https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.43-47

УДК 512.53+512.64

О. В. Зубарук ✉

ПРО АЛГЕБРУ АУСЛЕНДЕРА ОДНІЄЇ КОМУТАТИВНОЇ НАПІВГРУПИ СКІНЧЕННОГО ЗОБРАЖУВАЛЬНОГО ТИПУ

Розглянуто матричні зображення стандартних наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними ідемпотентними елементами. Для єдиної такої наднапівгрупи скінченного зображувального типу описана їхня алгебра Ауслендера.

Ключові слова: *поле, наднапівгрупа, ідемпотентний елемент, визначальні співвідношення, матричні зображення, канонічна форма, алгебра Ауслендера.*

Вступ. Напівгрупи третього порядку вперше описав у 1953 р. Т. Тамура [7]. У 1955 р. Г. Е. Форсайт отримав [6] аналогічний результат за допомогою комп'ютерної програми. В обох статтях опис одержано (з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму) в термінах таблиць Келі. Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп вказані в працях [1, 2].

Згідно з [2, Теорема 1], всі напівгрупи третього порядку є ручними (означення ручних та диких матричних задач наведено в праці Ю. А. Дрозда [5]). Серед них, якщо не розглядати ні циклічні напівгрупи, ні циклічні з приєднаними одиничним чи нульовим елементами (бо вони нецікаві), є лише три комутативні напівгрупи скінченного зображувального типу над довільним полем K (тобто мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень). Однією із таких напівгруп є напівгрупа, породжена двома взаємно анульовними ідемпотентними елементами, матричні зображення якої вивчали раніше [2], а матричні зображення її стандартних (пов'язаних із визначальними співвідношеннями відносно мінімальної системи твірних) наднапівгруп – у праці [3].

Це дослідження присвячене опису алгебр Ауслендера для наднапівгруп скінченного зображувального типу.

1. **Попередні відомості**. Розглянемо напівгрупу T, породжену двома взаємно анульовними ідемпотентами, тобто напівгрупу з елементами $0,\ b,\ c$, (мінімальною) системою твірних $b,\ c$ і визначальними співвідношеннями $b^2=b$, $c^2=c$, $bc=0$, $cb=0$, які далі позначатимемо відповідно через (b), (c), (bc), (cb).

Введемо такі напівгрупи:

$$T^{(b)} := T \setminus (b) := (0,\ b,\ c) = \langle b,\ c \rangle :\ c^2=c,\ bc=0,\ cb=0\,;$$

$$T^{(c)} := T \setminus (c) := (0,\ b,\ c) = \langle b,\ c \rangle :\ b^2=b,\ bc=0,\ cb=0\,;$$

$$T^{(bc)} := T \setminus (bc) := (0,\ b,\ c) = \langle b,\ c \rangle :\ b^2=b,\ c^2=c,\ cb=0\,;$$

$$T^{(cb)} := T \setminus (cb) := (0,\ b,\ c) = \langle b,\ c \rangle :\ b^2=b,\ c^2=c,\ bc=0\,.$$

Покладемо:

$$T^{(x,y)} := T \setminus \{(x),\ (y)\} \text{ для } x,\ y \in \{(b),\ (c),\ (bc),\ (cb)\},\ x \neq y\,;$$

✉ Sambrinka@ukr.nett

$T^{(x,y,z)} := T \setminus \{(x),\ (y), (z)\}$ для $x,\ y,\ z \in \{(b),\ (c),\ (bc),\ (cb)\}$,

$x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$.

Очевидно, що за переставлення $x,\ y,\ z$ напівгрупи $T^{(x,y)}$ і $T^{(x,y,z)}$ не змінюються. Кожна із введених напівгруп має фактор-напівгрупу, ізоморфну напівгрупі T, тобто є наднапівгрупою напівгрупи T.

У праці [3] доведена така теорема.

Теорема 1. *Для довільного поля* K *істинні такі твердження.*

1) $T^{(x)}$ *– напівгрупа скінченного зображувального типу для* $x \in \{(bc),\ (cb)\}$;

2) $T^{(x)}$ *– ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для* $x \in \{(b),\ (c)\}$;

3) $T^{(x,y)}$ *– ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для* $x,\ y \in \{(b),\ (c)\}$ *або* $x,\ y \in \{(bc),\ (cb)\}$;

4) $T^{(x,y)}$ *– дика напівгрупа для* $x \in \{(b),\ (c)\}$, $y \in \{(bc),\ (cb)\}$ *або* $x \in \{(bc),\ (cb)\}$, $y \in \{(b),\ (c)\}$;

5) $T^{(x,y,z)}$ *– дика напівгрупа для довільних* $x,\ y,\ z \in \{(b),\ (c),\ (bc),\ (cb)\}$.

Отже, враховуючи, що автоморфізм $b \leftrightarrow c$ напівгрупи $T^{(bc)}$ індукує ізоморфізм напівгруп $T^{(bc)}$ і $T^{(cb)}$, маємо (з точністю до ізоморфізму) єдину наднапівгрупу скінченного зображувального типу $T^{(bc)}$.

У праці [3] отримано канонічну форму її матричних зображень.

Теорема 2. *Канонічна форма для матричних зображень напівгрупи* $T^{(bc)}$ *така:*

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тут через $B,\ C$ позначено відповідно матрицю зображення, що відповідає твірному елементу $b,\ c$; E – одинична матриця будь-якого розміру $n \times n$ $(n \neq 0)$.

Зауважимо, що матрицю зображення, яка відповідає нульовому елементу напівгрупи, завжди вважають нульовою.

2. **Формулювання основного результату**. Як і раніше, всі зображення розглядаємо над полем K. Алгеброю Ауслендера алгебри скінченного зображувального типу називають алгебру ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних зображень (по одному представнику із кожного класу еквівалентності). Якщо зображення розглядати в матричному вигляді, то й алгебра Ауслендера реалізовуватиметься у такому вигляді, і тут її природно називати матричною алгеброю Ауслендера. Зауважимо, що матрична алгебра Ауслендера не залежить від вибору представників у класах еквівалентності у тому сенсі, що всі отримані так алгебри будуть спряжені як підалгебри повної матричної алгебри відповідного порядку, а значить, ізоморфними.

Нагадаємо, що алгебра ендоморфізмів матричного зображення T деякої напівгрупи S – це множина таких всіх матриць X, що $T(x)X = XT(x)$ для будь-якого $x \in T$. Зрозуміло, що коли напівгрупу задають твірними і визначальними співвідношеннями, то рівності $T(x)X = XT(x)$ достатньо розглядати лише для твірних елементів.

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема 3. *Алгебра Ауслендера* $\mathrm{A}(S)$ *наднапівгрупи* $S = T^{(bc)}$ *напівгрупи* T *має розмірність 6 і задається такою таблицею множення (*λ_i, $1 \le i \le 6$ *– деяка система твірних):*

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
λ_1	λ_1	0	0	0	λ_5	0
λ_2	0	λ_2	0	0	0	0
λ_3	0	0	λ_3	0	0	λ_6
λ_4	0	0	0	λ_4	0	0
λ_5	0	λ_5	0	0	0	0
λ_6	λ_6	0	0	0	0	0

Доведення. Обчислимо спочатку матричну алгебру Ауслендера напівгрупи S.

Розглянемо матричне зображення напівгрупи S, яке є канонічним з одиничними клітинами порядку 1 (див. теорему 2):

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це зображення переставно подібне до прямої суми зображень

1) $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $B_2 = (1)$, $\quad C_2 = (0)$;

3) $B_3 = (0)$, $\quad C_3 = (1)$;

4) $B_4 = (0)$, $\quad C_4 = (0)$,

кожне з яких є, очевидно, нерозкладне.

Оскільки довільне зображення, що має канонічний вигляд, не містить інших прямих нерозкладних доданків, окрім 1)–4) (бо за наявності клітини E порядку $s > 1$ воно еквівалентне до прямої суми двох канонічних зображень меншої розмірності), то матричну алгебру Ауслендера задають рівності $B_0X = XB_0$, $C_0X = XC_0$ як рівняння для матриці $X = (x_{ij})$, $1 \le i,\ j \le 5$.

Легко обчислити, що рівність $B_0X = XB_0$ еквівалентна до рівностей $x_{ij} = 0$ для $i = 1,\ 2$, $j = 3,\ 4,\ 5$ і для $i = 3,\ 4,\ 5$, $j = 1,\ 2$ (див., напр., [4, VIII, §2]).

Розглянемо тепер рівність $C_0X = XC_0$. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Отже, доведено таке твердження.

Твердження. *Матрична алгебра Ауслендера* $\mathrm{A}(S)$ *напівгрупи* S *над полем* K *складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} *– елементи поля* K.

Переходимо до таблиці множення алгебри $\mathrm{A}(S)$.

Позначимо через e_{ij}, де $1 \le i,\ j \le 5$, матрицю, в якій на місці $(i,\ j)$ стоїть одиничний елемент, а на всіх інших місцях – нульовий. Із твердження випливає, що матриці $e_{11}+e_{33}$, e_{22}, e_{44}, e_{55}, e_{12}, e_{43} утворюють базис $\mathrm{A}(S)$.

Враховуючи, що $e_{ij}e_{sk} = e_{ik}$, якщо $j = s$, і $e_{ij}e_{sk} = 0$, якщо $j \neq s$, маємо таку таблицю множення:

	$e_{11}+e_{33}$	e_{22}	e_{44}	e_{55}	e_{12}	e_{43}
$e_{11}+e_{33}$	$e_{11}+e_{33}$	0	0	0	e_{12}	0
e_{22}	0	e_{22}	0	0	0	0
e_{44}	0	0	e_{44}	0	0	e_{43}
e_{55}	0	0	0	e_{55}	0	0
e_{12}	0	e_{12}	0	0	0	0
e_{43}	e_{43}	0	0	0	0	0

Ввівши позначення $\lambda_1 = e_{11} + e_{33}$, $\lambda_2 = e_{22}$, $\lambda_3 = e_{44}$, $\lambda_4 = e_{55}$, $\lambda_5 = e_{12}$, $\lambda_6 = e_{43}$, отримаємо таблицю, вказану в умові теореми.

Теорема 3 доведена.

1. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку // Наук. часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 14. – С. 62–67.
2. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: Математика і інформатика. – 2018. – 32, № 1. – С. 36–49.
3. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними ідемпотентами // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: Математика і інформатика. – 2020. – 36, № 1. – С. 7–15.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, – 1966, – 576 с.
5. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 104–114.
6. *Forsythe G. E.* SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4 // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – 6. – P. 443–447.
7. *Tamura T.* Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1953. – 3. – P. 1–11.

ON THE AUSLANDER ALGEBRA OF ONE COMMUTATIVE SEMIGROUP OF FINITE REPRESENTATION TYPE

We consider matrix representations of standard oversemigroups of the semigroup generated by two mutually annihilating idempotent elements. For the only such oversemigroup of finite representation type their algebra Auslander is described.

Key words: field, oversemigroup, idempotent element, defining relations, matrix representations, canonical form, Auslander algebra.

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
20.10.20