https://doi.org/10.15407/apmm2021.19.19-24

УДК 539.3

Л. І. Постолакі✉

ВЛАСНІ ФУНКЦІЇ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ БІГАРМОНІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА

Побудовано власні функції осесиметричних бігармонічних задач для скінченного циліндра, торці якого вільні від навантажень або закріплені. Числово проаналізовано системи трансцендентних рівнянь, які при цьому виникають, та отримано асимптотичні подання для коренів цих систем.

***Ключові слова**: власні функції, скінченний циліндр, бігармонічне рівняння, функція Лява.*

Вступ. Методи розв'язування задач визначення напружено-деформованого стану циліндричних тіл розвинуто в працях [1, 3, 5, 6]. В окремих випадках їх розв'язано аналітично або з використанням методу скінченних елементів [4, 8]; до інших застосовано експериментальні підходи [7].

Для аналітичного розв'язування осесиметричних задач теорії пружності для циліндра вжито метод однорідних розв'язків. Наведено [1] систему власних функцій осесиметричної задачі теорії пружності для циліндра, на бічній поверхні якого задано однорідні умови в напруженнях. Систему отримано з використанням подання Папковича–Нейбера. На її основі розроблено варіаційний метод однорідних розв'язків для осесиметричних задач теорії пружності для циліндра з ненавантаженою бічною поверхнею [5, 6]. Розв'язок задачі підпорядкований крайовим умовам, заданим на торці циліндра, за квадратичною нормою. Реалізація такого методу призводить до безмежної системи лінійних алгебричних рівнянь, яку розв'язують методом редукції, обмежуючись у сумах скінченною кількістю членів.

Нижче розглянуто власні функції осесиметричних бігармонічних задач для скінченного циліндра, побудованих з використанням функції Лява, та досліджено корені трансцендентних рівнянь, які виникають під час розв'язування лінійних однорідних систем. Розглянуто випадки, коли на торцях скінченного циліндра задано однорідні умови в напруженнях або в переміщеннях.

1. **Формулювання задачі**. Розглянемо осесиметричну задачу для скінченного циліндра $\{0 \le \xi \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, -b \le \zeta < b\}$, де ξ та ζ – радіальна та осьова циліндричні координати, нормовані за зовнішнім радіусом циліндра R, θ – колова координата, b – половинна висота циліндра, нормована на R. Нехай торцеві поверхні циліндра $\zeta = \pm b$ вільні від силових навантажень

$$\sigma_{zz}\big|_{\zeta=\pm b} = 0\,, \quad \sigma_{rz}\big|_{\zeta=\pm b} = 0 \tag{1}$$

або жорстко закріплені

$$u_r\big|_{\zeta=\pm b} = 0\,, \quad u_z\big|_{\zeta=\pm b} = 0\,. \tag{2}$$

Відомий підхід [5, 6] до розв'язування осесиметричних задач з однорідними умовами (1) та (2) з використанням функції Лява χ [2], яка задовольняє однорідне бігармонічне рівняння

$$\nabla^2\nabla^2\chi = 0\,. \tag{3}$$

✉ lesya.postolaki@gmail.com

Компоненти тензора напружень σ_{rr}, σ_{zz}, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rz} та вектора переміщень u_r, u_z виражено через функцію Лява χ так [2]:

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\nu\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial\xi^2}\right), \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left((2-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial\zeta^2}\right),$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\nu\nabla^2\chi - \frac{1}{\xi}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}\right], \quad \sigma_{rz} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial\zeta^2}\right), \tag{4}$$

$$2Gu_r = -\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi\partial\zeta}, \quad 2Gu_z = 2(1-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial\zeta^2}. \tag{5}$$

Тут $G = E/(2(1+\nu))$ – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона, E – модуль Юнга матеріалу циліндра.

2. **Вільні від навантажень торці циліндра**. Розв'язок рівняння (3) шукатимемо у вигляді добутку двох функцій окремих змінних $h_0(\xi)$ та $\varphi(\zeta)$:

$$\chi(\xi,\zeta) = h_0(\xi)\varphi(\zeta), \tag{6}$$

де $h_0(\xi) = CH_0^{(1)}(\gamma\xi) + DH_0^{(2)}(\gamma\xi)$, C, D – невідомі константи, $H_0^{(1)}(\gamma\xi)$, $H_0^{(2)}(\gamma\xi)$ – функції Ганкеля нульового порядку першого та другого родів, відповідно.

Підставивши подання (6) у формули (4) та (5), отримаємо вирази для знаходження компонент тензора напружень та вектора переміщень

$$\sigma_{zz} = h_0(\xi)\left((1-\nu)\varphi'''(\zeta) - (2-\nu)\gamma^2\varphi'(\zeta)\right), \tag{7}$$

$$\sigma_{rr} = h_0(\xi)\left(\nu\varphi'''(\zeta) + (1-\nu)\gamma^2\varphi'(\zeta)\right) - \frac{\gamma}{\xi}h_1(\xi)\varphi'(\zeta), \tag{8}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \nu h_0(\xi)\left(\varphi'''(\zeta) - \gamma^2\varphi'(\zeta)\right) + \frac{\gamma}{\xi}h_1(\xi)\varphi'(\zeta), \tag{9}$$

$$\sigma_{rz} = \gamma h_1(\xi)\left(\nu\varphi''(\zeta) + \gamma^2(1-\nu)\varphi(\zeta)\right), \tag{10}$$

$$2Gu_r = \gamma h_1(\xi)\varphi'(\zeta), \tag{11}$$

$$2Gu_z = h_0(\xi)\left((1-2\nu)\varphi''(\zeta) + 2\gamma^2(\nu-1)\varphi(\zeta)\right), \tag{12}$$

де $h_1(\xi) = CH_1^{(1)}(\gamma\xi) + DH_1^{(2)}(\gamma\xi)$, а підставивши його у рівняння (3), - звичайне диференціальне рівняння на функцію $\varphi(\zeta)$

$$\varphi^{IV}(\zeta) - 2\gamma^2\varphi''(\zeta) + \gamma^4\varphi(\zeta) = 0,$$

розв'язком якого є

$$\varphi(\zeta) = (L_1 + L_2\zeta)\cosh(\gamma\zeta) + (L_3 + L_4\zeta)\sinh(\gamma\zeta).$$

Функцію $\varphi(\zeta)$ зручно розглядати як суму парної та непарної частин:

$$\varphi(\zeta) = \varphi^e(\zeta) + \varphi^o(\zeta), \tag{13}$$

де $\varphi^e(\zeta) = L_1\cosh(\gamma\zeta) + L_4\zeta\sinh(\gamma\zeta)$, $\varphi^o(\zeta) = L_3\sinh(\gamma\zeta) + L_2\zeta\cosh(\gamma\zeta)$, L_1, L_2, L_3, L_4 – невідомі константи.

Якщо прийняти $\varphi(\zeta) = \varphi^e(\zeta)$, то формули (6)–(12) визначають антисиметричний відносно площини $\zeta = 0$ напружено-деформований стан циліндра, а в іншому випадку, коли $\varphi(\zeta) = \varphi^o(\zeta)$, – симетричний.

Нехай на торцях циліндра задано однорідні умови в напруженнях (1). Підставляючи (7), (10) в умови (1), одержимо однорідну лінійну систему рівнянь для невизначених констант $L_1, \ldots, L_4$. Використовуючи (13), подамо її у вигляді двох однорідних систем з двома невідомими для парної функції $\varphi^e(\zeta)$:

$$\begin{cases} \gamma \sinh(\gamma b) L_1 + ((2\nu - 1)\sinh(\gamma b) + \gamma b \cosh(\gamma b)) L_4 = 0, \\ \gamma \cosh(\gamma b) L_1 + (2\nu \cosh(\gamma b) + \gamma b \sinh(\gamma b)) L_4 = 0 \end{cases} \tag{14}$$

та непарної $\varphi^o(\zeta)$:

$$\begin{cases} ((2\nu - 1)\cosh(\gamma b) + \gamma b \sinh(\gamma b)) L_2 + \gamma \cosh(\gamma b) L_3 = 0, \\ (2\nu \sinh(\gamma b) + \gamma b \cosh(\gamma b)) L_2 + \gamma \sinh(\gamma b) L_3 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

частин.

Умови сумісності лінійних однорідних систем (14), (15) призводять відповідно до трансцендентних рівнянь

$$\sinh(2\gamma b) - 2\gamma b = 0, \tag{16}$$

$$\sinh(2\gamma b) + 2\gamma b = 0. \tag{17}$$

Множини розв'язків цих систем визначимо як

$$\frac{L_1}{L_4} = \kappa^e \equiv -\frac{2\nu}{\gamma} - b \tanh(\gamma b), \quad \frac{L_3}{L_2} = \kappa^o \equiv -\frac{2\nu}{\gamma} - \frac{b}{\tanh(\gamma b)}.$$

Кожне з рівнянь (16), (17) має єдиний дійсний корінь $\gamma = 0$ та безмежні послідовності комплексних коренів γ_k. Коли γ_k є комплексним коренем одного з рівнянь, то його коренями будуть також $-\gamma_k$, $\bar{\gamma}_k$, і $-\bar{\gamma}_k$, де рискою позначено комплексне спряження. Тому кожне з рівнянь має по чотири безмежних послідовності комплексних коренів. Дійсні α_k й уявні β_k частини коренів $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$ рівнянь (16) та (17) задовольняють системи трансцендентних рівнянь

$$\begin{cases} \sinh(2\alpha_k)\cos(2\beta_k) - 2\alpha_k = 0, \\ \cosh(2\alpha_k)\sin(2\beta_k) - 2\beta_k = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sinh(2\alpha_k)\cos(2\beta_k) + 2\alpha_k = 0, \\ \cosh(2\alpha_k)\sin(2\beta_k) + 2\beta_k = 0. \end{cases}$$

Асимптотичні значення коренів α_k, β_k рівнянь (16) та (17), якщо $k \to \infty$, визначають формули

$$\alpha_k = \frac{1}{2}\ln(\pi + 4\pi k), \quad \beta_k = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z, \tag{18}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2}\ln(\pi + 4\pi k), \quad \beta_k = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z. \tag{19}$$

3. **Закріплені торці циліндра**. Тепер нехай на торцях циліндра задано однорідні умови в переміщеннях (2). У цьому випадку отримуємо однорідну лінійну систему для невизначених констант $L_1, \ldots, L_4$. Використовуючи (13), подамо її у вигляді двох однорідних систем з двома невідомими кожна для парної функції $\varphi(\zeta) = \varphi^e(\zeta)$

$$\begin{cases} \gamma \sinh(\gamma b) L_1 + (\sinh(\gamma b) + \gamma b \cosh(\gamma b)) L_4 = 0, \\ \gamma \cosh(\gamma b) L_1 + ((4\nu - 2)\cosh(\gamma b) + \gamma b \sinh(\gamma b)) L_4 = 0 \end{cases} \tag{20}$$

та непарної $\varphi(\zeta) = \varphi^o(\zeta)$

$$\begin{cases} (\cosh(\gamma b) + \gamma b \sinh(\gamma b)) L_2 + \gamma \cosh(\gamma b) L_3 = 0, \\ ((4\nu - 2)\sinh(\gamma b) + \gamma b \cosh(\gamma b)) L_2 + \gamma \sinh(\gamma b) L_3 = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Умови сумісності лінійних однорідних систем (20), (21) призводять до трансцендентних рівнянь

$$(4\nu - 3)\sinh(2\gamma b) - 2\gamma b = 0, \tag{22}$$

$$(4\nu - 3)\sinh(2\gamma b) + 2\gamma b = 0. \tag{23}$$

Множини розв'язків систем (20) та (21) визначимо як

$$\frac{L_1}{L_4} = \kappa^e \equiv -\frac{1}{\gamma} - \frac{b}{\tanh(\gamma b)}, \quad \frac{L_3}{L_2} = \kappa^o \equiv -\frac{1}{\gamma} - b\tanh(\gamma b).$$

Асимптотичні значення коренів α_k, β_k рівнянь (22) та (23), якщо $k \to \infty$, визначають формули:

$$\alpha_k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi + 4\pi k}{3 - 4\nu}\right), \quad \beta_k = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z, \tag{24}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi + 4\pi k}{3 - 4\nu}\right), \quad \beta_k = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z. \tag{25}$$

4. **Числове дослідження коренів трансцендентних рівнянь**. У таблиці подано значення похибок відповідних коренів, обчислених для $k = 20$, які розраховано як

$$\delta\alpha_k = \left|\tilde{\alpha}_k - \alpha_k\right| / \alpha_k, \quad \delta\beta_k = \left|\tilde{\beta}_k - \beta_k\right| / \beta_k.$$

Тут α_k, β_k – корені трансцендентних рівнянь (16), (17), (22) та (23), обчислені шляхом мінімізації нев'язки; $\tilde{\alpha}_k$, $\tilde{\beta}_k$ – корені, отримані за асимптотичними формулами (18), (19) та (24), (25).

Рівняння (16)		Рівняння (17)	
$\delta\alpha_{20}$	$\delta\beta_{20}$	$\delta\alpha_{20}$	$\delta\beta_{20}$
$4.4 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$7.6 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$
Рівняння (22)		Рівняння (23)	
$\delta\alpha_{20}$	$\delta\beta_{20}$	$\delta\alpha_{20}$	$\delta\beta_{20}$
$7 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$

Значення коренів α_k, β_k, знайдених шляхом числового розв'язування рівнянь (16) та (17) (точки), а також за асимптотичними формулами (18) та (19) (суцільна лінія), подано на рис. 1.

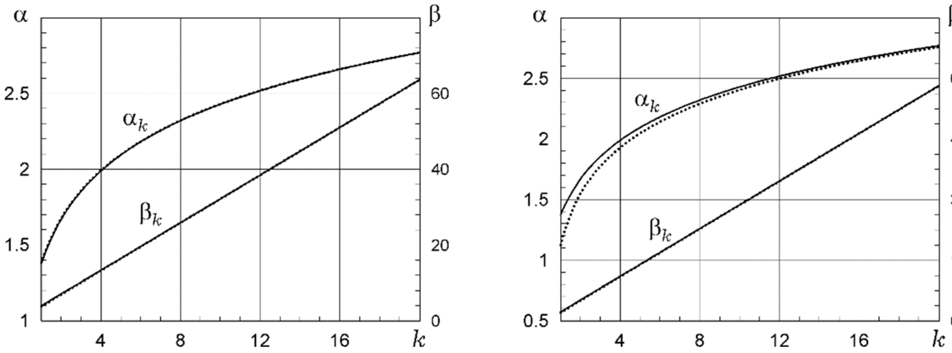

Рис. 1

Значення коренів α_k, β_k, одержані шляхом числового розв'язування рівнянь (22) та (23) (точки), а також за асимптотичними формулами (24) та (25) (суцільна лінія), наведено на рис. 2.

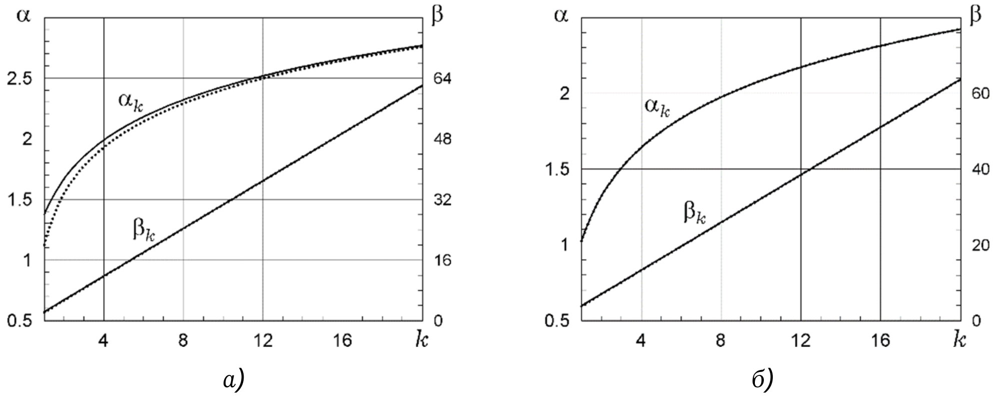

Рис. 2

5. **Власні функції осесиметричних бігармонічних задач**. Підставляючи функції $\varphi^e(\zeta)$ та $\varphi^o(\zeta)$ у рівняння (6), одержимо власні функції, які матимуть, відповідно, вигляд

$$\chi_k^o(\xi,\zeta) = \left(C_k^o H_0^{(1)}(\gamma_k \xi) + D_k^o H_0^{(2)}(\gamma_k \xi)\right)\left(\kappa_k^o \sinh(\gamma_k \zeta) + \zeta \cosh(\gamma_k \zeta)\right), \quad (26)$$

$$\chi_k^e(\xi,\zeta) = \left(C_k^e H_0^{(1)}(\gamma_k \xi) + D_k^e H_0^{(2)}(\gamma_k \xi)\right)\left(\kappa_k^e \cosh(\gamma_k \zeta) + \zeta \sinh(\gamma_k \zeta)\right). \quad (27)$$

Тут C_k^o, D_k^o, C_k^e, D_k^e – невідомі комплексні константи, які можна знайти, використовуючи варіаційний метод однорідних розв'язків [5, 6].

Функції (26) задовольняють однорідні умови в напруженнях (1), якщо γ_k – корені трансцендентного рівняння (16), або в переміщеннях (2), якщо γ_k – корені трансцендентного рівняння (22). Розв'язки (27) задовольняють однорідні умови в напруженнях (1), якщо γ_k – корені трансцендентного рівняння (17), або в переміщеннях (2), якщо γ_k – корені трансцендентного рівняння (23).

Загалом функцію Лява визначають як суму симетричної і антисиметричної частин:

$$\chi_k(\xi,\zeta) = \chi_k^o(\xi,\zeta) + \chi_k^e(\xi,\zeta).$$

Отже, остаточно функцію Лява можна визначити у вигляді розвинення в ряд за системою власних функцій:

$$\chi(\xi,\zeta) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\chi_k(\xi,\zeta) + \overline{\chi}_k(\xi,\zeta)\right),$$

де риска над буквою означає комплексне спряження.

Висновки. Запропоновано подання функції Лява у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної. Розглянуто два випадки однорідних граничних умов на торці циліндра: 1) у напруженнях або 2) у переміщеннях. Отримано системи власних функцій бігармонічного рівняння для скінченного циліндра. Числово досліджено корені трансцендентних рівнянь та знайдено їх асимптотичні значення. Отримані асимптотичні формули вже при $k > 10$ забезпечують достатньо високу точність обчислення коренів α_k та β_k. Використовуючи системи власних функцій бігармонічних задач (26), (27) і вирази (4), (5), можна отримати повні системи комплексних осесиметричних однорідних розв'язків рівнянь Ляме.

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
2. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.

3. *Токовий Ю. В.* Осесиметричні напруження в скінченному пружному циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні // Прикл. проблеми механіки і математики – 2010. – Вип. 8. – С. 144–151.
4. *Adnan Özel, Şemsettin Temiz, Murat Demir Aydin, Sadri Şen.* Stress analysis of shrink-fitted joints for various fit forms via finite element method // Materials and Design. – 2005. – 26, No. 4. – P. 281–289.
5. *ChekurinV. F., Postolaki L. I.* A variational method of homogeneous solutions for axisymmetric elasticity problems for cylinder // Mathematical modeling and Computing. – 2015. – 2 (2). – P. 128 - 132.
6. *Chekurin V., Postolaki L.* Application of the least square method in axisymmetric biharmonic problems // Mathematical Problems in Eng. – 2016. – 2016. – P. 1–9. Article ID 3457649.
7. *Kamal S. M., Borsaikia A. C., Dixit U. S.* Experimental assessment of residual stresses induced by the thermal autofrettage of thick-walled cylinders // J. Strain Analysis. – 2016. – 51(2). – P. 144–160.
8. *Kamal S. M., Dixit U. S.* A comparative study of thermal and hydraulic autofrettage // J. of Mech. Sci. and Techn. – 2016. – 30 (6). – P. 2483–2496.

EIGENFUNCTIONS OF AXIALLY SYMMETRIC BIHARMONIC PROBLEMS FOR A FINITE CYLINDER

Eigenfunctions of axially symmetric biharmonic problems for a finite cylinder are considered. The ends of the cylinder are free of loads or fixed. The obtained systems of transcendental equations have been numerically analyzed and asymptotic representations for the roots of these systems have been obtained.

Key words: *eigenfunctions, finite cylinder, biharmonic equation, Love function*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.12.21