https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.67-73

УДК 519.6:517.958

Б. А. Зубаль[1], І. Я. Козій[1]✉, О. В. Костельна[1], Г. А. Шинкаренко[1,2]

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНИХ ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ

Сформульовано задачу про вільні коливання податливих до трансверсальних зсуву та стиснення тонких оболонок. Для знаходження власних частот та форм вільних коливань застосовано числовий підхід на основі методу скінченних елементів та методу ітерацій у підпросторі. Отримано розв'язки низки модельних задач, на яких продемонстровано ефективність запропонованої числової методики. Досліджено вплив податливості до стиснення на характер поведінки динамічних характеристик оболонок.

***Ключові слова**: власні частоти, форми вільних коливань, трансверсальні зсув та стиснення, метод ітерацій у підпросторі, метод скінченних елементів.*

Вступ. Тонкостінні оболонкові конструкції, за раціональної матеріаломісткості та високої міцності, широко застосовують у багатьох галузях сучасної техніки, зокрема, в машинобудуванні, корабле- та авіабудуванні, приладобудуванні, в ракетній та космічній техніці тощо. Розрахунок таких конструкцій ґрунтується на поєднанні методів теорії пружності, механіки твердих деформівних тіл та числових, заснованих на варіаційних формулюваннях розглядуваних задач. Одним з важливих чинників забезпечення міцності оболонкових конструкцій є дослідження їх вільних коливань [9, 12, 14] на стадії проектування, зокрема, визначення власних частот конструкційних елементів.

У працях [2, 5, 9, 10, 12, 15] запропоновано різні варіанти уточнених теорій оболонок. Проте під час розрахунку та дослідження частот та форм вільних коливань використовують, в основному, класичну гіпотезу Кірхгофа–Лява та гіпотезу Тимошенка–Міндліна [4, 6–8, 16].

Нижче наведено числову схему для знаходження вільних коливань оболонок, податливих до трансверсальних зсуву та стиснення. Виконано числові експерименти з дослідження її достовірності.

1. **Вихідні співвідношення теорії оболонок**, **податливих до трансверсальних зсуву та стиснення**. Розглянемо оболонку як тривимірне тіло постійної товщини h, що є суттєво менша від решти характерних розмірів оболонки. Серединну поверхню оболонки Ω (поверхню, рівновіддалену від лицевих поверхонь) віднесемо до ортогональної системи координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Координатні лінії α_1, α_2 є лініями головних кривин серединної поверхні, а координатна лінія α_3 має напрям зовнішньої нормалі до серединної поверхні так, що система координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ є правою. Рівняння $\alpha_3 = 0$ у цій системі є рівнянням серединної поверхні, а $\alpha_3 = \pm h/2$ – рівняннями лицевих поверхонь оболонки $\Omega_\pm$. Позначимо через Γ межу серединної поверхні Ω.

Введена параметризація оболонки дає можливість стверджувати, що елемент об'єму оболонки

$$dV = H_1 H_2 H_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 ,$$

де для параметрів Ляме $H_i = H_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $i = \overline{1,3}$ в обраній системі координат справедливі рівності

✉ iryna.koziy@lnu.edu.ua

$$H_i = A_i\left(1+\alpha_3 k_i\right), \quad i = 1{,}2, \quad H_3 = 1. \tag{1}$$

Тут $A_i = A_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$ і $k_i = k_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$, $i = 1{,}2$ – коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини серединної поверхні відповідно.

Переміщення довільної точки оболонки є функціями просторових координат та часу $U = \left\{U_i\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t\right)\right\}_{i=1}^{3}$:

$$U_i\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t\right) = u_i\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right) + \alpha_3\gamma_i\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right), \qquad i = \overline{1,3}. \tag{2}$$

Зазначимо, що вектор узагальнених переміщень серединної поверхні $u = \left(u_1,u_2,u_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right)^T$ визначає переміщення $u_i\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)$, $i = \overline{1,3}$ точок серединної поверхні Ω оболонки та кути $\gamma_i\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)$, $i = \overline{1,3}$ повороту нормалі незалежно від компонент вектора переміщень точок серединної поверхні.

Залежності деформацій від переміщень визначають зі співвідношень

$$e = C_L u. \tag{3}$$

Зв'язок між статичними величинами (зусиллями та моментами) та геометричними (компонентами деформацій) описують фізичні співвідношення

$$\sigma = Be. \tag{4}$$

Рівняння динамічної рівноваги лінійної теорії оболонок, податливих до трансверсальних зсуву та стиснення, мають вигляд

$$C_\sigma\sigma + P - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{5}$$

Їх доповнюють крайовими

$$G_\sigma\sigma\big|_{\Gamma_\sigma} = \sigma_g, \tag{6}$$

$$G_u u\big|_{\Gamma_u} = u_g, \qquad \Gamma_u = \Gamma \setminus \Gamma_\sigma \tag{7}$$

та початковими умовами

$$u\left(\alpha_1,\alpha_2,0\right) = u^0\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\left(\alpha_1,\alpha_2,0\right) = u^1\left(\alpha_1,\alpha_2\right). \tag{8}$$

У формулах (3)–(8) введено такі позначення: $e = \left(e_{11},e_{22},e_{33},e_{12},e_{13},e_{23},\kappa_{11},\kappa_{22},\kappa_{12},\kappa_{13},\kappa_{23}\right)^T$ – вектор компонент тензора лінійної деформації; $\sigma = \left(N_{11},N_{22},N_{33},S,N_{13},N_{23},M_{11},M_{22},H,M_{13},M_{23}\right)^T$ – вектор симетричних зусиль-моментів; $P = \left(P_1,P_2,P_3,m_1,m_2,m_3\right)^T$ – вектор зовнішнього навантаження; $\sigma_g = \left(N_t,N_s,N_n,M_t,M_s,M_n\right)^T$ – вектор крайових зусиль-моментів; $u_g = \left(u_t^B,u_s^B,u_n^B,\gamma_t^B,\gamma_s^B,\gamma_n^B\right)^T$ – вектор крайових зміщень; C_L та C_σ – матриці диференціальних операторів; m – діагональна матриця розмірності 6×6; G_σ, G_u – матриці змінних коефіцієнтів; B – матриця пружних характеристик матеріалу.

Для зручності застосування числових методів [1, 10, 13] усі співвідношення подано в матричному вигляді. Повний вигляд матриць C_L, C_σ, m, G_σ, G_u, B наведено в праці [3].

2. **Варіаційне формулювання задачі динаміки оболонок**, **податливих до трансверсальних зсуву та стиснення**. З огляду на застосування методу

скінченних елементів для дослідження динамічних характеристик оболонки доцільно визначити варіаційне формулювання задачі (5)–(8).

Введемо до розгляду такі простори:

$$V = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[W_2^1(\Omega) \right]^6 \quad | \ v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \setminus \Gamma_\sigma \right\},$$

$$G = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[L^2(\Omega) \right]^6 \right\}.$$

Вважаємо, що справедливі є включення

$$P = (P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3) \in \left[L^2(\Omega) \right]^6, \ \sigma_g = (N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n) \in \left[L^2(\Gamma_\sigma) \right]^6.$$

Варіаційне формулювання задачі динаміки лінійної теорії тонких оболонок, податливих до трансверсальних зсуву та стиснення, таке [2]:

задано $l \in L^2(0, T; V')$, $u^0 \in V$, $u^1 \in G$;

знайти такий вектор узагальнених переміщень $u \in L^2(0, T; V)$, що

$$\mu(\ddot{u}(t), v) + a(u(t), v) = < l(t), v >, \quad \forall t \in (0, T], \tag{9}$$

$$a(u(0) - u^0, v) = 0,$$

$$\mu(\dot{u}(0) - u^1, v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Білінійні форми $a(u,v)$ та $\mu(u,v)$, лінійний функціонал $< l, v >$ мають вигляд

$$a(u,v) = \iint_\Omega (C_L v)^T E_0 B C_L u d\Omega \ , \tag{10}$$

$$\mu(u,v) = \iint_\Omega \rho h \sum_{i=1}^{3} \left(u_i v_i + \frac{h^2}{12} \gamma_i \xi_i \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 , \tag{11}$$

$$< l, v >= \sum_{i=1}^{3} \iint_\Omega (P_i v_i + m_i \xi_i) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ + \int_{\Gamma_\sigma} (N_t v_t + N_s v_s + N_n v_n + M_t \xi_t + M_s \xi_s + M_n \xi_n) d\Gamma_\sigma. \tag{12}$$

Тут E_0 – матриця розміру 11×11 з відмінними від нуля елементами: $E_{11} = E_{22} = E_{33} = E_{77} = E_{88} = 1$, $E_{44} = E_{55} = E_{66} = E_{99} = E_{10,10} = E_{11,11} = 2$; ρ – густина матеріалу оболонки.

3. **Напівдискретні апроксимації Гальоркіна варіаційної задачі**. Застосовуючи процедуру напівдискретизації Гальоркіна за просторовими змінними [11] до варіаційної задачі (9), можна перейти до відшукання наближеного розв'язку $u_h(\alpha_1, \alpha_2, t)$ в скінченновимірному підпросторі $V_h \subset V$. Використовуючи включення $u_h(\alpha_1, \alpha_2, t) \in L^2(0, T; V_h)$, апроксимацію Гальоркіна можна однозначно записати у вигляді лінійної комбінації векторів базису $\{\varphi_i(\alpha_1, \alpha_2)\}_{i=1}^n$ простору V_h:

$$u_h(\alpha_1, \alpha_2, t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t) \varphi_i(\alpha_1, \alpha_2).$$

Невідомі коефіцієнти $\{q_i(t)\}_{i=1}^{n}$ визначають як розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = R(t), \quad \forall t \in (0, T], \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(0)\, a(\varphi_i, \varphi_j) = a(u^0, \varphi_j), \qquad j = \overline{1, n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i(0)\, \mu(\varphi_i, \varphi_j) = \mu(u^1, \varphi_j).$$

Компоненти матриці жорсткості K і матриці мас M, а також вектора зовнішнього вузлового навантаження $R(t)$ визначають так:

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} [C_L \varphi_i]^T E_0 B [C_L \varphi_j] d\Omega,$$

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} (\varphi_i)^T m(\varphi_j) d\Omega,$$

$$R_i(t) = \iint_{\Omega} (\varphi_i)^T P(t) d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} (G_u \varphi_i)^T \sigma_g d\Gamma_\sigma.$$

Симетричні матриці K та M додатно визначені [11], тому задачу Коші (13) можна однозначно розв'язати відносно вектора $q(t)$.

4. **Задача про вільні коливання оболонок**, **податливих до трансверсальних зсуву та стиснення**. Визначення власних частот необхідне під час проектування оболонкових конструкцій, щоб запобігти резонансним явищам, які можуть призвести до їх руйнування.

Частоти та форми вільних коливань визначені розмірами, пружними характеристиками оболонки, способом її закріплення та не залежать від амплітуди навантаження. Найчастіше серед усіх власних частот найбільше на практиці зацікавлюють найменші (найнижчі) частоти, для яких вплив внутрішнього тертя та в'язкості матеріалу відіграє не настільки важливу роль, як для високих.

Розглянемо оболонку, вільну від дії зовнішніх сил $P_i(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $m_i(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $i = \overline{1, 3}$, на контурі якої задані однорідні крайові умови

$$G_u u = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_u, \qquad G_\sigma \sigma = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_\sigma.$$

Розв'язок задачі Коші (13) шукаємо у вигляді

$$q(t) = \tilde{q} e^{i\omega t}, \tag{14}$$

де $i^2 = -1$; ω – колова частота вільних коливань; $\tilde{q}$ – вектори, що не залежать від часу та характеризують амплітуду шуканого вектора узагальнених переміщень.

Після підставляння (14) у матричне рівняння задачі (13) та наведені однорідні крайові умови отримаємо систему рівнянь

$$-M\tilde{q}\omega^2 + K\tilde{q} = 0 \tag{15}$$

та крайові умови

$$G_u \tilde{q} = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_u, \qquad G_\sigma \tilde{\sigma} = 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_\sigma.$$

Значення ω_i є частотами вільних коливань оболонки, а функції $\tilde{q}_i$ визначають форми вільних коливань.

Відшукання розв'язків системи рівнянь (15) є узагальненою задачею на власні значення:

$$K\tilde{q} = \omega^2 M\tilde{q}\,.$$

Для знаходження власних чисел та власних векторів такої задачі в числових методах лінійної алгебри добре відомий метод ітерацій у підпросторі [1]. За його допомогою в межах єдиного ітераційного алгоритму можна визначити декілька найменших власних значень та відповідних їм власних векторів, що відповідають формам вільних коливань. Розв'язок базується на властивостях послідовності Штурма, алгоритмі методу Релея–Рітца та алгоритмі Якобі [1].

Одним зі способів зберегти стійкість обчислювального процесу є використання процедури Грамма–Шмідта на кожному кроці методу ітерацій у підпросторі для ортогоналізації біжучих наближень власних векторів [1].

Описана числова схема розв'язку задач про вільні коливання оболонок складної геометрії методом скінченних елементів з використанням біквадратичних ізопараметричних апроксимацій реалізована у вигляді проблемно-орієнтованого комплексу програм.

5. **Числові приклади**. Розглянемо задачу про вільні коливання порожнистого нескінченного циліндра радіуса $R = 1.575$ м та товщини $h = 0.102$ м. Розрахунок виконано за таких параметрів: модуль Юнга матеріалу оболонки $E = 2.068 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0$, густина $\rho = 2403$ кг/м^3.

У табл. 1 порівняно значення першої, третьої та п'ятої частот вільних коливань порожнистого циліндра, отриманих згідно з наведеною числовою методикою в межах розглянутої моделі зсувних оболонок, із результатами числових розрахунків у межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Кірхгофа–Лява, наведеними в праці [16], у межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка (розглянуто у праці [8]), числовими результатами для тривимірної моделі теорії пружності, наведеними в праці [4], а також аналітичним розв'язком розглядуваної задачі у межах теорії оболонок типу Кірхгофа–Лява [16].

Розрахунок власних частот виконано на чверті циліндра з такими крайовими умовами: $u_1 = \gamma_1 = 0$ при $\alpha_1 = 0$ та при $\alpha_1 = L$ (що обмежує висоту циліндра); $u_2 = \gamma_2 = 0$ при $\alpha_2 = 0, \pi/n$.

Таблиця 1. Частоти вільних коливань нескінченного циліндра.

П'ятимодальний варіант			3D-модель теорії пружності [4], ω, Гц	Шестимодальний варіант, ω, Гц
теорія Кірхгофа–Лява [16]		теорія Тимошенка [8], ω, Гц		
ω, Гц аналіт. розв.	ω, Гц числ. розв.			
46.84	46.81	46.93	46.70	47.14
254.00	252.54	252.79	253.23	254.98
602.56	594.49	593.33	595.56	603.54

Також розглядали задачу про визначення частот вільних коливань циліндричної панелі. Розрахунок виконували за таких параметрів оболонки: модуль Юнга матеріалу оболонки $E = 1.97 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, густина $\rho = 7946$ кг/м^3, товщина $h = 0.003$ м, радіус $R = 0.61$ м, $L = 0.305$ м. Крайові умови: жорстке закріплення при $\alpha_1 = 0$, решта країв – вільні.

У табл. 2 наведено результати числового розрахунку перших п'яти значень частот вільних коливань циліндричної консольної панелі, розглянутих у працях [4, 8] (у межах тривимірної моделі теорії пружності та п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка), та результати реалізованої методом скінченних елементів моделі зсувних оболонок, описаної у цьому дослідженні, за послідовного згущення сітки скінченних елементів.

Також розглядали задачу про знаходження частот вільних коливань жорстко закріпленої по контуру напівсферичної оболонки. Числовий розв'язок задачі одержали за таких вхідних значень: модуль Юнга $E = 70$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, густина $\rho = 2770$ кг/м^3, $R = 5.08$ м, $h = 0.0254$ м.

Таблиця 2. Значення частот вільних коливань консольної панелі.

3D-модель теорії пружності [4], ω, Гц			П'ятимодальний варіант (теорія Тимошенка) [8], ω, Гц	Шестимодальний варіант, ω, Гц		
4×4	8×8	16×16		4×4	8×8	16×16
83.50	82.73	82.47	85.09	84.89	84.35	84.22
135.02	133.74	133.52	138.02	141.38	140.26	140.05
240.92	237.34	237.03	251.71	245.28	243.13	242.76
339.32	330.99	329.39	344.83	345.72	340.62	339.67
395.09	371.44	369.91	404.87	381.65	375.05	373.88

Порівнювали числові розв'язки цієї задачі (перших три значення частот вільних коливань), отримані на основі розглядуваної шестимодальної теорії оболонок, податливих до трансверсальних зсуву та стиснення, з числовими розв'язками на основі п'ятимодальної теорії оболонок [6] (табл. 3).

Таблиця 3. Частоти вільних коливань напівсферичної оболонки.

П'ятимодальний варіант [6], ω, Гц	Шестимодальний варіант, ω, Гц
117.19	119.64652
146.17	149.04657
152.66	162.74625

Запропоновану числову схему та програмне забезпечення для дослідження вільних коливань розглядуваних оболонок апробовано на модельних задачах. Аналіз наведених результатів свідчить, що значення частот вільних коливань, знайдені за гіпотезами Кірхгофа–Лява та Тимошенка, завжди є заниженими. За врахування стиснення оболонка швидше може піддатися резонансу, а отже, й руйнуванню. Отримані результати добре узгоджуються з наведеними в літературі та підтверджують ефективність запропонованої методики.

1. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – Москва: Стройиздат, 1982. – 448 с, https://doi.org/10.1002/nme.1620110913
2. *Вагін П. П., Іванова Н. В., Шинкаренко Г. А.* Про одну математичну модель динамічного деформування гнучких оболонок // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 54–59.
3. *Вагін П. П., Шот І. Я.* Про вільні коливання оболонок, податливих на зсув та стиснення // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 177–184.
4. *Войтович В., Горлач В.* Чисельний аналіз вільних коливань тривимірних пружних тіл // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2003. – Вип 6. – С. 126–134.
5. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 432 с.

6. *Гнитько В. И., Дегтярев К. Г., Науменко В. В., Тонконоженко А. М.* Свободные и вынужденные колебания оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // Вісник Харківськ. нац. ун-ту. – 2013. – 23, №1089. – С. 39–49.
7. *Григоренко А. Я., Мальцев С. А.* Решение задач о свободных колебаниях конических оболочек переменной толщины // Доп. НАН України. – 2009. – № 7. – С. 63–69.
8. *Копытко М. Ф., Савула Я. Г.* Свободные колебания оболочек сложной геометрии с конечной сдвиговой жесткостью // Матем. методы и физ.-мех. поля. – 1989. – № 30. – С. 13–17.
9. *Марчук М. В.* Нелінійне деформування і коливання податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення пластин і оболонок // Машинознавство. – 2005. – № 10. – С. 9–14.
10. *Марчук М. В., Хом'як М. М.* Змішана схема методу скінченних елементів для розрахунку шаруватих композитних оболонок і пластин. – Львів: Сполом, 2003. – 216 с.
11. *Шинкаренко Г. А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. – Київ: НМК ВО, 1991. – 88 с.
12. *Awrejcewicz J., Krysko V. A.* Elastic and thermoelastic problems in nonlinear dynamics of structural members. – Springer, 2020. – 602 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37663-5
13. *Babuska I., Whiteman J. R., Strouboulis T.* Finite elements: an introduction to the method and error estimation. – Oxford: Oxford University Press, 2011. – 352 p.
14. *Geradin M., Rixen D. J.* Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics. – John Wiley & Sons, Ltd., 2015. XVI. – 600 p.
15. *Marchuk M., Goriachko T., Pakosh V.* Natural frequencies of layered elongated cylindrical panels for geometrically nonlinear deformation at discrete consideration of components // Vibrations in Physical Systems. – 2016. – 27. – P. 255–264.
16. *Yu I. W.* Subspace iteration for eigen-solution of fluid-structure interaction problems // J. of Pressure Vessel Technology. – ASME. – 1987. – 109, No. 2. – P. 244–248. https://doi.org/10.1115/1.3264903.

NUMERICAL ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF SHELLS AMENABLE TO TRANSVERSAL SHEAR AND COMPRESSION

The problem of free vibrations of thin shells amenable to transversal shear and compression is formulated. To find the natural frequencies and forms of free vibrations, a numerical approach based on the finite element method (FEM) and the subspace iteration method was used. The solutions of a number of model problems are considered, on which the efficiency of the proposed numerical scheme is demonstrated. The influence of compression on the behavior of the dynamic characteristics of the shell is investigated.

Key words: natural frequencies, forms of free vibrations, transversal shear and compression, the subspace iteration method, finite element method.

[1] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,
[2] Політехніка Опольська, Ополє, Польща

Одержано
01.12.20