https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.25-33

УДК 517.524

Т. М. Антонова, С. М. Возна✉

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ОДНОГО КЛАСУ ДВОВИМІРНИХ ВІДПОВІДНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

Розглянуто нескінченний гіллястий ланцюговий дріб, пов'язаний із задачею відповідності між формальним подвійним степеневим рядом і послідовністю раціональних наближень функції двох змінних. Використано формули для дійсних і уявних частин залишків фігурних наближень та багатовимірний аналог теореми Стілтьєса–Віталі для дослідження фігурно рівномірної збіжності такого дробу в деякій області та встановлено оцінку швидкості збіжності.

***Ключові слова**: збіжність, гіллястий ланцюговий дріб, фігурні наближення, фігурна збіжність.*

Вступ. Вивчення збіжності – одне із найважливіших питань, які виникають під час вивчення гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) різної структури (загального вигляду з N гілками розгалужень, двовимірних неперервних, з нерівнозначними змінними). Основними методами дослідження є метод мажорант, метод фундаментальних нерівностей та метод, що передбачає використання теореми Стілтьєса–Віталі та його багатовимірне узагальнення [9–11]. Властивості монотонності та обмеженості послідовностей різних наближень ГЛД використовують у дослідженні збіжності зі сталими дійсними елементами [1, 7, 8]. Об'єктом вивчення у цій праці є ГЛД, структуру яких запропоновано раніше [13] під час розв'язування задачі відповідності між формальним подвійним степеневим рядом і послідовністю наближень ГЛД. Застосовуючи метод мажорант та відомі результати аналітичної теорії неперервних дробів, для такого ГЛД встановили аналог ознаки Ворпіцького [14] та деякі достатні умови абсолютної та фігурно абсолютної збіжності до однієї і тієї ж границі [2]. Властивості послідовностей різних наближень з дійсними елементами розглянуто у працях [3, 4, 12].

Нижче, використовуючи формули для дійсних і уявних частин залишків наближень досліджуваного ГЛД, багатовимірний аналог теореми Стілтьєса–Віталі та один з аналогів методу фундаментальних нерівностей, досліджували фігурно рівномірну збіжність такого дробу в деякій області та отримали оцінку швидкість збіжності.

1. **Гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду**. **Їх наближення**. **Допоміжні теореми**. Вивчаємо ГЛД спеціального вигляду

$$\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{j,j}}{1}+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{j,0}}{1+\mathop{D}\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+j,k}}{1}}+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{0,j}}{1+\mathop{D}\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k,k+j}}{1}},\tag{1}$$

де

$$a_{k,l}=b_{k,l}z_1z_2,\quad a_{k,0}=b_{k,0}z_1,\quad a_{0,k}=b_{0,k}z_1z_2,\quad k,l=1,2,\ldots,\tag{2}$$

$$b_{k,l},\ k,l=0,1,\ \ldots,\ k+l\ge 1\ \text{– сталі},\ z=(z_1,z_2)\in D\subset\mathbb{C}^2.$$

Розглядаємо послідовність фігурних наближень (підхідних дробів за Siemaszko) $\left\{\tilde{f}_n(z)\right\}$, $n=1,2,\ldots$, ГЛД (1), (2):

✉ svitlanavozna@gmail.com

$$\tilde{f}_n(z)=\mathop{D}_{j=1}^{[n/2]}\frac{b_{j,j}z_1z_2}{1}+\mathop{D}_{j=1}^{n}\frac{b_{j,0}z_1}{1+\mathop{D}\limits_{k=1}^{[(n-j)/2]}\frac{b_{k+j,k}z_1z_2}{1}}+\mathop{D}_{i=1}^{n}\frac{b_{0,j}z_2}{1+\mathop{D}\limits_{k=1}^{[(n-j)/2]}\frac{b_{k,k+j}z_1z_2}{1}},$$

де $[\alpha]$ – ціла частина дійсного числа α.

ГЛД (1), (2) називають *фігурно рівномірно збіжним за Siemaszko* в області D, якщо послідовність $\{\tilde{f}_n(z)\}$ збігається рівномірно в D до скінченної границі $\tilde{f}(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n(z)$, тобто якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує такий номер k, що для всіх $m,n\ge k$ і для довільного $z\in D$ виконується нерівність $\left|\tilde{f}_n(z)-\tilde{f}_m(z)\right|<\varepsilon$.

Надалі використовуватимемо іншу форму запису фігурних наближень ГЛД (1), (2), зокрема:

$$\tilde{f}_n(z_1,z_2)=b_0+F_{0,0}^{([n/2])}+\frac{a_{1,0}}{\tilde{Q}_{1,0}^{(n-1)}}+\frac{a_{0,1}}{\tilde{Q}_{0,1}^{(n-1)}},\qquad n=1,2,\ldots,\tag{3}$$

де

$$F_{0,0}^{(p)}=\frac{a_{1,1}}{Q_{1,1}^{(p-1)}},\quad F_{k,0}^{(p)}=\frac{a_{k+1,1}}{Q_{k+1,1}^{(p-1)}},\quad F_{0,k}^{(p)}=\frac{a_{1,k+1}}{Q_{1,k+1}^{(p-1)}},\qquad k,p=1,2,\ldots,\tag{4}$$

$$\tilde{Q}_{k,0}^{(0)}=1,\qquad \tilde{Q}_{k,0}^{(p)}=1+F_{k,0}^{([(p)/2])}+\frac{a_{k+1,0}}{\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p-1)}},\qquad k,p=1,2,\ldots,\tag{5}$$

$$\tilde{Q}_{0,k}^{(0)}=1,\qquad \tilde{Q}_{0,k}^{(p)}=1+F_{0,k}^{([(p)/2])}+\frac{a_{0,k+1}}{\tilde{Q}_{0,k+1}^{(p-1)}},\qquad k,p=1,2,\ldots,\tag{6}$$

$$Q_{k+j,l+j}^{(0)}=1,\quad Q_{k+j,l+j}^{(p)}=1+\frac{a_{k+j+1,l+j+1}}{Q_{k+j+1,l+j+1}^{(p-1)}},\quad k,l=0,1,\ \ldots,\quad j,p=1,2,\ldots.\tag{7}$$

Вирази (5), (6) називають залишками фігурних наближень (3) ГЛД (1), (2), а залишками наближень (4) звичайних ланцюгових дробів – вирази (7).

Під час доведення основних результатів використовуємо дві теореми.

Теорема 1 [5, теорема 2]. *Нехай для елементів ГЛД (1), (2) виконуються нерівності*

$$Q_{i+k,k}^{(p)}\ne0,\ \ Q_{k,k+i}^{(p)}\ne0,\ \ Q_{k,0}^{(p)}\ne0,\ \ Q_{0,k}^{(p)}\ne0,\qquad i,p=0,1,\ldots,\qquad k=1,2,\ldots,$$

$$\frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_{1,1}^{(p)}\right|}\le M,\quad \frac{|a_{1,0}|}{\left|Q_{1,0}^{(p)}\right|}\le M_{1,0},\quad \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_{0,1}^{(p)}\right|}\le M_{0,1},\qquad p=0,1,\ldots,$$

$$\frac{|a_{k+j,k}|}{\left|Q_{k+j-1,k-1}^{(m+1)}Q_{k+j,k}^{(m)}\right|}\le\rho',\quad \frac{|a_{k,k+j}|}{\left|Q_{k-1,k+j-1}^{(m+1)}Q_{k,k+j}^{(m)}\right|}\le\rho'',\quad \frac{|a_{k,k}|}{\left|Q_{k-1,k-1}^{(m+1)}Q_{k,k}^{(m)}\right|}\le\rho_k,$$

$$k=2,3,\ldots,\qquad j=1,2,\ldots,\qquad m=0,1,\ldots,$$

$$\frac{|a_{j+1,0}|}{\left|Q_{j,0}^{(m+1)}Q_{j+1,k}^{(m)}\right|}\le\vartheta_1,\quad \frac{|a_{0,j+1}|}{\left|Q_{0,j}^{(m+1)}Q_{0,j+1}^{(m)}\right|}\le\vartheta_2,\qquad j=1,2,\ldots,\qquad m=0,1,\ldots$$

$$\frac{\left|a_{k+1,1}\right|}{\left|Q_{k,0}^{(m)} Q_{k+1,1}^{([m/2]-1)}\right|} \le H', \quad \frac{\left|a_{1,k+1}\right|}{\left|Q_{0,k}^{(m)} Q_{1,k+1}^{([m/2]-1)}\right|} \le H'', \quad k = 1, 2, \ldots, \quad m = 0, 1, \ldots$$

де M, $M_{1,0}$, $M_{0,1}$, H', H'', ρ, ρ', ρ'', ϑ_1, ϑ_2 — *такі додатні сталі, що*

$$\rho' < 1, \quad \rho'' < 1, \quad \vartheta_1 < 1, \quad \vartheta_2 < 1, \quad \lim_{p\to\infty} \prod_{j=1}^{p} \rho_{j+1} = 0 .$$

Тоді ГЛД (1), (2) рівномірно збігається в області D, *причому*

$$\left|\tilde f - \tilde f_{2p}\right| \le M_{1,0}\left(H'(\vartheta_1 + 1) S_{1,p} + \vartheta_1^{2p}\right) + M_{0,1}\left(H''(\vartheta_2 + 1) S_{2,p} + \vartheta_2^{2p}\right) + M \prod_{j=2}^{p+1} \rho_j ,$$

де

$$S_{k,p} = \begin{cases} \dfrac{(\delta_k)^p}{\delta_k - \tilde\delta_k}, & \text{якщо} \quad \tilde\delta_k < \delta_k, \\ p(\delta_k)^{p-1}, & \text{якщо} \quad \tilde\delta_k = \delta_k, \end{cases} \qquad k = 1, 2,$$

$$\delta_1 = \max\left(\rho', \vartheta_1^2\right), \; \tilde\delta_1 = \min\left(\rho', \vartheta_1^2\right), \; \delta_2 = \max\left(\rho'', \vartheta_2^2\right), \; \tilde\delta_2 = \min\left(\rho'', \vartheta_2^2\right) .$$

Теорема 2 *(багатовимірний аналог теореми Стілтьєса–Віталі) [9, теорема 2.17]. Нехай* $F = \left\{ f_m(z), \, z \in D, \, m = 1, 2, \ldots \right\}$ – *послідовність голоморфних функцій в області* $D \subset \mathbb{C}^N$, *рівномірно обмежених всередині* D.

Якщо $\left\{ f_m(z) \right\}$ *збігається в кожній точці множини* $\Delta \subset D$, *яка є* $2N$ *-вимірним,* N *-вимірним дійсним або* N *-вимірним уявним околами точки* $z_0 \in D$, *то* $\left\{ f_m(z) \right\}$ *збігається рівномірно на довільній компактній підмножині* $K \subset D$ *до голоморфної функції в* D.

2. **Основні результати**.

Теорема 3. *Нехай для елементів ГЛД (1), (2) виконуються такі умови*:

$$0 \le b_{k,k} \le L, \; 0 \le b_{k+j,j} \le L', \; 0 \le b_{j,k+j} \le L'', \; 0 \le b_{k,0} \le L_1, \; 0 \le b_{0,k} \le L_2,$$
$$j, k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

$$(z_1, z_2) \in G_K,$$

$$G_K = \left\{ \left|z_j\right| \le K_j, \; \left|\arg(z_j)\right| \le \frac{\pi}{2}, \; j = 1, 2; \; \arg(z_1) + \arg(z_2) = 0 \right\}, \tag{9}$$

де L, L', L'', L_1, L_2, K_1, K_2 – *додатні сталі.*

Тоді ГЛД (1), (2) є фігурно рівномірно збіжним, і справджується оцінка

$$\left|\tilde f - \tilde f_{2p}\right| \le L_1 K_1 \left(\frac{L' K_1 K_2}{1 + L' K_1 K_2} \left(\frac{L_1 K_1}{\sqrt{1 + (L_1)^2 (K_1)^2}} + 1 \right) S_{1,p} + \frac{(L_1)^{2p} (K_1)^{2p}}{\left(1 + (L_1)^2 (K_1)^2\right)^p} \right) +$$

$$+ L_2 K_2 \left(\frac{L'' K_1 K_2}{1 + L'' K_1 K_2} \left(\frac{L_2 K_2}{\sqrt{1 + (L_2)^2 (K_2)^2}} + 1 \right) S_{2,p} + \frac{(L_2)^{2p} (K_2)^{2p}}{\left(1 + (L_2)^2 (K_2)^2\right)^p} \right) +$$

$$+\frac{(LK_1K_2)^{p+1}}{(1+LK_1K_2)^p}, \qquad p=2,3,\ldots, \qquad n>2p, \tag{10}$$

де

$$S_{k,p}=\begin{cases}\dfrac{(\delta_k)^p}{\delta_k-\tilde{\delta}_k}, & \tilde{\delta}_k<\delta_k,\\ p(\delta_k)^{p-1}, & \tilde{\delta}_k=\delta_k,\end{cases} \qquad k=1,2,$$

$$\delta_1=\max\left(\frac{L'K_1K_2}{1+L'K_1K_2},\ \frac{(L_1)^2(K_1)^2}{1+(L_1)^2(K_1)^2}\right),$$

$$\tilde{\delta}_1=\min\left(\frac{L'K_1K_2}{1+L'K_1K_2},\ \frac{(L_1)^2(K_1)^2}{1+(L_1)^2(K_1)^2}\right),$$

$$\delta_2=\max\left(\frac{L''K_1K_2}{1+L''K_1K_2},\ \frac{(L_2)^2(K_2)^2}{1+(L_2)^2(K_2)^2}\right),$$

$$\tilde{\delta}_2=\min\left(\frac{L''K_1K_2}{1+L''K_1K_2},\ \frac{(L_2)^2(K_2)^2}{1+(L_2)^2(K_2)^2}\right).$$

Доведеня. Оцінимо залишки фігурних наближень (3) ГЛД (1), (2). Нехай

$$\varphi_{k,l}=\arg a_{k,l}, \quad x_{k,l}=\operatorname{Re} a_{k,l}, \quad y_{k,l}=\operatorname{Im} a_{k,l}, \quad k,l=0,1,\ldots, \quad k+l\ge 1, \tag{11}$$

$$u_{k,l}^{(p)}=\operatorname{Re} Q_{k,l}^{(p)}, \quad v_{k,l}^{(p)}=\operatorname{Im} Q_{k,l}^{(p)}, \qquad k,l=1,2,\ldots, \tag{12}$$

$$\tilde{u}_{k,0}^{(p)}=\operatorname{Re}\tilde{Q}_{k,0}^{(p)}, \quad \tilde{v}_{k,0}^{(p)}=\operatorname{Im}\tilde{Q}_{k,0}^{(p)},$$

$$\tilde{u}_{0,k}^{(p)}=\operatorname{Re}\tilde{Q}_{0,k}^{(p)}, \quad \tilde{v}_{0,k}^{(p)}=\operatorname{Im}\tilde{Q}_{0,k}^{(p)}, \qquad k=1,2,\ldots. \tag{13}$$

Тоді для дійсної і уявної частин наближень (4) ланцюгових дробів $F_{k,l}^{(p)}$, $k,l,p=1,2,\ldots$, правильні формули [6]

$$\operatorname{Re} F_{k,l}^{(p)}=\sum_{m=1}^{p}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r,l+r}|}{\left|Q_{k+r,l+r}^{(p-r)}\right|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,l+j}\right), \qquad k,l,p=1,2,\ldots, \tag{14}$$

$$\operatorname{Im} F_{k,l}^{(p)}=\sum_{m=1}^{p}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r,l+r}|}{\left|Q_{k+r,l+r}^{(p-r)}\right|^2}\sin\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,l+j}\right), \qquad k,l,p=1,2,\ldots, \tag{15}$$

а для дійсної і уявної частин залишків (5) – такі ($k,p=1,2,\ldots$):

$$\tilde{u}_{k,0}^{(p)}=1+\operatorname{Re} F_{k,0}^{([p/2])}+\sum_{m=1}^{p}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r,0}|}{\left|\tilde{Q}_{k+r,0}^{(p-r)}\right|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{p-2}\prod_{q=1}^{l}\frac{|a_{k+q,0}|}{\left|\tilde{Q}_{k+q,0}^{(p-q)}\right|^2}\times\sum_{m=1}^{[(p-l)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r+l,r}|}{\left|Q_{k+r+l,r}^{([(p-l)/2]-r)}\right|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l,j}\right),\tag{16}$$

$$\tilde{v}_{k,0}^{(p)}=\operatorname{Im}F_{k,0}^{([p/2])}+\sum_{m=1}^{p}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r,0}|}{\left|\tilde{Q}_{k+r,0}^{(p-r)}\right|^2}\sin\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{p-2}\prod_{q=1}^{l}\frac{|a_{k+q,0}|}{\left|\tilde{Q}_{k+q,0}^{(p-q)}\right|^2}\sum_{m=1}^{[(p-l)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r+l,r}|}{\left|Q_{k+r+l,r}^{([(p-l)/2]-r)}\right|^2}\times$$

$$\times\sin\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l,j}\right).\tag{17}$$

Аналогічні формули правильні і для дійсної і уявної частин залишків (6):

$$\tilde{u}_{0,k}^{(p)}=1+\operatorname{Re}F_{0,k}^{([p/2])}+\sum_{m=1}^{p}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{0,k+r}|}{\left|\tilde{Q}_{0,k+r}^{(p-r)}\right|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{0,k+j}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{p-2}\prod_{q=1}^{l}\frac{|a_{0,k+q}|}{\left|\tilde{Q}_{0,k+q}^{(p-q)}\right|^2}\sum_{m=1}^{[(p-l)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{r,k+r+l}|}{\left|Q_{r,k+r+l}^{([(p-l)/2]-r)}\right|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{0,k+j}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{j,k+j+l}\right),\tag{18}$$

$$\tilde{v}_{0,k}^{(p)}=\operatorname{Im}F_{0,k}^{([p/2])}+\sum_{m=1}^{p}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{0,k+r}|}{\left|\tilde{Q}_{0,k+r}^{(p-r)}\right|^2}\sin\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{0,k+j}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{p-2}\prod_{q=1}^{l}\frac{|a_{0,k+q}|}{\left|\tilde{Q}_{0,k+q}^{(p-q)}\right|^2}\sum_{m=1}^{[(p-l)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{r,k+r+l}|}{\left|Q_{r,k+r+l}^{([(p-l)/2]-r)}\right|^2}\times$$

$$\times\sin\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{0,k+j}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{j,k+j+l}\right).\tag{19}$$

Якщо виконуються умови (8), (9), то $\varphi_{k,l}=0,\quad k,l=1,2,\ldots$,

$$\varphi_{k,0}=\arg z_1,\quad \varphi_{0,k}=\arg z_2,\quad k=1,2,\ldots,\tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}=\begin{cases}\arg z_1, & \text{якщо}\quad m=2r+1,\quad r=0,1,\ldots,\\ 0, & \text{в іншому випадку},\end{cases}\tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{0,k+j}=\begin{cases}\arg z_2, & \text{якщо}\quad m=2r+1,\quad r=0,1,\ldots,\\ 0, & \text{в іншому випадку},\end{cases}\tag{22}$$

тому для дійсної і уявної частин наближень (3) і залишків (5), (6) справджуються такі оцінки ($k=1,2,\ldots,\ p=0,1,\ldots$):

$$\operatorname{Re} F_{k,0}^{([p/2])} = F_{k,0}^{([p/2])} \ge 0, \qquad \operatorname{Im} F_{k,0}^{([p/2])} = 0,$$

$$\tilde{u}_{k,0}^{(p)} \ge 1 + F_{k,0}^{([p/2])} \ge 1, \quad \tilde{u}_{0,k}^{(p)} \ge 1 + F_{0,k}^{([p/2])} \ge 1, \tag{23}$$

$$\tilde{v}_{k,0}^{(p)} \ge 0,\ \tilde{v}_{0,k,}^{(p)} \le 0,\ \text{якщо } 0 \le \arg z_1 \le \frac{\pi}{2}, \quad \tilde{v}_{k,0}^{(p)} \le 0,\ \tilde{v}_{0,k,}^{(p)} \ge 0,\ \text{якщо } 0 \le \arg z_2 \le \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, $F_{k,0}^{([p/2])}$, $F_{0,k}^{([p/2])}$, $k, p = 1, 2, \ldots,$ – ланцюгові дроби з додатними (невід'ємними) елементами. Тому

$$\frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_{1,1}^{(p)}\right|} = \frac{a_{1,1}}{Q_{1,1}^{(p)}} \le LK_1K_2, \qquad \frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_{j,j}^{(p)}Q_{j-1,j-1}^{(p+1)}\right|} = \frac{F_{j-1,j-1}^{(p+1)}}{1+F_{j-1,j-1}^{(p+1)}} \le \frac{LK_1K_2}{1+LK_1K_2},$$

$$\frac{|a_{k+j,j}|}{\left|Q_{k+j,j}^{(p)}Q_{k+j-1,j-1}^{(p+1)}\right|} = \frac{F_{k+j-1,j-1}^{(p+1)}}{1+F_{k+j-1,j-1}^{(p+1)}} \le \frac{L'K_1K_2}{1+L'K_1K_2},$$

$$\frac{|a_{k+1,1}|}{\left|Q_{k+1,1}^{([p/2]-1)}\tilde{Q}_{k,0}^{(p)}\right|} \le \frac{F_{k,0}^{([p/2])}}{\tilde{u}_{k,0}^{(p)}} \le \frac{F_{k,0}^{([p/2])}}{1+F_{k,0}^{([p/2])}} \le \frac{L'K_1K_2}{1+L'K_1K_2},$$

$$\frac{|a_{j,k+j}|}{\left|Q_{j,k+j}^{(p)}Q_{j-1,k+j-1}^{(p+1)}\right|} = \frac{F_{j-1,k+j-1}^{(p+1)}}{1+F_{j-1,k+j-1}^{(p+1)}} \le \frac{L''K_1K_2}{1+L''K_1K_2},$$

$$\frac{|a_{1,k+1}|}{\left|Q_{1,k+1}^{([p/2]-1)}\tilde{Q}_{0,k}^{(p)}\right|} \le \frac{F_{0,k}^{([p/2])}}{\tilde{u}_{0,k}^{(p)}} \le \frac{F_{0,k}^{([p/2])}}{1+F_{0,k}^{([p/2])}} \le \frac{L''K_1K_2}{1+L''K_1K_2}.$$

Оскільки

$$\tilde{u}_{k,0}^{(p+1)} = 1 + F_{k,0}^{([(p+1)/2])} + \frac{x_{k+1,0}\tilde{u}_{k+1,0}^{(p)} + y_{k+1,0}\tilde{v}_{k+1,0}^{(p)}}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^2} \ge 1,$$

$$\tilde{v}_{k,0}^{(p+1)} = \frac{y_{k+1,0}\tilde{u}_{k+1,0}^{(p)} - x_{k+1,0}\tilde{v}_{k+1,0}^{(p)}}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^2} \ge 0,$$

де $i = \sqrt{-1}$, то

$$\left(\tilde{u}_{k,0}^{(p+1)}\right)^2 + \left(\tilde{v}_{k,0}^{(p+1)}\right)^2 = \left(1 + F_{k,0}^{([(p+1)/2])}\right)^2 +$$

$$+2\left(1 + F_{k,0}^{([(p+1)/2])}\right)\frac{x_{k+1,0}\tilde{u}_{k+1,0}^{(p)} + y_{k+1,0}\tilde{v}_{k+1,0}^{(p)}}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^2} +$$

$$+\frac{\left(x_{k+1,0}\tilde{u}_{k+1,0}^{(p)} + y_{k+1,0}\tilde{v}_{k+1,0}^{(p)}\right)^2}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^4} + \frac{\left(y_{k+1,0}\tilde{u}_{k+1,0}^{(k)} - x_{k+1,0}\tilde{v}_{k+1,0}^{(k)}\right)^2}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^4} \ge$$

$$\ge \left(1 + F_{k,0}^{([p/2])}\right)^2 + \frac{\left(x_{k+1,0}\right)^2 + \left(y_{k+1,0}\right)^2}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^2}\frac{\left(\tilde{u}_{k+1,0}^{(p)}\right)^2 + \left(\tilde{v}_{k+1,0}^{(p)}\right)^2}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^2} = .$$

$$= 1 + \frac{\left|a_{k+1,0}\right|^2}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^2}$$

Отже, за умов теореми

$$\frac{\left|a_{k+1,0}\right|^2}{\left|\tilde{Q}_{k,0}^{(p+1)}\right|^2 \left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^2} \le \frac{1}{1 + \dfrac{\left|a_{k+1,0}\right|^2}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^2}} \cdot \frac{\left|a_{k+1,0}\right|^2}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^2} \le \frac{(L_1)^2 (K_1)^2}{1 + (L_1)^2 (K_1)^2},$$

$$p = 0, 1, \ldots, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Аналогічно,

$$\frac{\left|a_{0,k+1}\right|^2}{\left|\tilde{Q}_{0,k}^{(p+1)}\right|^2 \left|\tilde{Q}_{0,k+1}^{(p)}\right|^2} \le \frac{(L_2)^2 (K_2)^2}{1 + (L_2)^2 (K_2)^2},$$

$$p = 0, 1, \ldots, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Крім того,

$$\frac{\left|a_{1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{1,0}^{(p)}\right|} \le \left|a_{1,0}\right| \le L_1 K_1, \quad \frac{\left|a_{0,1}\right|}{\left|\tilde{Q}_{0,1}^{(p)}\right|} \le \left|a_{0,1}\right| \le L_2 K_2, \quad p = 0, 1, \ldots .$$

Отже, за умов теореми 3 виконуються умови теореми 2, звідки випливає правильність оцінки (10) і фігурно рівномірна збіжність ГЛД (1), (2).

Теорема 4. *Нехай для елементів ГЛД (1), (2) виконуються умови (8) і*

$$z \in G, \ G = \left\{ \left|z_j\right| < K_j, \ \left|\arg(z_j)\right| < \frac{\pi}{2}, \ j = 1,2; \ \left|\arg(z_1) + \arg(z_2)\right| < \frac{\pi}{2} \right\}, \tag{24}$$

де L, L', L'', L_1, L_2, K_1, K_2 *– додатні сталі. Тоді ГЛД (1), (2) збігається до функції, голоморфної в області* G, *причому збіжність буде фігурно рівномірною на кожній компактній підмножині області* G.

Д о в е д е н н я. Оцінимо значення залишків ГЛД, використовуючи формули (14)–(17). У цьому випадку справджуються рівності (20)–(22), а також

$$\varphi_{k,l} = \arg z_1 + \arg z_2, \quad k, l = 1, 2, \ldots,$$

$$\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,j} = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2, & \text{якщо } m = 2r+1, \quad r = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,j} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{j,k+j},$$

$$\sum_{j=1}^{l} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,0} + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+l-1} \varphi_{k+l+j,j} =$$

$$= \begin{cases} \arg z_1, & \text{якщо } m = 2r, \ l = 2q-1, \ r, q = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{якщо } m = 2r, \ l = 2q, \ r, q = 1, 2, \ldots, \\ -\arg z_2, & \text{якщо } m = 2r-1, \ l = 2q-1, \ r, q = 1, 2, \ldots, \\ -\arg z_1 - \arg z_2, & \text{якщо } m = 2r-1, \ l = 2q, \ r, q = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{0,k+j}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{j,k+l+j}=$$

$$=\begin{cases}\arg z_2, \text{ якщо } m=2r,\ \ l=2q-1,\ \ r,q=1,2,\ldots,\\ \quad 0, \quad \text{якщо } m=2r,\ \ l=2q,\ \ \ r,q=1,2,\ldots,\\ -\arg z_1, \text{ якщо } m=2r-1,\ \ l=2q-1,\ \ r,q=1,2,\ldots,\\ -\arg z_1-\arg z_2, \text{ якщо } m=2r-1,\ \ l=2q,\ \ r,q=1,2,\ldots.\end{cases}$$

Підставляючи ці рівності у формули (14)–(19), дійшли висновку, що

$$\operatorname{Re}F_{k,0}^{([p/2])}\ge 0,\ \tilde{u}_{k,0}^{(p)}\ge 1+\operatorname{Re}F_{k,0}^{([p/2])}\ge 1,\ \ \tilde{u}_{0,k}^{(p)}\ge 1+\operatorname{Re}F_{0,k}^{([p/2])}\ge 1,$$

$$k=1,2,\ldots,\ p=0,1,\ldots.$$

Отже, $\left\{\tilde{f}_n(z)\right\}$ – це послідовність голоморфних рівномірно обмежених в області G функцій, оскільки

$$\left|\tilde{f}_n(z)\right|\le\left|F_{0,0}^{([n/2])}\right|+\frac{|a_{1,0}|}{\left|\tilde{Q}_{1,0}^{(n-1)}\right|}+\frac{|a_{0,1}|}{\left|\tilde{Q}_{0,1}^{(n-1)}\right|}\le b_{1,1}K_1K_2+b_{1,0}K_1+b_{0,1}K_2.$$

Згідно з теоремою 3 $\left\{\tilde{f}_m(z)\right\}$ збігається в кожній точці множини $\Delta=\left\{0<z_j<K_j,\ \ j=1,2\right\}$, яка є двовимірним дійсним околом деякої точки $z^{(0)}=\left(z_1^{(0)},\,z_2^{(0)}\right)\in G$. Таким чином, послідовність $\left\{\tilde{f}_m(z)\right\}$ задовольняє умови теореми 2, тому збігається рівномірно на довільній компактній підмножині $K\subset G$ до голоморфної функції в G.

1. *Антонова Т. М.* Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – 45, № 1. – С. 11–15.
2. *Антонова Т. М., Возна С. М.* Дослідження абсолютної та фігурно абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Вост.-Европ. журн. передовых технологий. Математика и кибернетика. – Прикладные аспекты. – 2015. – 6/4 (78) – С. 19–26, https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.54116
3. *Антонова Т. М., Возна С. М.* Про одну ознаку збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з дійсними елементами // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14. – С. 16–24.
4. *Антонова Т. М., Возна С. М.* Деякі властивості наближень гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду з недодатними частинними чисельниками // Буковинськ. мат. журн. – 2017. – 5, № 1–2. – С. 6–15.
5. *Антонова Т. М., Возна С. М.* Про один аналог методу фундаментальних нерівностей для дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-матем. науки. – 2017. – № 871. – С. 5–12.
6. *Антонова Т. М., Возна С. М.* Формули для дійсних і уявних частин залишків наближень гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2019. – Вип. 17. – С. 82–92, https://doi.org/10.15407/apmm2019.17.82-92
7. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про властивості послідовностей фігурних наближень двовимірних неперервних дробів спеціального вигляду з дійсними елементами // Мат. вісник НТШ. – 2007. – 4. – С. 5–16.
8. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Деякі достатні умови збіжності послідовностей фігурних наближень парного і непарного порядків для двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами// Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Фіз.-матем. науки. – 2009. – № 660. – С. 49–55.
9. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.

10. *Дмитришин Р. І.* Деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди: Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук. – Київ, 2019.
11. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики, 2010. – 218 с.
12. *Antonova T., Dmytryshyn M., Vozna S.* Some properties of approximants for branched continued fractions of the special form with positive and alternating-sign partial numerators// Carpatian Mathematical Publications. – 2018. – 10, No. 1. – P. 3–13.
13. *Siemaszko W.* Branched continued fractions for double power series// J. Comp. and Appl. Math. – 1980. – 6, No. 2. – P. 121–125.
14. *Siemaszko W.* On some conditions for convergence of branched continued fractions // Lecture Notes in Math. – 1981. – 888. – P. 363–370, https://doi.org/10.1007/BFb0095601

ON CONVERGENCE OF ONE CLASS OF CORRESPONDING TWO-DIMENSIONAL BRANCHED CONTINUED FRACTIONS

The infinite branched continued fraction, associated with the correspondence problem between a formal double power series and a sequence of the rational approximations of a function of two variables, is considered. Using formulas for real and imaginary parts of tails of figured approximants and a multidimensional analogue of the Stieltjes–Vitali theorem, the figured uniform convergence of such a fraction in some domain is investigated and the estimation of the rate of its convergence is obtained.

Key words: convergence, branched continued fraction, figured approximants, figured convergence.

Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

Одержано
18.10.20