https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.74-82

УДК 539.375

М. М. Николишин, Т. М. Николишин✉

ВПЛИВ ОБ'ЄМНОСТІ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НА ГРАНИЧНУ РІВНОВАГУ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ПЛАСТИНИ З РЕГУЛЯРНОЮ СИСТЕМОЮ ВНУТРІШНІХ ТРІЩИН

Задачу про граничну рівновагу пружно-пластичної пластини з внутрішніми тріщинами зведено до системи нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь, побудовано алгоритм числового розв'язування таких систем сумісно з умовами пластичності, однозначності переміщень та обмеженості напружень в околі вершин тріщин.

***Ключові слова**: рівняння уточненої теорії пластин, об'ємний розподіл напружено-деформованого стану, системи нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь.*

Вступ. Напружений стан та граничну рівновагу пластин з тріщинами досліджували, як правило, на основі двовимірних теорій пластин (Кірхгофа–Лява, Тимошенка та ін.). Винятком є праці [12–15], де числовими чи аналітичними методами вивчено зміну коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) по товщині пластини. При цьому передбачали, що пластичні зони на кінцях тріщин не перевищують 20% від їх довжини, тому досліджували в межах теорії пружності.

Нижче розглянуто ідеально пружно-пластичну пластину з регулярною системою внутрішніх паралельних тріщин, коли за вихідні взято рівняння уточненої теорії пластин [4], яка враховує об'ємний розподіл напружено-деформованого стану і ґрунтується на операторному методі.

1. **Формулювання задачі**. Нехай ідеально пружно-пластична пластина завтовшки $2h$ з регулярною системою паралельних внутрішніх тріщин завдовжки $2l_0$, відстань між якими $2d$, розтягується на нескінченності нормальними до ліній тріщин зусиллями постійної інтенсивності p. Віднесемо пластину до декартової системи координат xyz, початок якої помістимо на серединній поверхні в центрі однієї з тріщин (всі тріщини знаходяться в однакових умовах). Відстань від межі тріщии до зовнішньої і внутрішньої поверхонь пластини $2d_2$ і $2d_1$ відповідно. Вважатимемо, що пластина і береги тріщин навантажені лише симетричними відносно лінії тріщин зусиллями та моментами. Під час деформації береги тріщин не контактують. Обмежимось розглядом досить глибоких тріщин $(d_3 = d_1 + d_2 \le 0,6h)$. Розміри тріщин, рівень зовнішнього навантаження та властивості матеріалу передбачаємо такими, що в околі тріщин по всій глибині пластини вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Тепер, згідно з аналогом δ_c-моделі [4 ,10], зони пластичних деформацій замінимо поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на пружну – відповідними зусиллями та моментами. Вважатимемо, що на продовженні тріщин у глибину до зовнішньої і внутрішньої поверхонь пластини, тобто в області $x \in]-x_0;\ x_0[$, $\gamma \in [-h;\ -h+2d_1] \cup [h-2d_2; h]$, діють постійні напруження $\sigma^0 = (\sigma_B + \sigma_T)/2$, де σ_B та σ_T – границя міцності та поріг текучості матеріалу. В пластичних зонах на продовженні тріщин по довжині, тобто в областях, $\gamma \in [-h;\ h]$, $\alpha \in]-\alpha_p; \alpha_0[\cup]\alpha_0;\ \alpha_p[$, $\alpha_p = l_p / R$ (l_p – довжина пластичної

✉ tarasnyk@ukr.net

зони на продовженні тріщини), діють невідомі нормальне зусилля N та згинний момент M, які для ідеально пружно-пластичного матеріалу задовольняють одну з умов пластичності Треска [10, 12]:
умову пластичності поверхневого шару

$$\frac{N}{2h\sigma_T}+\frac{3|M|}{2h^2\sigma_T}=1\,, \tag{1}$$

або умову пластичного шарніра

$$\left(\frac{N}{2h\sigma_T}\right)^2+\frac{|M|}{h^2\sigma_T}=1\,. \tag{2}$$

А для матеріалу зі зміцненням умова пластичності має вигляд

$$\begin{aligned} &N(x)=P\left[(1-m^*)(|x|-x_0)/(x_1-x_0)+m^*\right],\\ &M(x)=H\left[(1-m^*)(|x|-x_0)/(x_1-x_0)+m^*\right], \qquad (3)\\ &x_0\le|x|\le x,\quad m^*=\sigma_B\ /\ \sigma_T, \end{aligned}$$

$2x_0$ – довжина реальної тріщини; $2x_1=2(x_0+l_p)$ – довжина фіктивної; P, H – невідомі сталі, які повинні задовольняти задану умову пластичності, наприклад, умову пластичного шарніра

$$\left[P/\left(2h\sigma_T\right)\right]^2+|H|/\left(h^2\sigma_T^*\right)=1\,.$$

Тоді

$$\left(\frac{N(x)}{2h\sigma^*(x)}\right)^2+\frac{|M(x)|}{h^2\sigma^*(x)}=1\,,\quad x_0\le|x|\le x_1\,,$$

$$\sigma^*(x)=(\sigma_T-\sigma_B)(|x|-x_0)/(x_1-x_0)+\sigma_B\ .$$

Таким чином, у межах прийнятої моделі ненаскрізні тріщини завдовжки $2x_0$ замінюємо наскрізними невідомої довжини $2x_1$, на берегах яких виконуються умови

$$\begin{aligned} N_s(x)&=\begin{cases} N_s^{(1)}+N^I-N_s^0, & |x|<x_0,\\ N-N_s^0, & x_0\le|x|\le x_1,\end{cases}\\ M_s(x)&=\begin{cases} M_s^{(1)}+M^I-N_s^0, & |x|<x_0,\\ M-M_s^0, & x_0\le|x|\le x_1,\end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

де N^I, M^I – нормальне зусилля та згинний момент, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків над і під тріщиною і які згідно з прийнятими припущеннями про напруження в цих зонах визначають за формулами

$$N^I=2d_3\sigma^0\,,\quad M^I=2\sigma^0(h-d_3)(d_2-d_1)\,,$$

$N_s^{(1)}$, $M_s^{(1)}$ – зусилля та момент, прикладені до берегів тріщини; N^0, M^0 – ці ж параметри основного напруженого стану (зусилля та момент на лініях тріщин у пластині без тріщин).

З рівнянь уточненої теорії пластин та зображень компонент тензора деформації у вигляді [4, 11]

$$\mathrm{e}_{ij}=\mathrm{e}_{ij}^s+\mathrm{e}_{ij}^o\,,\ (i,j=1,2,3)\,,$$

де e_{ij}^0 – компоненти тензора вільної від напружень деформації; e_{ij}^s – компоненти тензора пружної деформації, спричинені власними напруженнями σ_{ij}, отримуємо:

$$e_{ij}^s = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} + \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}\right], \tag{5}$$

E – модуль пружності (модуль Юнга); ν – коефіцієнт Пуассона; δ_{ij} – символ Кронекера.

Запишемо систему ключових рівнянь, що враховує наявність тріщин (стрибки переміщень) у пластині [9]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-a_1)(\omega - E_0) - (1+a_1)\Delta\Phi\right] - \frac{\partial}{\partial y}(\Delta\psi) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-a_1)\omega - (1+a_1)(\Delta\Phi - E_0)\right] + \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\psi) = 0,$$

$$\frac{4}{45}a_2h^4\omega - (1-a_1)(\Delta\Phi - E_c) + (1+a_1)\omega = У^{-1}p^+ +$$

$$+\frac{1}{3}h^2\left(a_3\Delta E_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}E_2\right) + \frac{1}{180}h^4\Delta\left[a_3\Delta E_4 + (12a_2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}E_4\right]. \tag{6}$$

Тут ω, Φ, ψ – ключові функції задачі; Δ – оператор Лапласа; $a_1 = (1-2\nu)^{-1}$; $a_2 = (1-\nu)^{-1}/2$; $a_3 = \nu(1-\nu)^{-1}$;

$$E_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e_{22}^0(\varsigma)n_i(\varsigma)d\varsigma, \quad \varsigma = \gamma/h;$$

$$n_0 = 1, \; n_2 = 1 - 3\varsigma^2, \; n_4 = 7 - 30\varsigma^2 + 15\varsigma^4.$$

Використовуючи операторний метод, побудуємо розв'язок системи диференціальних рівнянь (6) (тут $E_4 = 0$):

$$\omega = D_{10}\psi_0 + D_{12}\psi_2, \quad \Phi = D_{20}\psi_0 + D_{22}\psi_2, \quad \psi = D_{30}\psi_0 + D_{32}\psi_2, \tag{7}$$

де

$$D_{10} = -\frac{45}{2}\frac{1-a_1}{a_2h^4(1+a_1)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta; \; D_{12} = \frac{15}{4a_2h^2}\left(a_3\Delta + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Delta^2;$$

$$D_{20} = -\frac{1}{1+a_1}\left[\Delta(1-a_1) + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\Delta^2 - \frac{45(1-a_1)}{2a_2h^4(1+a_1)} + \frac{45}{2a_2h^4}\frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$D_{22} = \frac{15(1-a_1)}{40a_2h^2(1+a_1)}(a_3\Delta + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\Delta;$$

$$D_{30} = -2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\Delta^2 + \gamma_1^4); \quad D_{32} = 0, \; \gamma_1^4 = \frac{45}{h^4}.$$

Функції ψ_0, ψ_2 визначаємо так:

$$\Delta^2(\Delta^2 + \gamma_1^4)\psi_i = E_i \quad (i = 0,2) \tag{8}$$

Побудуємо $2d$-періодичний розв'язок рівнянь (8). Для цього отримаємо $2d$-періодичний фундаментальний розв'язок рівняння

$$\Delta^2(\Delta^2 + \gamma_1^4)\chi = \delta(x,y). \tag{9}$$

Зобразимо χ у вигляді

$$\chi(x,y)=\frac{1}{d}\sum_{n=0}^{\infty}(1-\delta_{0n}/2)\varphi_n(x)\cos\frac{\pi n}{d}y\,, \tag{10}$$

де δ_{0n} – символ Кронекера.

Підставляючи (9) в (10) і використовуючи деякі результати праці [4] та перетворення Фур'є для $\varphi_n(x)$, одержимо:

$$\varphi_n(x)=-\frac{\exp(-a_{1n}|x|)}{2g_{1n}^3(a_{1n}^2+b_{1n}^2)}(b_{1n}\cos b_{1n}x+a_{1n}\sin b_{1n}|x|)+$$

$$+\exp(-a_{2n}|x|)\left(a_{2n}|x|+1/\left(4\gamma_1^4a_{2n}^3\right)\right),\quad n\geq 1, \tag{11}$$

$$\varphi_0(x)=-\frac{1}{16a_{20}}\left[-\frac{|x|^3}{3}+\frac{\exp(-a_{20}|x|)}{2a_{20}^3}(\cos a_{20}x+\sin a_{20}|x|)\right.$$

Тут

$$a_{1n}=\left(\frac{1}{2}(\gamma_1^4+(\pi n/d)^4)^{1/2}+(\pi n/d)^2\right)^{1/2};\quad a_{2n}=\pi n/d\,;$$

$$b_{1n}=\left(\frac{1}{2}(\gamma_1^4+(\pi n/d)^4)^{1/2}-(\pi n/d)^2\right)^{1/2};\quad b_{2n}=\pi n/d\,;$$

$$g_{jn}=2a_{jn}b_{jn};\ a_{20}=\gamma_1/\sqrt{2}\,.$$

Враховуючи неперервність напружень за переходу через лінію тріщини, функцію e_{22}^0, що характеризує стрибок переміщення, запишемо так:

$$e_{22}^0(x,y,\varsigma)=[\nu(x,\varsigma)]\delta(y)=\left\{\left[\nu^*(x)\right]+(1-3\varsigma^2)\left[\bar{\nu}(x)\right]\right\}\delta(y)\,.$$

Інтегральні зображення ключових функцій ψ_0, ψ_2 через невідомі функції $\nu^*(x)$, $\bar{\nu}(x)$ та фундаментальний розв'язок мають вигляд

$$\psi_i(x,y)=\frac{1}{d}\sum_{n=0}^{\infty}(1-\delta_{0n}/2)\cos\frac{\pi n}{d}y\int_{-1}^{1}E_i^*(\eta)\varphi_n(\eta-x)d\eta,\quad i=0,2. \tag{12}$$

2. **Інтегральні рівняння задачі**. На вільних від навантаження берегах тріщин сумарні напруження повинні задовольняти умови

$$\sigma_y+\sigma_y^0=0,\ \tau_{xy}+\tau_{xy}^0=0,\ \tau_{yz}+\tau_{yz}^0=0,\ |x|<l_0. \tag{13}$$

Тут, як і раніше, індексом «0» позначили компоненти основного напруженого стану, а без індекса – збуреного.

У межах прийнятої теорії умови (13) набувають вигляду

$$L_0(\sigma_y+\sigma_y^0)=0,\quad L_2(\sigma_y+\sigma_y^0)=0,\quad L_1(\tau_{yz}+\tau_{yz}^0)=0\,,$$

$$L_0(\tau_{xy}+\tau_{xy}^0)=0, L_2(\tau_{xy}+\tau_{xy}^0)=0, \tag{14}$$

$$L_k(f)=\frac{1}{2}h^{-(k+1)}\int_{-h}^{h}fz^k dz.$$

Для $P=\text{const}$

$$L_0(P) = P, \quad L_2(P) = \frac{1}{3}P, \tag{15}$$

а для компонент збуреного напруженого стану через ключові функції ψ_0, ψ_2 запишемо:

$$G^{-1}L_0(\sigma_y) = \left[-\frac{4a_1}{1+a_1}\frac{\partial_4}{\partial x_4}\Delta^2 + \gamma_1^4\frac{1-3a_1}{a_1}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right]\psi_0 -$$

$$-\frac{1-a_1}{6a_1}h^2\gamma_1^4\left[a_3\frac{\partial^6}{\partial x^6} + (1+2a_3)\frac{\partial^6}{\partial x^4\partial y^2} + (1+a_3)\frac{\partial^6}{\partial x^2\partial y^4}\right]\psi_2,$$

$$3G^{-1}L_2(\sigma_y) = G^{-1}L_0(\sigma_y) - \frac{6}{h^2}\frac{1-a_1}{1+a_1}\left[\frac{1-2a_2}{a_2}\frac{\partial^6}{\partial x^6} + \frac{1-4a_2}{a_2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^6}{\partial x^4\partial y^2} - 2\frac{\partial^6}{\partial x^2\partial y^4}\right]\psi_0 + \left[(4a_2 - 2a_3 + \frac{a_3}{a_2})\frac{\partial^8}{\partial x^8} + (16a_2 - 8a_3 - 2 +\right.$$

$$+\frac{1+3a_3}{a_2})\frac{\partial^8}{\partial x^6\partial y^2} + (24a_2 - 12a_3 - 6 + \frac{3a_3+2}{a_2})\frac{\partial^8}{\partial x^4\partial y^4} + (16a_2 -$$

$$\left.-8a_3 - 6 + \frac{1+a_3}{a_2})\frac{\partial^8}{\partial x^2\partial y^6} + (4a_2 - 2a_3 - 2)\frac{\partial^8}{\partial y^8} + 4\gamma_1^4 a_2\gamma^4\right]\psi_2, \tag{16}$$

G – модуль зсуву.

Підставляючи (16), (15) в (14) і (8) та враховуючи (12), отримаємо нелінійну систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) для похідних від невідомих функцій $\left[\nu^*(x)\right]$ та $\left[\overline{\nu}(x)\right]$, що характеризують стрибок переміщення $\left[\nu(x,\varsigma)\right]$. Після деяких перетворень ця система набуде вигляду

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{-l_1}^{l_1} F_i(\eta)\,K_{ij}(\eta - x)\,d\eta = df_j(x), \quad j = 1,2, \quad |x| < l_0. \tag{17}$$

Тут

$$K_{ii}(z) = \frac{a_{ii}}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi z}{2d} + K_{ii}^0(z);\ a_{11} = -\frac{1}{2(1-\nu)};\ \ a_{22} = -\frac{3-2\nu-\nu^2}{2(1-\nu)};$$

$$K_{11}^0(z) = -\frac{1}{2(1-\nu)}\left[\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi|z|}{2d}\left(1 - \frac{\pi|z|/d}{\operatorname{sh}(\pi|z|/d)}\right) - \frac{\nu^2(1-W_{10})}{2(1-\nu)} +\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu^2}{2(1-\nu)}\left[W_{1n} + \frac{1}{2}e^{-n_1 z}(n_1|z| - 2) - \frac{n_1^2}{\gamma_1^2}W_{2n}\right]\right]\operatorname{sgn} z;$$

$$K_{22}^0(z) = -\frac{1}{2(1-\nu)}\left[\nu^2 - \frac{(1-\nu)^2}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi|z|}{2d}\left(1 - \frac{\pi|z|/d}{\operatorname{sh}(\pi|z|/d)}\right)\right] - \frac{\nu^2 W_{10}}{2(1-\nu)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\nu}\left[W_{1n}\left(\frac{n_1^4}{\gamma_1^2(n_1^4+\gamma_1^4)} - \nu\right) - \frac{n_1^2}{\gamma_1^2}\left(\nu^2 - \nu + \frac{n_1^4}{\gamma_1^2(n_1^4+\gamma_1^4)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times W_{2n} + \frac{1}{2}e^{-n_1|z|}(n_1|z|(1-\nu)^2 - 2(1-\nu)^2\right]\operatorname{sgn} z; \quad n_1 = \pi n/d;$$

$$K_{12}(z) = K_{21}(z) = -\frac{\nu h^2}{6(1-\nu)}\left(-\frac{\nu}{2}W_{20} + \sum_{n-1}^{\infty}\left[n_1^2(1-\nu)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(W_{1n} - e^{-n_1(z(}\right) - \nu\gamma_1^2 W_{2n}\right]\right)\operatorname{sgn} z,$$

$$W_{1n} = e^{-a_{1n}|z|}\cos b_{1n}z; \quad W_{2n} = e^{-a_{2n}|z|}\sin b_{1n}|z|;$$

$$W_{10} = e^{-a_{10}|z|}\cos b_{10}z; \quad W_{20} = e^{-a_{20}|z|}\sin b_{10}|z|.$$

Система нелінійних СІР (17) повинна задовольняти умови

$$F_1(u)du = 0; \quad F_2(u)du = 0, \tag{18}$$

які забезпечують однозначність переміщень за обходу тріщини.

Відмітимо, що в цій системі невідомі границі інтегрування (невідома довжина пластичної зони l_p). Крім цього, в правих частинах невідомі зусилля N та момент M. Тому розв'язуємо її сумісно з умовами пластичності (1) чи (2) для ідеально пружно-пластичного матеріалу, або з умовами (3) для матеріалу, якому притаманне зміцнення. Вимагаємо, щоб виконувалась умова обмеженості напружень у кінці пластичних зон. Для цього достатньо, щоб КІН у вершині фіктивної тріщини дорівнював нулю. Систему (17) можна розв'язати одним з числових методів, наприклад, методом механічних квадратур [2]. Але тут праві частини, як слідує з умов (4), є розривні функції. Тоді в точках розриву буде значна похибка, а саме там результат найцікавіший. Тому розв'язок системи (17) шукаємо у вигляді суми

$$F_m(x) = h_m(x) + \psi_m(x).$$

Тут $h_m(x)$ – розв'язок системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\int_{-1}^{1}\frac{h_j(t)}{t-x}dt = f_i(x), \qquad |x| \le 1 \quad (i=1,2).$$

Підставляючи цю суму в систему (17), для визначення $\psi_m(x)$ отримаємо систему інтегральних рівнянь типу (17), але з неперервною правою частиною.

Отже, розв'язування системи (17) звели до розв'язування канонічних СІР та системи СІР типу (17) з неперервною правою частиною.

Проінтегрувавши розв'язок системи (17), формулу для знаходження розкриття тріщини в довільній її точці подамо у вигляді

$$`\delta(\alpha,\gamma) = \left[\nu^*(\alpha)\right] + \gamma\left[\bar{\nu}(\alpha)\right]. \tag{19}$$

Якщо в цій формулі замінити $\delta(\alpha,\gamma)$ на δ_c, отримаємо критеріальне співвідношення, яке пов'язує критичне навантаження, довжину тріщини та геометричні параметри пластини.

Система нелінійних СІР за структурою повністю збігається із такими, до яких зводять задачі про напружений стан пружних оболонок з тріщинами [3, 5–9, 16]. Тому розв'язком отриманої системи будуть інтерполяційні поліноми Лагранжа за вузлами Чебишева [10].

3. **Числовий аналіз задач**. Алгоритм числового розв'язування системи (17) сумісно з умовами пластичності, обмеженості напружень та однозначності переміщень реалізували для пластини, що знаходиться під дією розтягувальних нормальних зусиль p. Матеріал пластини ідеально пружно-пластичний $(\sigma_B = \sigma_T)$. Пластина ослаблена системою внутрішніх тріщин.

Числовий аналіз виконували за таких значень параметрів: $\nu = 0,3$; $d/h = 10$; $l_0/h = 1,6$ та $l_0/h = 2$; $d_1/h = d_2/h$. На рис. 1 подано графіки,

що характеризують зміну відносного розкриття тріщини $\delta^* = \delta(x_0 / l_0;0)E / (x_0\sigma_T)$ залежно від її відносної довжини $\alpha_0 = l_0 / l_1$ та різних значень d_1 та d_2 $(d_1 = d_2 = 0{,}3h;\ 0{,}2h;\ 0{,}1h)$, що відповідають кривим *1–3*. Як бачимо, з ростом довжини тріщини її розкриття зростає, як і зі зближенням фронту внутрішньої тріщини до поверхонь пластини.

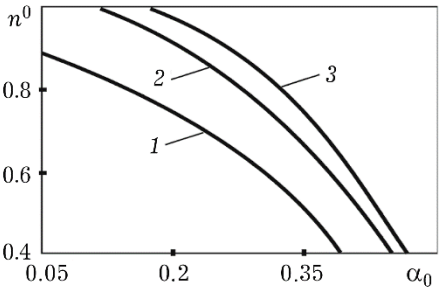

Рис. 1.

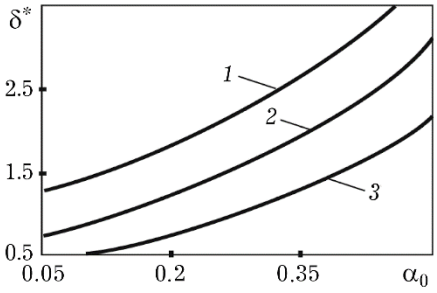

Рис. 2.

Рис. 1. Залежність відносного розкриття тріщини δ^* від відносної її довжини α_0 та відстані від країв до поверхонь пластини

Рис. 2. Залежність відносної довжини тріщини α_0 від відносного навантаження n^0

На рис. 2 побудовано залежність довжини пластичної зони від відносного навантаження $n^0 = p / 2h\sigma_T$. Криві *1–3* відповідають тим же параметрам, що й на рис. 1. Отже, зі зближенням фронту тріщини з межами пластини, як і зі збільшенням довжини реальної тріщини, довжина пластичних зон зростає.

Щоб порівняти отримані результати з експериментальними, наведеними в праці [17], скористаємося відомою формулою [1]:

$$\delta = \beta\left(\frac{K_1}{\sigma_T}\right)^2, \tag{20}$$

де β – безрозмірний коефіцієнт, що залежить від властивостей матеріалу і типу напруженого стану, які поєднують КІН та розкриття тріщини.

КІН

$$K_1 = \lim_{r\to 0}\sqrt{2r}\,y \tag{21}$$

(r – віддаль від вершини розрізу), зважаючи на подання σ_y через ключові функції [9], знаходимо за формулою

$$K_1 = k_{11} + (1 - 3\varsigma^2)k_{12}. \tag{22}$$

Тут

$$k_{11} = P\sqrt{\pi l_0}\,\hat{k}_{11};\ \ k_{12} = P\sqrt{\pi l_0}\,\hat{k}_{12};\ \ \hat{k}_{11} = \sum_{j=1}^{N/2} A_{2j-1}^{(1)};\ \ \hat{k}_{12} = \sum_{j=1}^{N/2} A_{2j-1}^{(2)}; \tag{23}$$

$$A_{2j-1}^{(i)} = \frac{4}{N}\sum_{m=1}^{N/2}\varphi_m^{(i)}\cos((\eta_j - 1)\theta_m);$$

$\varphi_m^{(i)}$ визначають зі системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{m=1}^{N/2}(\alpha_{km}\varphi_m^{(1)} + \beta_{km}\varphi_m^{(2)}) = 1,$$

$$\sum_{m=1}^{N/2} (\beta^*_{km}\varphi^{(1)}_m + \alpha^*_{km}\varphi^{(2)}_m) = 0, \quad (k = \overline{1, N/2}), \tag{24}$$

де

$$\alpha_{km} = \frac{1}{2N}\left[\psi^*_{km} + K_0^{11}(z_1) - K_0^{11}(z_2)\right]; \quad \beta_{km} = \frac{l_0}{2N}\left[K_{12}(z_1) - K_{12}(z_2)\right];$$

$$\alpha^*_{km} = \frac{1}{2N}\left[a_{22}\psi^*_{km} + K_0^{22}(z_1) - K_0^{22}(z_2)\right]; \ \beta^*_{km} = \frac{l_0}{2N}\left[K_{21}(z_1) - K_{21}(z_2)\right];$$

$$z_{1,2} = l_0(\cos\vartheta_k \mp \cos\vartheta_m); \quad \vartheta_m = \frac{2m-1}{2N}d;$$

$$\psi^*_{km} = \frac{1}{\sin\vartheta_m}\left[\operatorname{ctg}\frac{\vartheta_k \mp \vartheta_m}{2} + \operatorname{tg}\frac{\vartheta_k \mp \vartheta_m}{2}\right].$$

Верхній знак відповідає ситуації, коли число $|k-m|$ непарне, а нижній – коли парне:

$$K_0^{ij}(z) = \frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{z}{2} - \frac{1}{z} + l_0 K_{ij}^0(z), \ i = 1,2.$$

Числовий аналіз задачі виконували за таких значень параметрів: $\nu = 0.3$; $d/h = 10$; $l_0/h = 1.6$ та $l_0/h = 2$, $\beta = 1$ (плоский напружений стан). На рис. 3 подано залежність відносного КІН ($K_1^* = K_1/(P\sqrt{\pi l_0})$ від відносної нормальної координати $\xi = \gamma/h$.

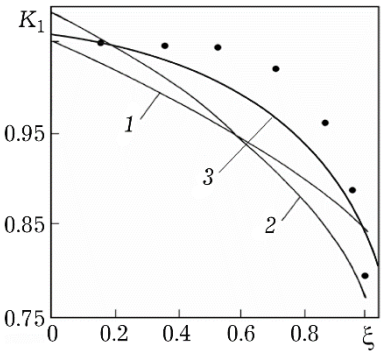

Рис. 3. Залежність відносного коефіцієнта інтенсивності напружень від відносної нормальної координати

Криві *1* та *2* відповідають $l_0/h = 1.6$ та $l_0/h = 2$. Крива *3* – результату, отриманому з допомогою формул (20). Точками позначено експериментальні дані, наведені в праці [17] для ізотропного шару з однією тріщиною при $l_0/h = 1.6$. Із графіків видно, що в точках, що розташовані ближче до поверхонь пластини, КІН набуває менших значень.

Висновки. Тривимірну пружно-пластичну задачу для пластини з внутрішніми тріщинами за допомогою аналога δ_c-моделі зведено до двовимірної пружної для такої ж пластини з наскрізними тріщинами невідомої довжини, до берегів яких прикладені невідомі зусилля і моменти, а останню – до системи сингулярних інтегральних рівнянь з невідомими межами інтегрування та розривними правими частинами. Отриману систему розв'язано методом механічних квадратур сумісно з умовами пластичності, обмеженості напружень та однозначності переміщень. Результат, одержаний на основі пружно-пластичної задачі, краще корелює з експериментальними даними.

1. *Андрейкив А. Е.* Разрушение квазихрупких тел с трещинами при сложном напряженном состоянии. – Київ: Наук. думка, 1979. – 142 с.
2. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. – Москва: Наука, 1973. – 304 с.
3. *Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М.* Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 318 с.
4. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ , 2003. – 320 с.

5 *Николишин М. М.* Влияние упругой среды на напряженное состояние цилиндрической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью, ослабленной системой разрезов // Прикл. механика. – 1985. – № 3. С. 56–61.
6 *Николишин М. М.* Изгиб трансверсально-изотропной пластины с системой параллельных разрезов // Физ.-хим. механика материалов. – 1985. – № 3. – С. 99–101.
7. *Николишин М. М.* Раскрытие несквозной трещины в пластине // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 26. – С. 29–31.
8. *Осадчук В. А., Николишин М. М., Кирьян В. И.* Применение аналога δ_c -модели для определения раскрытия несквозной трещины в замкнутой цилиндрической оболочке // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – № 1. – С. 88–92.
9. *Осадчук В. А., Николишин М. М., Чернуха Ю. А.* Предельное равновесие оболочек и пластин с несквозными трещинами, находящимися в поле остаточных напряжений // Тез. докл. IV Всесоюз. конф. «Современные проблемы строительной механики и прочности летательных апаратов». – Харьков, 1991. – С. 88–93.
10. *Панасюк В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
11. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
12. *Прагер В.* Проблемы теории пластичности. – Москва: Физматгиз, 1958. – 136 с.
13. *Фильштинський Л. А., Олейник В. М.* Краевая задача электроупругости для слоя с туннельными сквозными трещинами // Прикл. механика. – 1991. – № 12. – С. 21–26.
14. *Фильштинський Л. А., Олейник В. М.* Пространственная задача электроупругости для слоя с туннельными трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1991. – № 4. – С. 66–72.
15. *Erdogan F., Delade F.* Ductile fracture of pipes and cylindrical containers with a circumferential flaw // Trans. ASME. Ser. J. J. Pressure Vessel Technol. – 1981. – 103, No 2. -P. 160–168.
16. *Nykolyshyn M. M.* Limit equilibrium of elasto-plastic transversally isotropic shells with flaws of a nonthrough crack type // Collection of Abstr. ICF8: Fracture mechanics: successes and problems. – 1993. – Part 1. – P. 131.
17. *Yashi O. S., Erdogan F.* A pressurized cylindrical shell with a fixed end which contains an axial part-through or through crack // Int. J. Fract. – 1985. – 28, No. 3 – P. 161–187, https://doi.org/10.1007/BF00018491

INFLUENCE OF STRESS STATE VOLUME ON LIMIT EQUILIBRIUM OF ELASTO-PLASTIC PLATE WITH REGULAR SYSTEM OF INTERNAL CRACKS

The problem of the limit equilibrium of an elasto-plastic plate with internal cracks is reduced to a system of nonlinear singular integral equations, and an algorithm for the numerical solution of such systems together with the conditions of plasticity, single-valued displacements and limited stresses in the vicinity of crack tips is constructed.

Key words: equation of refined plate theory, volume distribution of the stress-strain state, systems of nonlinear singular integral equations.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.11.20