https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.34-42

УДК 517.983

Г. В. Івасик ✉, Є. В. Черемних

ТРАНСПОРТНИЙ ОПЕРАТОР У ПРОСТОРІ ВЕКТОР-ФУНКЦІЙ

Досліджено модель Фрідріхса для векторнозначних функцій просторового аргументу. Для цього застосовано модель Фрідріхса до операторів різної природи. Традиційно, збурення оператора подано у факторизованому вигляді. Розглянуто скалярні функції аргументу. Для розширення застосування моделі Фрідріхса, відомі результати узагальнюємо на випадок векторнозначних функцій просторового аргументу.

Мета дослідження – розглянути спектр транспортного оператора в просторі вектор-функцій, дослідити його скінченність.

Ключові слова: *спектр транспортного оператора, модель Фрідріхса, інтегральний оператор, гільбертів простір, компактність оператора, просторовий аргумент, векторнозначні функції, збурення оператора.*

Спектральна теорія – дуже важливий напрям теорії лінійних операторів. Інформація про скінченність спектра оператора є необхідною та значно спрощує обчислення в задачах.

У праці [2] подано умови для моделі Фрідріха, які дають можливість написати формулу для стрибка резольвенти на неперервному спектрі, але вони об'ємні і не дуже зручні для використання, а також відсутній прямий зв'язок з резольвентою .

Очевидно, що розв’язання диференціальних рівнянь після застосування перетворення Фур'є у багатьох випадках зводять до аналізу несамоспряженої моделі Фрідріхса, тобто суми оператора множення на незалежну змінну і оператора, збуреного обмеженим множником (див. [4]). У праці [5] вивчено спектральні особливості оператора Штурма–Ліувілля, встановлено ортогональність власних функцій та власні значення, отримано спектральний розклад. Результати отримано для скінченного проміжку $(0,\pi)$, тобто йдеться про простір $L^2(0,\pi)$.

У праці [6] модель Фрідріхса допомагає вивчити сімейства деяких матриць оператора, що можна застосувати до різних фізичних задач, використовуючи позитивно визначені оператори моделі Фрідріхса без їх спектрального розкладу.

У праці [7] вивчено спектральні властивості оператора моделі з акцентом на асимптотику для числа нескінченно багатьох власних значень.

Розглянемо оператор L для функції $u(x,\mu)$:

$$Lu = -i\mu\frac{\partial u}{\partial x} + a(x)b_1(\mu)\int_{-1}^{1} u(\mu')u(x,\mu')\,d\mu',$$

$$x \in R = (-\infty,\infty),\ \mu \in (-1,1), \tag{1}$$

де $a(x)$ – дійсна функція, $|a(x)| Me^{-\varepsilon(x)}$, $x \in R$, $\varepsilon > 0$.

Введемо область $D = R \times [-1,1]$ і матриці $b_1(\mu) = (b_{\kappa p}(\mu))$, $b(\mu') = (b_{\kappa p}(\mu')) - n \times n$ при $\kappa, p = 1,\dots,n$, аналітичні в крузі $|\mu + i\nu| = \sqrt{\mu^2+\nu^2} < 1+\varepsilon$ за деякого $\varepsilon > 0$. Функцію $u(x,\mu)$ у рівнянні (1)

✉ ivasyk-g@ukr.net

позначаємо через вектор $u(x,\mu)=\begin{pmatrix} u_1(x,\mu) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n(x,\mu) \end{pmatrix}$, а через $L^2(D)$ і H – простори

відповідно з нормами

$$\|u\|^2_{L^2(D)} = \int_R \int_{-1}^{1} \|u(x,\mu)\|^2_{C^n} dx d\mu,$$

$$\|u\|^2_H = \int_R \int_{-1}^{1} \|u(x,\mu)\|^2_{C^n} \cdot \frac{1}{|\mu|} dx d\mu .$$

Позначимо через оператор $F : L^2(D) \to L^2(D)$ перетворення Фур'є:

$$h(\tau) = (Ff)(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{i\tau x} f(x) dx \tag{2}$$

$$f(x) = \left(F^{-1}h\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-i\tau x} h(\tau) d\tau , \tag{3}$$

де $h(\tau), f(x)$ – відповідні компоненти вектора $u(x,\mu)$, а через $F_0 : L^2(D) \to H$ – оператор

$$g(\tau,\mu) = (F_0 u)(\tau,\mu) = u\left(\frac{\tau}{\mu},\mu\right), \quad F_0 : u \to g. \tag{4}$$

Для визначення оберненого оператора $F_0^{-1} : g \to H$ запишемо в рівності (4) $s = \frac{\tau}{\mu}$, тобто $\tau = s\mu$. Тоді обернений оператор має вигляд

$$u(s,\mu) = \left(F_0^{-1}g\right)(s,\mu) = g(s\mu,\mu). \tag{5}$$

Співвідношення (2)–(5) виконуються як для вектор-функцій, так і для їх компонент.

Застосуємо перетворення F (див. (2)) спочатку до першого доданка рівняння (1) і проінтегруємо його частинами:

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\tau,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{R}} e^{-i\tau x} \frac{\partial u(x,\mu)}{\partial x} dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-i\tau x}\right) u(x,\mu) dx =$$

$$= \frac{i\tau}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{i\tau x} u(x,\mu) dx = - i\tau F u(\tau,\mu) .$$

А далі – до всього виразу (1):

$$FLu(\tau,\mu) = -i\mu_0(-i\tau) Fu(\tau,\mu) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left(a(x) b_1(\mu) \int_{-1}^{1} b(\mu') u(x,\mu') d\mu' \right) e^{i\tau x} dx =$$

$$= -\mu\tau Fu(\tau,\mu) + \frac{b_1(\mu)}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left(a(x) \int_{-1}^{1} b(\mu') u(x,\mu') d\mu' \right) e^{i\tau x} dx .$$

Нагадаємо, що модель Фрідріхса є оператором множення на незалежну змінну, збуреного інтегральним оператором. Необхідно отримати множник τ з останнього виразу. Для цього використаємо оператор F_0 (див. (4), замінюючи τ на $\frac{\tau}{\mu}$, тому

$$F_0FLu(\tau,\mu) = -\tau Fu\left(\frac{\tau}{\mu},\mu\right) + \frac{b_1(\mu)}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left(a(x) \int_{-1}^{1} b(\mu') u(x,\mu') d\mu' \right) e^{i\frac{\tau}{\mu}x} dx . \quad (6)$$

Позначаємо $\varphi(\tau,\mu) = Fu\left(\frac{\tau}{\mu},\mu\right)$. Звідси випливає, що $u = F^{-1}\varphi$. Використовуючи оператор F_0^{-1} (див. (5)), маємо з останнього співвідношення $F_u(\tau,\mu) = F_0^{-1}\varphi = \varphi(\tau\mu,\mu)$.

Згідно з поданням перетворення Фур'є (3) одержимо:

$$u(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-ixy} \varphi(y,\mu) dy .$$

Отже, $u(x,\mu') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-ixy} \varphi(y,\mu'') dy$. Підставляємо вираз $u = F^{-1}F_0^{-1}\varphi$ у праву частину виразу (6):

$$F_0FLu(\tau,\mu) = -\tau\varphi(\tau) +$$

$$+\frac{b_1(\mu)}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left[a(x) \int_{-1}^{1} b(\mu') \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-ixy} \varphi(y,\mu') dy \right) \right] e^{\frac{i\tau}{\mu}x} dx. \quad (7)$$

Тепер підставимо його у ліву частину рівняння (6):

$$F_0FLu(\tau,\mu) = -\tau\varphi(\tau) + \frac{b_1(\mu)}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left(a(x) \int_{-1}^{1} b(\mu') u(x,\mu') d\mu' \right) e^{-i\frac{\tau}{\mu}x} dx. \quad (8)$$

Використовуючи рівняння (5) і (3), отримуємо елементи $F_0(\tau,\mu) = \varphi(\tau\mu,\mu)$ і $u(\tau,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{i\tau x} \varphi(\tau\mu,\mu)\, d\tau$.

Рівність (8) означає рівність елементів:

$$F_0FLF^{-1}F_0^{-1}\varphi = \tau\varphi(\tau,\mu) + V\varphi(\tau,\mu), \quad (9)$$

де $V\varphi(\tau,\mu) = \frac{b_1(\mu)}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left[a(x) \int_{-1}^{1} b(\mu') \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{i\frac{s'}{\mu'}x} \varphi(s',\mu') \frac{ds'}{|\mu'|} d\mu' \right) e^{-ix\frac{\tau}{\mu}} \right] dx.$

Позначимо допоміжний простір $G = L^2\left(R, C^n\right)$, де

$$\|f\|_G^2 = \int_R \|f\|_{C^n}^2 dx . \quad (10)$$

Вибираємо множники $a_1(x)$, $a_2(x)$ так, що $a(x) = \overline{a_1(x)} a_2(x)$, $|a_1(x)| = |a_2(x)|$.

Тоді з рівняння (9) отримаємо:

$$V\varphi(\tau,\mu)=\frac{b_1(\mu)}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R \overline{a_1(x)}\left[a_2(x)\int\limits_{-1}^{1}b(\mu')\left(\int\limits_R \varphi(s',\mu')e^{i\frac{s'}{\mu'}x}ds'\right)\right]\frac{d\mu'}{|\mu'|}e^{-ix\frac{\tau}{\mu}}dx\,. \quad (11)$$

Отже, оператор збурення $V=A^*B$, де

$$(B\varphi)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R\int\limits_{-1}^{1}b(\mu')\varphi(s'\mu')e^{i\frac{s'}{\mu'}}ds', \qquad B:H\to G, \quad (12)$$

$$\left(A^*c\right)(\tau,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}b_1(x)\int\limits_R\overline{a_1(x)}c(x)e^{-ix\frac{\tau}{\mu}}dx, \qquad A:G\to H. \quad (13)$$

Позначимо $S\varphi(\tau)=\tau\varphi(\tau)$, $\varphi\in L^2(R)$ – оператор множення на незалежну змінну, а оператор T як суму оператора множення і збуреного оператора: $T=S+A^*B$, а резольвенти мають вигляд: $T_\zeta=(T-\zeta)^{-1}$, $S_\zeta=(S-\zeta)^{-1}$. Для пошуку резольвенти T_ζ розглянемо рівняння $(T-\zeta)\psi=\varphi$, тобто $(S-\zeta)\psi+A^*B\psi=\varphi$. Домножуючи зліва на оператор S_ζ, маємо:

$$\psi+S_\zeta A^*B\psi=S_\zeta\varphi. \quad (14)$$

Домножуємо рівняння (14) зліва на оператор B, тоді

$$K(\zeta)=1+BS_\xi A^*. \quad (15)$$

Якщо оператор $K(\zeta)^{-1}$ існує, то існує елемент $B\psi=K(\zeta)^{-1}BS_\zeta\varphi$ і резольвента (див. 14):

$$T_\zeta\varphi=S_\zeta-S_\zeta K(\zeta)^{-1}BS_\zeta\varphi. \quad (16)$$

Лема 1. Оператори A, B обмежені і якщо $|\mathrm{Im}\,\zeta|>\|A\|\cdot\|B\|$, тоді обмежений оператор $K(\zeta)^{-1}$ існує.

Доведення. З рівності (15) випливає $\|K(\zeta)-1\|=\left\|BS_\zeta A^*\right\|<\dfrac{\|B\|\cdot\|A\|^*}{|\mathrm{Im}\,\zeta|}$ і, якщо $\dfrac{\|A\|\cdot\|B\|}{|\mathrm{Im}\,\zeta|}<1$, то оператор $K(\zeta)^{-1}$ існує.

Залишається довести, що A, B – обмежені оператори.

Підставляючи $\begin{cases}s'=\tau\mu'\\ ds'=d\tau\,|\,\mu'\end{cases}$ у рівність (12), отримаємо:

$$B\varphi=\frac{a_2(x)}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-1}^{1}b(\mu')\left(\int\limits_R\varphi(s',\mu')e^{i\frac{s'}{\mu'}x}ds'\right)\frac{d\mu'}{|\mu'|}.$$

Отже, $\|B\varphi\|_G\le\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}|a_2(x)|\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\|b(\mu')\|\cdot\left\|\int\limits_R\varphi(\tau\mu',\mu')e^{ix\tau}\right\|_{C^n}d\mu'\le$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(a_2(x)\,|\left(\int\limits_{-1}^{1}\|b(\mu')\|_{C^n}^2d\mu'\right)\right)^{1/2}\cdot\left(\int\limits_{-1}^{1}\left\|\int\limits_R\varphi(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}d\tau\right\|_{C^n}^2d\mu'\right)^{1/2}.$$

Позначимо $\varphi(x)=\left(\varphi_j(x)\right)$, $j=1\ldots n$, де n визначено в описі рівняння (1).

Відомо, що

1) якщо $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R f(t)e^{-i\alpha t}dt$, то $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R F(\alpha)e^{i\alpha t}d\alpha$, (17)

2) якщо $g(\lambda)=\int\limits_R f(t)e^{-i\tau\lambda}dt$, то $\int\limits_R \left(g(\lambda)^2\,d\lambda\right)=2\pi\int\limits_R \left(f(x)\right)^2 dx$.

Згідно з рівністю (12) маємо:

$$B\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\alpha_2(x)\int\limits_{-1}^{1} b(\mu')\left(\int\limits_R \varphi(s',\mu')e^{i\frac{s'}{\mu'}x}ds'\right)\frac{d\mu'}{|\mu'|}.$$

Підстановка $s'=\tau\mu'$, $ds'=d\tau(\mu')$ дає:

$$B\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(a_2(x)\right)\int\limits_{-1}^{1} b(\mu')\left(\int\limits_R \varphi(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}d\tau\right)d\mu'.$$

Як наслідок для норми оператора маємо:

$$\|B\varphi\|_{C^n}\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|a_2(x)|\left(\int\limits_{-1}^{1}\|\tau(\mu')\|_{C^n}\,d\mu'\right)\cdot\int\limits_R\left\|\varphi(\tau\mu'\mu')e^{i\tau\mu}d\tau\right\|_{C^n}d\mu'\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|a_2(x)|\left(\int\limits_{-1}^{1}\|b(\mu')\|^2_{C^n}\,d\mu'\right)^{1/2}\left[\int\limits_{-1}^{1}\left\|\int\limits_R\varphi(\tau\mu'\mu')e^{i\tau x}d\tau\right\|^2\right]^{1/2}.$$

Підставивши $s'=\tau\mu'$, $ds'=d\tau\cdot|\mu'|$, маємо:

$$B\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_2(x)\int\limits_{-1}^{1} b(\mu')\left(\int\limits_R \varphi(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}d\tau\right)d\mu',$$

звідки

$$\|B\varphi\|_{C^n}\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|a_2(n)|\int\limits_{-1}^{1}\left[\|b(\mu')\|_{C^n}\int\limits_R\varphi(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}d\tau\right]d\mu'\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|a_2(n)|\left(\int\limits_{-1}^{1}\|b(\mu')\|^2_{C^n}\,d\mu'\int\limits_R\varphi(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}d\tau\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{-1}^{1}\left\|\int\limits_R\varphi(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}d\tau\right\|^2 d\mu'\right)^{1/2}.$$

Визначимо C з допомогою нерівності

$$\|b(\mu')\|^2_{C^n}\le\frac{1}{2\pi}|a_2(x)|^2\left(\int\limits_{-1}^{1}\|b(\mu')\|^2_{C^n}\,d\mu'\int\limits_R\varphi(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}d\tau\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{-1}^{1}\left\|\int\limits_R\varphi(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}d\tau\right\|^2_{C^n}d\mu'\right)\le$$

$$\le C\left|a_2(x)\right|^2\int_{-1}^{1}\left\|\int_R \varphi(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}d\tau\right\|^2 d\mu'.$$ Отже, оцінкою квадрата норми буде:

$$\left\|\int_R \varphi(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}d\tau\right\|_{C^n}^2=\sum_{j=1}^{n}\left|\int_R \varphi_j(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}d\tau\right|^2.$$

Нехай $\left|a_2(x)\right|<C_0$, згідно з (12) і (11) отримуємо:

$$\left\|B\varphi\right\|_G^2=\int_R\left\|B\varphi\right\|_{C^n}^2dx\le C_0C\int_{-1}^{1}\left\|\int_R \varphi(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}d\tau\right\|_{C^n}^2dxd\mu'=$$

$$=C_0C\left[\sum_{j=1}^{n}\int_R\left(\int_R \varphi(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}d\tau\right)dx\right]d\mu'=\text{ (див. (17) }=$$

$$=C_0C\cdot 2\pi\int_{-1}^{1}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_R\left|\varphi_j(\tau\mu',\mu')e^{i\tau x}\right|^2d\tau\right)d\mu'.$$

Позначимо $C_1=2\pi F_0C$, підстановка $\tau\mu'=\zeta'$, $d\tau\cdot\mu'=d\zeta'$ дає:

$$\left\|B\varphi\right\|_G^2\le C_1\int_{-1}^{1}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_j(s',\mu')\right|^2\frac{ds'}{|\mu'|}\right)d\mu'=C_1\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_j\right\|_H^2=C_1\left\|\varphi_j\right\|_H,$$

$\left\|B\varphi\right\|_G\le\sqrt{C}$, $\left\|\varphi\right\|_H$, отже, оператор B є обмежений.

Лема 1 доведена.

Якщо припустити, що $a(x)\neq 0$ на деякому скінченному проміжку, то з подання (13) випливає, що оператор A^* є теж обмежений, але тоді і оператор A обмежений.

Нехай $f(x)$ – деяка функція зі значеннями в просторі H.

Кажемо, що вона – слабко аналітична, якщо для довільного $e\in H$ функція $\left(f_x,e\right)_H$ має похідну, і сильно аналітична, якщо

$$\lim_{x\to 0}\left\|f'(x)-\frac{1}{h}-\frac{1}{h}\left(f(x+h)-f(x)\right)\right\|_H=0.$$

Згідно з відомою теоремою Данфорда зі слабкої аналітичності випливає сильна аналітичність.

Носієм функції називають множину $\operatorname{supp} f=\{x: f(x)\neq 0\}$.

Лема 2. Якщо $\operatorname{supp} a$ є компактом і обернений оператор $K(\zeta)^{-1}$ існує, тоді квадратична форма резольвенти $\left(T_\zeta,\varphi,\psi\right)$, $\varphi,\psi\in\Phi$ допускає аналітичне продовження з півплощини $\operatorname{Im}\zeta>0$ і $\operatorname{Im}\zeta<0$ через півосі $(-\infty,0)$ і $(0,\infty)$.

Д о в е д е н н я. Згідно з поданням резольвенти (16) маємо:

$$\left(T_\zeta,\varphi,\psi\right)=\left(S_\zeta\varphi,\psi\right)-\left(K(\zeta)^{-1}BS_\zeta\varphi,AS_\zeta\varphi\right),\ \zeta\notin R.$$

Згідно з поданням оператора B в (12) одержимо:

$$\left(BS_\zeta\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_2(x)\int_R\int_{-1}^{1}b(\mu')\frac{1}{s'-s}\varphi(s',\mu')e^{i\frac{s'}{\mu'}x}\frac{d\mu'}{|\mu'|}ds',\quad B:H\to G.$$

Нехай $c \in G$ – довільний елемент, тоді

$$\left(BS_{\zeta}\varphi, e\right)_G = \int\limits_R a_2(x) \int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} \left(b(\mu') \frac{1}{s'-\zeta} \varphi(s', \mu'), e(x) \right)_G e^{i\frac{s'}{\mu'}} \frac{d\mu'}{|\mu'|} ds'\, dx .$$

Підстановка $\tau = \dfrac{s'}{\mu'}$, $\begin{matrix} s' = \tau\mu' \\ ds' = d\tau|\mu'| \end{matrix}$ дає:

$$\left(BS_{\xi}\varphi, e\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R a_2(x) \int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} \left(b(\mu') \frac{1}{\tau\mu'-\zeta} \varphi(\tau\mu', \mu'), e(x) \right)_{C^n} e^{i\tau x} d\mu'\, d\tau\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{b(\mu')}{\tau\mu'-\zeta} \cdot \varphi(\tau\mu', \mu'), \int\limits_R \overline{a_2(x)} e^{-\tau x} e(x)\, dx \right)_{C^n} d\mu'\, d\tau.$$

Функція $\int\limits_R \overline{a_2(x)} e^{i\tau x} e(x)\, dx$ аналітична від τ, так як нескінченно диференційовна.

Вираз $\left(BS_{\xi}\varphi, e\right)_G$ має вигляд $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{G(\mu')}{\tau\mu'-\zeta} \varphi(\tau, \mu', \mu')\, d\mu'$, де $G(\mu')$ – деяка функція, яка є слабко аналітична по μ'. Отже, вираз $BS_{\xi}\varphi$ є сильно аналітичним по ζ.

Аналогічно, вираз $AS_{\xi}\psi$ також є строго аналітичним по ζ і аналітична оператор-функція $K(\zeta)$ (див. (14)) також строго аналітична по ζ.

Якщо $\zeta = 0$, то інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{b(\mu')}{\tau\mu'-\zeta} \varphi(\tau, \mu', \mu')\, d\mu'$ розбігається.

Лема 2 доведена.

Згідно з (12), (13), (15)–(17) маємо:

$$\left(K(\zeta) - 1\right)(g) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_R a_2(x) \overline{a_1(g)} \left(\int\limits_R \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{i(x-g)\frac{s}{\mu'}} (\mu')\, d\mu'}{s'-\zeta} \begin{bmatrix} c_1(x) \\ \cdots \\ c_n(x) \end{bmatrix} \right) dx , \qquad (18)$$

де $b_0(\mu) = b(\mu) b_1(\mu)$.

Підставимо унітарні оператори $b(\mu) = b_1(\mu) = b_0(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (фактично $n = 2$) у вираз (18) і результат підстановки позначимо $\tilde{K}(\zeta)$.

Тоді функцію (18) можна записати так:

$$\left(K(\xi) - 1\right) \begin{pmatrix} a \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\tilde{K}(\zeta) - 1\right) a_1 & 0 \\ 0 & \left(\tilde{K}(\zeta) - 1\right) a_n \end{pmatrix},$$

або $K(\zeta) - 1 = \left(\tilde{K}(\zeta) - 1\right) \oplus \ldots \oplus \left(\tilde{K}(\zeta) - 1\right)$.

Можемо узагальнити теореми 2.3 і 2.4 з праці [3] і використати одержані там формули, лему 2 і отримати теореми 1 і 2.

Теорема 1. Оператор $K(\zeta)-1$ є компактним і $\|K(\zeta)-1\|_G \to 0$, $|\zeta|\to\infty$ в області $|\mathrm{Im}\,\zeta|>\nu$ для кожного $\nu>0$.

Теорема 2. Оператор $K(\zeta)-1$ допускає строго аналітичне продовження в півплощини $\mathrm{Im}\,\zeta>0$ та $\mathrm{Im}\,\zeta<0$ через піввісь.

Отже, з леми 1 і формули (15) випливає, що точка ζ належить до точкового спектра оператора T, якщо оператор $K(\zeta)^{-1}$ не існує.

Згідно з теоремою 1 точка $\zeta=0$ є єдиною точкою скупчення точкового спектра оператора T.

Модель Фрідріхса в просторі H має вигляд $T=S+V$, $V=A^*B$, де оператори A, B: $H\to G$ – обмежені, що діють у допоміжний гільбертів простір G.

Згідно з рівністю (9) маємо зображення

$$+F_0FLF^{-1}F_0^{-1}\varphi=S\varphi+V\varphi$$

або

$$(F_0F)\,L\,(F_0F)^{-1}\varphi=S\varphi+V\varphi,$$

де згідно з поданнями (12), (13) $V=A^*B$.

Висновки. Транспортний оператор подібний до деякої моделі Фрідріхса. Основний оператор $K(\zeta)^{-1}$ є компактним, тоді його спектр є скінченним. Крім того, оператор $K(\zeta)^{-1}$ допускає строго аналітичне продовження через півосі $\mathrm{Im}\,\zeta>0$ та $\mathrm{Im}\,\zeta<0$. Точка $\zeta=0$ є єдиною точкою скупчення точкового спектра.

1. *Івасик Г. В., Черемних Є. В.* Модель Фрідріха для транспортного оператора // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643, № 643. – С. 30–36.
2. *Cheremnikh E. V.* A remark about calculation of the jump of the resolvent in Friedrichs' model. // Східно-Європейськ. журн. передових технологій. – 2012. – №1 (55). – С. 37–38, https://doi.org/10.15587/1729-4061.2012.3317
3. *Cheremnikh E. V., Diaba F., Ivasyk G. V.* On time asymptotic of the solutions of transport evolution equation // Mat. comp modelyuv. Ser. Physics and mathematics : scientific papers. – Institute of cybernetics of V. M. Glushkov National academy of sciences of Ukraine, Kamyanec-Podilsky National university of Ivan Ogienko. – 2010. –Vol. 4. – P. 208–223.
4. *Ibragimova B. M.* The eigenvalues of the Friedrichs model in the one-dimensional case // The young scientist. – 2014. – No. 5. – P. 1–3.
5. *Mamedov Kh. R., Karahan D.* On an inverse spectral problem for Sturm-Liouville operator with discontinuous coefficient // Ufimsk. math. j. – 2015. – 7. No. 3. – P. 119–131.
6. *Muminov, M. I., Rasulov, T. H.* On the number of eigenvalues of the family of operator matrices // Nanosystems: physics, chemistry, mathematics. – 2014. – 5, No. 5. – P. 619–625.
7. *Muminov Z., Ismail F., Eshkuvatov Z., Rasulov J.* On the Discrete Spectrum of a Model Operator in Fermionic Fock Space // Abstr. and Appl. Analysis. – 2013. – Art. 875194. – 12 p., https://doi.org/10.1155/2013/875194

TRANSPORT OPERATOR IN THE SPACE OF VECTOR FUNCTIONS

The Friedrichs model for vector-valued functions of a spatial argument is investigated. To do this, the Friedrichs model is applied to operators of different nature. Traditionally, *the perturbation of the operator is presented in a factorized form. The scalar functions of the argument are considered. To expand the application of the Friedrichs model, we summarize the known results in the case of vector-valued functions of the spatial argument.*

Key words: *spectrum of the transport operator, Friedrichs model, integral operator, Hilbert space, compactness of the operator, spatial argument, vector-valued functions, perturbation of the operator.*

Нац. ун-т "Львівська політехніка", Львів

Одержано
02.02.20