https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.5-10

УДК 512.55+512.643.4

В. М. Петричкович[1]✉, Г. В. Зеліско[2], Н. Б. Ладзоришин[1]

СТАНДАРТНА ФОРМА МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЕМ ЦІЛИХ ГАУСОВИХ ЧИСЕЛ ВІДНОСНО (*Z*, *K*)-ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

Досліджено стандартну форму матриць над квадратичними кільцями відносно $(z,\ k)$*-еквівалентності. Встановлено, що стандартна форма матриць над квадратичним кільцем цілих гаусових чисел, евклідові норми визначників яких є менші, ніж чотири, дорівнює її канонічній діагональній формі. Такі матриці над квадратичним кільцем цілих гаусових чисел* $(z,\ k)$*-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони еквівалентні, тобто їхні канонічні діагональні форми рівні.*

Ключові слова*: квадратичне евклідове кільце, квадратичне кільце головних ідеалів,* $(z,\ k)$*-еквівалентність матриць, стандартна форма матриці.*

У багатьох задачах, зокрема факторизації матриць, під час побудови методів розв'язування певних матричних рівнянь використовують стандартні форми матриць відносно різних типів еквівалентностей, зокрема напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць [3, 4, 9, 10, 12], узагальненої еквівалентності матриць і їх пар над кільцями [10, 13, 18, 19]. У праці [7] введено поняття (z, k)-еквівалентності матриць над квадратичними кільцями і встановлено стандартну форму матриць щодо цієї еквівалентності. Таку ж еквівалентність матриць над квадратичними евклідовими кільцями та квадратичними кільцями головних ідеалів досліджували раніше [2, 8, 15] і встановили спеціальні форми матриць і їх пар відносно цієї еквівалентності. Ця форма у праці [16] використана для розроблення методу розв'язування матричних діофантових рівнянь над квадратичними евклідовими кільцями та вивчення структури їх розв'язків. Матричні рівняння типу Сильвестра та матричні діофантові рівняння над квадратичними кільцями розглянуто також і у працях [5, 6].

У цій статті досліджено стандартну форму матриць над квадратичними кільцями відносно (z, k)-еквівалентності. Зокрема, виділено класи матриць над квадратичним кільцем цілих гаусових чисел, для яких стандартна форма дорівнює їх канонічній діагональній формі і єдина.

Нехай $\mathbb{Z}$ – кільце цілих чисел, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0, 1$ і k не ділиться на квадрат простого числа. Тоді $\mathrm{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ – квадратичне кільце, що містить такі елементи:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{k}] = \{a + b\sqrt{k} \mid a, b \in \mathbb{Z}\},\ \text{якщо}\ k = 2, 3\ (\mathrm{mod}\ 4),$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{k}] = \left\{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{k} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ 2 \mid (a-b)\right\},\ \text{якщо}\ k = 1\ (\mathrm{mod}\ 4).$$

Квадратичне кільце $\mathrm{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ називають уявним, якщо $k < 0$, і дійсним, – якщо $k > 0$.

В евклідовому квадратичному кільці через $\mathcal{E}(a)$ позначають евклідову норму елемента $a \in \mathrm{K}$. Відомо, що квадратичних евклідових кілець є скінченна кількість. Очевидно, що вони є кільцями головних ідеалів. Проте існують квадратичні кільця головних ідеалів, які не є евклідовими, зокрема

✉ vas_petrych@yahoo.com

кільця $\mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-43}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-67}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-163}]$. Існують квадратичні кільця, які не є кільцями головних ідеалів, наприклад, кільце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Матриці з елементами з квадратичних кілець розглядають і використовують в теорії чисел та інших розділах математики. Їх структуру вивчали над певними квадратичними кільцями, зокрема, над квадратичними евклідовими та кільцями цілих гаусових чисел. У статті [11] розглянуто задачу про подібність матриць другого порядку над кільцем цілих гаусових чисел зі звідним характеристичним многочленом і описано класи подібних матриць. В теорії чисел добре відомі узагальнені суми Клостермана, поширені над кільцем цілих гаусових чисел $\mathbb{Z}[i]$, і отримані оцінки таких сум [1, 20]. У працях [14, 21] вивчали так звані циклотомічні матриці над квадратичними кільцями, зокрема над кільцями цілих гаусових чисел, класифікували такі матриці та пов'язали з графами.

Надалі через $M(n, \mathrm{K})$ позначатимемо кільце квадратних матриць n-го порядку над квадратичним евклідовим кільцем $\mathrm{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$.

Означення. Матриці A та B з кільця $M(n, \mathrm{K})$ називають (z, k)-еквівалентними, якщо існують такі оборотні матриці S над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ та Q над квадратичним кільцем K, що $A = SBQ$.

Відомо, що над квадратичним евклідовим кільцем K, а отже, і над квадратичним кільцем головних ідеалів кожна $n \times n$ матриця A еквівалентна до канонічної діагональної форми [17], тобто існують такі оборотні матриці $U, V \in GL(n, \mathrm{K})$, що

$$D^A = UAV = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r, 0, \ldots, 0),$$

$\mu_i \mid \mu_{i+1}$, $i = 1, \ldots, r-1$.

У працях [2, 8, 15] встановили спеціальні трикутні форми для матриць над квадратичними кільцями відносно (z, k)-еквівалентності. Зокрема, кожну $n \times n$-матрицю A над квадратичним евклідовим кільцем (z, k)-еквівалентними перетвореннями звели до спеціальної нижньої трикутної форми T^A з інваріантними множниками матриці A на головній діагоналі, тобто довели, що існують такі верхня унітрикутна $S \in GL(n, \mathbb{Z})$ і оборотна $Q \in GL(n, \mathrm{K})$ матриці, що

$$T^A = SAQ = \begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ t_{12}\mu_1 & \mu_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ t_{n1}\mu_1 & t_{n2}\mu_2 & \ldots & \mu_n \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

де

$$t_{ij} = 0, \text{ якщо } \mu_i = 1, \ i, j = 1, \ldots, n, \ j < i, \tag{2}$$

$$\mathcal{E}(t_{ij}) < \frac{\mathcal{E}(\mu_i)}{\mathcal{E}(\mu_j)}, \text{ якщо } t_{ij} \neq 0, \ i, j = 1, \ldots, n, \ j < i, \tag{3}$$

де $\mathcal{E}(a)$ означає евклідову норму елемента $a \in \mathrm{K}$.

Подібну трикутну форму з інваріантними множниками на головній діагоналі для матриць над квадратичними кільцями головних ідеалів встановили у статті [15]. Матриця A над квадратичним кільцем головних ідеалів K

(z, k)-еквівалентна до трикутної матриці T^A, тобто існують такі оборотні матриці $S \in GL(n, \mathbb{Z})$, $Q \in GL(n, K)$, що

$$T^A = SAQ = \begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ t_{12}\mu_1 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ t_{n1}\mu_1 & t_{n2}\mu_2 & \dots & \mu_n \end{Vmatrix},$$

де $t_{ij} \in K_{\delta_{ij}}$, $K_{\delta_{ij}}$ – клас лишків за модулем $\delta_{ij} = \dfrac{\mu_i}{\mu_j}$, $j = 1, \dots, i-1$, $i = 1, \dots, n$.

Трикутну форму T^A вигляду (1) з умовами (2) і (3) називають стандартною формою матриці A відносно (z, k)-еквівалентності.

Стандартні форми T^A матриці A визначають неоднозначно. Кількість стандартних форм T^A над квадратичними кільцями може бути скінченною або ж нескінченною.

Відомо [7], що якщо K – квадратичне евклідове уявне кільце, то стандартних форм T^A матриці A відносно (z, k)-еквівалентності є скінченна кількість.

Розглянемо такий приклад.

Нехай

$$A = \begin{Vmatrix} -1+2i & 1 \\ -2+3i & 1 \end{Vmatrix}$$

– 2×2-матриця над кільцем цілих гаусових чисел $\mathbb{Z}[i]$. Тоді $D^A = \mathrm{diag}(1, 1-i)$. Матрицю A (z, k)-еквівалентними перетвореннями зводимо до стандартної форми, тобто доводимо існування оборотних матриць

$$S = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}$$

над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і

$$Q = \begin{Vmatrix} -i & -1 \\ 0 & i \end{Vmatrix}$$

над квадратичним кільцем $\mathbb{Z}[i]$ і стандартною формою матриці A є

$$T^A = SAQ = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ i & 1-i \end{Vmatrix}.$$

Стандартних форм T^A матриці A є п'ять:

$$T_1^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-i \end{Vmatrix}, \quad T_2^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-i \end{Vmatrix}, \quad T_3^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1-i \end{Vmatrix},$$

$$T_4^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ i & 1-i \end{Vmatrix}, \quad T_5^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1-i \end{Vmatrix}.$$

Зрозуміло, що найпростішою серед них є діагональна

$$T_1^A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-i \end{Vmatrix} = D^A ,$$

яку вважаємо канонічною стандартною формою матриці A.

Тому необхідно виділити класи матриць над $\mathbb{Z}[i]$, для яких можна вказати простішу стандартну форму відносно (z, k)-еквівалентності, зокрема, канонічну діагональну форму матриці A, яка є єдиною. Встановили, що такими є матриці, евклідові норми визначників яких менші, ніж чотири.

Серед стандартних форм T^A матриці A у деяких випадках можна вибрати одну з певними властивостями, як ілюстровано у прикладі, і таку стандартну форму вважаємо канонічною відносно (z, k)-еквівалентності.

Теорема. Нехай $\mathbb{Z}[i]$ – кільце цілих гаусових чисел. Матриця $A \in M(n, \mathbb{Z}[i])$ з евклідовою нормою її визначника $\det A$, меншою, ніж чотири, тобто $\mathcal{E}(\det A) < 4$, (z, k)-еквівалентна до стандартної форми T^A, яка дорівнює канонічній діагональній формі D^A матриці A, тобто $T^A = D^A$. Така стандартна форма матриці A єдина.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\mathcal{E}(\det A) < 4$, то канонічною діагональною формою матриці A є діагональна матриця $D^A = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \varphi)$, де φ – одне зі значень

$$1, -1, i, -i, 1+i, 1-i, -1-i, -1+i . \tag{4}$$

Розглянемо трикутні матриці з елементами $1, \ldots, 1, \varphi$ на головній діагоналі, де φ пробігає значення (4). Елементи під діагоналлю дорівнюють нулю, або їхні евклідові норми менші, ніж відповідних елементів на головній діагоналі. Ці матриці є вигляду

$$\begin{Vmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ t_1 & \ldots & t_{n-1} & \varphi \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

де $\mathcal{E}(t_j) < \mathcal{E}(\varphi)$, $j = 1, \ldots, n-1$.

Звідси випливає, що евклідові норми ненульових елементів t_j за всіх значень φ з (4) дорівнюють одиниці. Отже, t_j дорівнюють нулю, або є оборотними елементами в $\mathbb{Z}[i]$, тобто дорівнюють $1, -1, i, -i$.

Поклавши, наприклад, $\det A = \varphi = 1+i$, одержимо такі стандартні форми T^A матриці A:

$$\begin{Vmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ t_1 & \ldots & t_{n-1} & 1+i \end{Vmatrix},$$

де $\mathcal{E}(t_j) < \mathcal{E}(1+i)$, і t_j набуває значень $t_j = 0, 1, -1, i, -i$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Їх кількість є максимально можливою. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що всі стандартні форми T^A (z, k)-еквівалентні до канонічної діагональної форми $D^A = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \varphi)$ матриці A. Аналогічно доводять теорему для матриць вигляду (5) за інших значень φ: $1, -1, i, -i, 1-i, -1-i, -1+i$.

Теорема доведена.

Очевидно, що якщо матриці A і B над квадратичним кільцем гаусових чисел $\mathbb{Z}[i]$ (z, k)-еківалентні, тоді A і B – еквівалентні, тобто їх канонічні діагональні форми рівні $D^A = D^B$. Обернене твердження правильне не для всіх матриць.

Із теореми отримуємо такий наслідок.

Наслідок. Нехай $A, B \in M(n, \mathbb{Z}[i])$. Матриці A і B, для яких $\mathcal{E}(\det A) < 4$, $\mathcal{E}(\det B) < 4$, (z, k)-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони еквівалентні, тобто $D^A = D^B$.

1. *Величко И. Н.* Обобщенные суммы Клостермана над кольцом матриц $M_n(\mathbb{Z}[i])$ // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. – 2010. – 1, № 19. – С. 9–20.
2. *Зеліско В. Р., Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Про еквівалентність матриць над квадратичними евклідовими кільцями // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип. 4. – С. 16–21.
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. – 282 с.
4. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
5. *Ладзоришин Н. Б.* Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх і різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 2 – С. 47–54.
   Те саме: Ladzoryshyn N. B. Integral solutions of matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings // J. Math. Sci. – 2017. – 223, No. 1. – P. 50–59, https://doi.org/10.1007/s10958-017-3337-0.
6. *Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Матричні лінійні одно- та двобічні рівняння над квадратичними кільцями // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2018. – 85. – С. 32–40, https://doi.org/10.30970/vmm.2018.85.032-040
7. *Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Стандартна форма матриць над квадратичними кільцями відносно (z,k)-еквівалентності та структура розв'язків матричних двобічних лінійних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 2. – С. 49–56.
8. *Ладзоришин Н. Б.* Про еквівалентність пар матриць, визначники яких є степенями простих чисел, над квадратичними евклідовими кільцями // Карпатські мат. публ. – 2013. – 5, № 1. – С. 63–69.
9. *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – 26. – С. 13–16.
   Те саме: *Petrichkovich V. M.* Semiscalar equivalence and the Smith normal form of polynomial matrices // J. Sov. Math. – 1993. – 66, No. 1. – P. 2030–2033, https://doi.org/10.1007/BF01097386
10 *Петричкович В. М.* Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С.Підстригача НАН України, 2015. – 312 с.
11. *Сидоров С. В.* О подобии матриц второго порядка над кольцом целых гауссовых чисел, имеющих приводимый характеристический многочлен // Матем. моделирование. Оптимальное управление. Вестник Нижегородск. ун-та им. Н. И. Лобачевского. – 2008. – № 4. – С. 122–126.
12. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* Solutions of the matrix linear bilateral polynomial equation and their structure // Algebra Discrete Math. – 2019. – 27. No. 2, – P. 243–251.
13 *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* The matrix linear unilateral and bilateral equtions with two variables over commutative rings. // International Scholarly Research Network, ISRN Algebra, – 2012. Article ID 205478, 14 pages, https://doi.org/10.5402/2012/205478.

14. *Greaves G.* Cyclotomic matrices over the Eisenstein and Gaussian integers // J. Algebra. – 2012. – 372. – P. 560–583, https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.09.006
15. *Ladzoryshyn N., Petrychkovych V.* Equivalence of pairs of matrices with relatively prime determinants over quadratic rings of principal ideals // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. – 2014. – 76, No. 3. – P. 38–48.
16. *Ladzoryshyn N. B., Petrychkovych V. M., Zelisko H. V.* Matrix Diophantine equations over quadratic rings and their solutions // Carpathian Math. Publ. – 2020. – 12, No. 2. – P. 368–375, https://doi.org/10.15330/cmp.12.2.368-375
17. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Academic Press, 1972. – 224 p.
18. *Petrychkovych V.* Generalized equivalence of pairs of matrices // Linear Multilinear Algebra. – 2000. – 48, No. 2. – P. 179–188, https://doi.org/10.1080/03081080008818667
19. *Petrychkovych V.* Standard form of pairs of matrices with respect to generalized equivalence // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – 61. – С. 148–155.
20. *Savastru O. V., Varbanets S. P.* Norm Kloosterman sums over $\mathbb{Z}[i]$ // Algebra Discrete Math. – 2011 – 11, No. 2. – P. 82–91.
21. *Taylor G.* Cyclotomic matrices and graphs over the ring of integers of some imaginary quadratic fields // J. Algebra. – 2011. – 331. – P. 523–545, https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2011.02.009

THE STANDARD FORM OF MATRICES OVER THE RING OF GAUSSIAN INTEGERS WITH RESPECT TO (Z, K)-EQUIVALENCE

The standard form of matrices over quadratic rings with respect to (z, k)-equivalence is investigated. It is established that the standard form of matrices over quadratic ring of Gaussian integers, the Euclidean norms of the determinants of which are less than four, is equal to its canonical diagonal form. Such matrices over quadratic ring of Gaussian integers are (z, k)-equivalent if and only if they are equivalent, i.e. their canonical diagonal forms are equal.

Key words: Euclidean quadratic ring, quadratic principal ideal ring, (z,k)-equivalence of matrices, standard form of matrix.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів
[2] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
10.10.20