 %. За обрання густішої сітки розбиття як за координатою, так і за часом отримуємо точніші результати: під час розбиття стрижня на 81 відрізок і періоду коливань на 50 відрізків похибка обчислення становить 0.23 %.

1. *Механіка композитів: В 12-ти т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 11: Численные методы / Я. М. Григоренко, Ю. Н. Шевченко, Василенко А. Т. та ін. – Киев: «А.С.К.», 2002. – 448 с.*
2. *Луговой П. З., Скосаренко Ю. В., Орленко С. П., Шугайло А. П. Применение метода сплайн-коллокации для решения задач статики и динамики многослойных*

- цилиндрических оболочек с конструктивными и технологическими особенностями // Прикл. механика – 2019. – 55, № 5. – С. 78-88.
Те саме: *Lugovoi P. Z., Skosarenko Yu. V., Orlenko S. P., Shugailo A. P.* Application of the spline-collocation method to solve problems of statics and dynamics for multilayer cylindrical shells with design and manufacturing features // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, No. 5. – P. 524–533.
– <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00974-y>.
3. *Hagedorn P., DasGupta A.* Vibrations and waves in continuous mechanical systems. – Hoboken: Wiley, 2007. – 398 p.
 4. *Qatu M. S., Asadi E., Wang W.* Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000–2010 // Open J. Compos. Mater. – 2012. – 2, No. 3. – P. 61–86. – <https://doi.org/10.4236/ojcm.2012.23009>.
 5. *Schiesser W. E.* Spline collocation methods for partial differential equations. – Hoboken: John Wiley & Sons Inc., 2017. – 550 p.
 6. *Viswanathan K. K., Navaneethakrishnan P. V.* Free vibration study of layered cylindrical shells by collocation with splines // J. Sound Vib. – 2003. – 260, No. 5. – P. 807–827. – [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)00923-9](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)00923-9).
 7. *Lai-Yun Wu, Yang-Tzung Chen.* Application of spline-collocation method in analysis of beam and continuous beam // J. Mech. – 2003. – 19, No. 2. – P. 319–326.
– <https://doi.org/10.1017/S1727719100004354>.
 8. *Song Xiang, Ying-tao Chen.* Meshless local collocation method for natural frequencies and mode shapes of laminated composite shells // Struct. Eng. Mech. – 2014. – 51, No. 6. – P. 893-907.
– <https://doi.org/10.12989/sem.2014.51.6.893>.

CALCULATION OF FREE LONGITUDINAL VIBRATIONS OF A BEAM BY SPLINE COLLOCATION METHOD

On the example of the problem of free longitudinal vibrations of a beam free at one end and fixed at the other end the error of vibration process approximation by third-degree Beta-splines is examined. The error is calculated by comparing the obtained solution with the solution of Fourier. The error dependence on node net by the beam length as well as on the step of time partition of the vibration process is obtained. The high convergence of the spline collocation method is shown.

Key words: spline collocation method, free longitudinal vibrations of a beam