

## ВРАХУВАННЯ ЧАСТКОВОГО ВІДШАРУВАННЯ ПРУЖНОГО МІЖФАЗНОГО ТОНКОГО ВКЛЮЧЕННЯ В УМОВАХ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ БІМАТЕРІАЛУ

*Розглянуто задачу про поздовжній зсув біматеріалу з тонким включенням довільної фізико-механічної природи на межі поділу матеріалів матриці. Передбачено навантаження масиву нормальним стиском та різноманітними силовими чинниками у поздовжньому напрямку. Припущено можливість часткового відшарування частини межі між включенням і матрицею, де виникає проковзування зі сухим тертям. Сформульовано повну систему рівнянь для визначення невідомих величин поставленої задачі. Розв'язок запропоновано будувати з допомогою структурно-модульного методу функцій стрибка. Сформульовано умову для появи зони проковзування на межі включення–матриця. Розроблено збіжний ітеративний алгоритм для числово-аналітичного визначення розміру цієї зони.*

**Ключові слова:** поздовжній зсув, відшарування, тонке включення, біматеріал, функції стрибка

**Вступ.** Більшість матеріалів містять численні тонкі дефекти у вигляді тріщин та включень різноманітного походження [5, 6, 8, 9, 14]. Доволі часто включення використовують як конструкційні елементи для підкріплення деталей машин та споруд, зокрема і як наповнювач композиційних матеріалів. Одним із характерних прикладів композиційного матеріалу є структури з тонкими стрічковими включеннями. Так можна суттєво поліпшити їх механічні, реологічні, термічні чи інші властивості або сформувати захисний шар. З іншого боку, під час експлуатації дія зовнішнього навантаження та розвиток пошкодженості на межі розділу матеріалів можуть спричинити відшарування армувальних елементів і подальше пришвидшене руйнування конструкції. Тому важливою побудувати методи дослідження напружено-деформованого стану (НДС) таких структур. Для моделювання тонкого включення під час вивчення таких структур застосовують переважно два підходи. Перший базується на принципі Ешелбі [15], коли у розв'язку для еліпсоїдального включення здійснено граничний перехід до зменшення одного з характерних його розмірів [5, 13]. Інший підхід ґрунтується на принципі спряження континуумів різної вимірності та методі функцій стрибка [13, 18]. Згідно з цим підходом включення замінюють певною поверхнею (у двовимірному випадку – лінією) розриву фізико-механічних полів, що описують збурювальний ефект тонкої неоднорідності. У монографії [13] побудовано моделі тонких пружних включень, які враховують змінну товщину неоднорідностей, їхню жорсткість і геометрію, а також різноманітні плівкові моделі, що використовують під час дослідження пружної рівноваги тіл із включеннями за їх ідеального термомеханічного контакту. Складнішими, однак, є задачі про визначення НДС композиту за неідеального контакту між тілом і включенням [1–3, 8, 9, 12].

Різнманітну геометричну нелінійність у антиплоскій задачі для двох стиснених півпросторів із міжфазними дефектами пробували врахувати в працях [4, 7, 11, 16, 17, 19], в т.ч. розглядали фрикційне проковзування контактуючих тіл [4, 11, 19], гранично-елементний підхід [7, 16].

Мета цієї публікації – розвинути метод функцій стрибка та побудувати зручний підхід для дослідження поздовжнього зсуву тіл із тонкими включен-

---

✉ piskozub@pancha.lviv.ua

нями за умови неідеального механічного контакту на спільній межі чи повного або часткового відшарування берега включення за різного навантаження тіла, в тому числі багатокрокового чи циклічного.

1. **Формулювання задачі.** Вивчатимемо НДС перерізу безмежного ізо- тропного масиву, що складається з двох півпросторів з пружними сталими  $G_1, G_2$ , площиною  $xOy$ , перпендикулярною до напрямку  $Oz$  його поздовж- нього зсуву. Півпростори взаємно притиснені до межі поділу нормальним рівномірним стиском на нескінченності  $\sigma_{yy}^\infty < 0$ . Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини  $S_k$  ( $k = 1, 2$ ), а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис  $L - x$ . На ній уздовж відрізка  $L' = [-a; a]$  знаходиться тонке включення завтовшки  $2h$  ( $h \ll a$ ) (рис. 1), верхній край якого може контактувати неідеально з матрицею на проміжку  $L'' = [-b; b]$ , ( $b \leq a$ ).

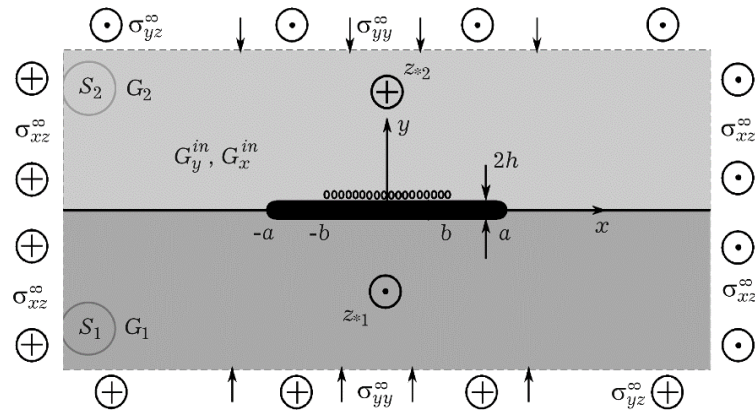


Рис. 1. Силова й геометрична схеми задачі

Зовнішнє навантаження визначають рівномірно розподілені на нескін- ченності напруження  $\sigma_{yz}^\infty, \sigma_{xz}^\infty$ , зосереджені сили інтенсивності  $Q_k$ , гвинтові дислокації зі складовою вектора Бюргерса  $b_k$  у точках  $z_{*k} \in S_k$  ( $k = 1, 2$ ). Для забезпечення прямолінійності межі поділу матеріалів на нескінченності на- пруження повинні задовольняти умову  $\sigma_{xz2}^\infty G_1 = \sigma_{xz1}^\infty G_2$ .

Тонке включення в масиві моделюємо згідно з парадигмою методу функцій стрибка (МФС) [13, 18] стрибком компонент векторів напружень і переміщень на лінії  $L'$  [13, 14]:

$$\begin{aligned} [\sigma_{yz}]_h &\cong \sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_3(x), \\ \left[ \frac{\partial W}{\partial x} \right]_h &\cong \frac{\partial W^-}{\partial x} - \frac{\partial W^+}{\partial x} = \left[ \frac{\sigma_{xz}}{G} \right]_h \cong \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} = f_6(x), \quad x \in L'; \end{aligned} \tag{1}$$

$$f_3(x) = f_6(x) = 0, \text{ якщо } x \notin L'. \tag{2}$$

Тут і далі використовуватимемо позначення  $[\varphi]_h = \varphi(x, -h) - \varphi(x, +h)$ ,  $\langle \varphi \rangle_h = \varphi(x, -h) + \varphi(x, +h)$ ; індекси "+" та "-" відповідають граничним значен- ням функцій на верхньому і нижньому краях лінії  $L$ . Верхній індекс «hp» позначає величини, що описують НДС матеріалу включення.

Математичну модель тонкого включення подаємо у вигляді умов взаємо- дії [13, 14], які еквівалентні умовам неідеального контакту між прилеглими до включення поверхнями матриці. Наприклад, достатньо узагальнена мо-

дель фізично нелінійного тонкого включення наведена раніше [19]:

$$\begin{cases} G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in}) \left\langle \frac{\partial W^{in}}{\partial x} \right\rangle_h(x) - 2\sigma_{xz}^{in}(-a) - \frac{1}{h} \int_{-a}^x [\sigma_{yz}^{in}]_h(\xi) d\xi = 0, \\ G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in}) [W^{in}]_h(x) + h \langle \sigma_{yz}^{in} \rangle_h(x) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

де  $G_x^{in}$ ,  $G_y^{in}$  – змінні модулі зсуву матеріалу включення. Приймаючи їх постійними, отримуємо частковий випадок закону Гука.

Контакт між півпросторами уздовж лінії  $L \setminus L'$  вважаємо ідеальним:

$$w(x, +0) = w(x, -0), \quad \sigma_{yz2}(x, +0) = \sigma_{yz1}(x, -0), \quad x \in L \setminus L'. \quad (4)$$

Припускаємо також, що контакт між матрицею і нижнім берегом уздовж межі  $L'$  та частиною верхнього берега включення вздовж  $L' \setminus L''$  теж ідеальний:

$$\begin{aligned} w(x, -h) &= w^{in}(x, -h), & \sigma_{yz}^{in}(x, -h) &= \sigma_{yz1}(x, -h), & x &\in L' \\ w(x, h) &= w^{in}(x, h), & \sigma_{yz}^{in}(x, h) &= \sigma_{yz2}(x, h), & x &\in L' \setminus L''. \end{aligned} \quad (5)$$

На ділянці контакту  $L'' = [-b; b]$ , ( $b \leq a$ ) приймаємо умови дотикового тертьового контакту [11, 16], які передбачають, що в усіх точках  $L''$  дотичні напруження (зусилля тертя)

$$\sigma_{yz}^{in}(x, h) = \sigma_{yz2}(x, h) = -\operatorname{sgn}(w^{in}(x, h) - w(x, h)) \tau_{yz}^{\max}(x), \quad (6)$$

де  $\tau_{yz}^{\max}(x) = -\alpha \sigma_{yy}(x)$  ( $\sigma_{yy} < 0$ ),  $\alpha$  – коефіцієнт тертя ковзання. Поза ділянкою  $L''$  дотичні напруження за відсутності проковзування не можуть перевищувати максимально допустимих

$$|\sigma_{yz}(x, h)| \leq \tau_{yz}^{\max}(x) \quad (\sigma_{yy} < 0), \quad (7)$$

і взаємне переміщення поверхонь контакту (стрибка зміщень) відсутнє. Знак (напрямок дії) дотичних напружень вибираємо залежно від знака різниці переміщень  $w^{in}(x, h) - w(x, h)$  на  $L''$  у розглядуваній точці.

Для нормального притискання отримуємо:

$$\tau_{yz}^{\max}(x) = -\alpha \sigma_{yy}^{\infty}. \quad (8)$$

**2. Розв'язування задачі.** Застосовуючи тут методику [10, 13], можна отримати залежності, згідно з якими компоненти тензора напружень і похідні вектора переміщень на лінії  $L$  необмеженої площини  $S$ , а також всередині неї такі:

$$\begin{aligned} \sigma_{yzk}^{\pm}(x) &= \mp \rho_k f_3^{\pm}(x) - C g_6(x) + \sigma_{yz}^{0\pm}(x), \\ \sigma_{xzk}^{\pm}(x) &= \mp C f_6^{\pm}(x) + \rho_k g_3(x) + \sigma_{xz}^{0\pm}(x), \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$g_r(z) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_r(x) dx}{x-z}, \quad \rho_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2}, \quad C = G_{3-k} \rho_k,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yzk}(z) + i \sigma_{xzk}(z) &= \sigma_{yzk}^0(z) + i \sigma_{xzk}^0(z) + i \rho_k g_3(z) - C g_6(z), \\ (z \in S_k; r = 3, 6; k = 1, 2). \end{aligned}$$

Величини, позначені далі індексом "0" зверху, відповідають НДС масиву без модельних неоднорідностей (включень, тріщин тощо) за відповідного зовнішнього навантаження (однорідний розв'язок). Тут і далі для кожного кроку

навантажування використали позначення [16, 19]:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) &= \tau + i\{\tau_k + D_k(z) + (p_k - p_j)\bar{D}_k(z) + 2p_k D_j(z)\}, \\ D_k(z) &= -\frac{Q_k + iG_k b_k}{2\pi(z - z_{*k})}, \quad (z \in S_k, k = 1, 2; j = 3 - k). \end{aligned} \quad (10)$$

На розв'язок задачі необхідно накласти додаткові умови балансу

$$\int_{-a}^a f_3(\xi) d\xi = 2h(\sigma_{xz}^{in}(a) - \sigma_{xz}^{in}(-a)), \quad \int_{-a}^a f_6(\xi) d\xi = [w](a) - [w](-a). \quad (11)$$

Перше з рівнянь (9) можна безпосередньо використати для визначення критичних значень прикладеного до структури навантаження, за якого в  $L''$  в деякій точці (точках) почнеться проковзування за досягнення максимально допустимого  $\tau_{yz}^{max}(x)$ :

$$\sigma_{yz2}(x, h) = -\rho_1 f_3(x) - Cg_6(x) + \sigma_{yz2}^0(x, h) = \tau_{yz}^{max}(x), \quad (12)$$

тобто, як тільки стануть відомі вирази для стрибків  $f_r$ , ( $r = 3, 6$ ), можна досліджувати прикладене навантаження і визначати його критичні значення.

До розв'язування отриманої системи рівнянь (1)–(7), (9), (11) можна застосувати класичний МФС, який передбачає підставлення (9) в (3) з використанням (4)–(6) і отримання результуючої системи сингулярних інтегральних рівнянь для визначення невідомих  $f_r$  ( $r = 3, 6$ ), які повністю визначають НДС матриці з допомогою (9). Однак через крайові умови дотикового контакту (4)–(6) з невідомим розміром зони проковзування  $2b$  необхідні доволі складні алгоритми розв'язування, які не завжди гарантують точність обчислень.

Пропонуємо інший підхід до розв'язування такої задачі, який можна назвати структурно модифікованим МФС. Його ідея полягає в тому, щоб всі рівняння укласти в глобальну систему, не підставляючи крайових умов (4)–(6) в рівняння моделі (3) та граничні значення матричних компонент НДС (9). Далі утворену систему рівнянь зручно розв'язувати будь-яким числово-аналітичним методом, наприклад, методом колокації. Подаючи систему рівнянь (1)–(7), (9), (11) у дискретній формі в множині точок колокації  $(x_n, n = \overline{1, N})$ , отримуємо систему  $8N$  лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для визначення  $8N$  невідомих  $\sigma_{yzk}(x_n, \pm h), \frac{\partial W}{\partial X}(x_n, \pm h), \sigma_{yz}^{in}(x_n, \pm h), \frac{\partial W^{in}}{\partial X}(x_n, \pm h), (n = \overline{1, N})$ .

Для коректності розв'язку необхідно визначити розмір зони проковзування. Для цього застосовуємо ітеративний підхід: 1) поступово зі зростанням прикладаємо незначне навантаження, щоб перевірити умову (12) початку проковзування; 2) як тільки умова (12) виконалася в певних точках  $x_n$ , примусово надаємо величинам  $\sigma_{yz}^{in}(x_n, h), \sigma_{yz2}(x_n, h)$  значення  $\tau_{yz}^{max}$  у всіх цих точках і повторно розв'язуємо СЛАР; 3) перевіряємо, чи всюди виконується обмеження (7), якщо ні, повторно примусово надаємо значення  $\tau_{yz}^{max}$  величинам  $\sigma_{yz}^{in}(x_n, h), \sigma_{yz2}(x_n, h)$  у тих точках  $x_n$ , де (7) не виконалося. Процес повторюємо, поки умова (7) не буде справедливою у всіх  $(x_n, n = \overline{1, N})$ . Досліджено, що такий ітеративний алгоритм є збіжним за умови монотонно зростаючого неконтрастного навантаження.

На рис. 2 і 3 зображені результати дослідження «зони безпеки» для інтенсивностей та координат розміщення зосереджених сил  $(\tilde{Q}_2 = -\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}, \tilde{z}_{*k} = z_{*k}/a = \tilde{x}_{*k} + i\tilde{y}_{*k}, \tilde{z}_{*2} = -\tilde{z}_{*1}, \tilde{y}_{*k} = \pm i\tilde{d})$ , де  $\tilde{Q} = Q/\pi a G_{av}$ ,

$\tilde{x}_{*2} = x_{*2}/a$ ,  $\tilde{d} = d/a$ ,  $G_{av} = \{\sqrt{G_1 G_2}, \max(G_1, G_2), Q/\pi a\}$ . Під «зоною безпеки» розуміємо інтенсивності та координати розміщення силових чинників, за яких ще не починається проковзування в жодній точці межі  $L'$ , тобто не виконується умова (7). Межу «зони безпеки» визначаємо з критерію: хоча б в одній точці  $L'$  починає виконуватися умова (7). Можна стверджувати, що жорсткіше від матриці включення значно менше змінює вигляд «зони безпеки», ніж податніше. Частковий випадок відсутності включення  $\tilde{G}_y^{in} = \tilde{G}_k$  свідчить про збіг результатів з отриманими у працях [11, 19]. Крім того, відзначимо очікувані тенденції лінійної залежності зростання критичного значення  $\tilde{Q}^*$  від нарощування значення  $\tilde{\tau}_{yz}^{\max\pm} = \frac{\tau_{yz}^{\max\pm}}{G_{av}}$ , а також від збільшення віддалі  $\tilde{d}$  точок прикладання зосередженої сили. Особливо відчутними ці впливи за «податного» включення, коли  $\tilde{G}_y^{in} \ll \tilde{G}_k$ .

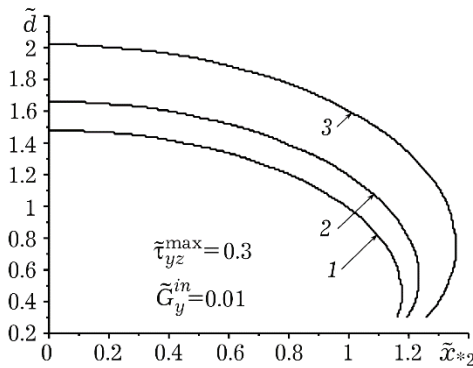


Рис. 2. Межа «зони безпеки» за навантаження зосередженою силою  $\tilde{Q}$  структури з податним включенням: 1 –  $\tilde{Q} = 1,8$ ; 2 – 2,0; 3 – 2,4.

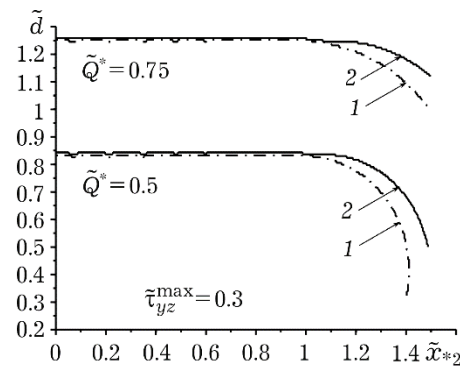


Рис. 3. Межа «зони безпеки» за навантаження зосередженою силою  $\tilde{Q}$  структури без включення (1 –  $\tilde{G}_y^{in} = 1$ ) та з жорстким включенням (2 –  $\tilde{G}_y^{in} = 10$ )

**Висновки.** Запропоновано підхід для дослідження поздовжнього зсуву тіл із тонкими включеннями за умови неідеального механічного контакту на спільній межі чи повного або часткового відшарування берега включення від матриці за різного навантаження тіла, в тому числі багатокрокового чи циклічного. Побудовано структурно модифікований метод функцій стрибка для розв'язування задач, які виникають за врахування нелінійності геометричних чи фізичних властивостей тонкого включення. Розраховано «зони безпеки» точок прикладання зосереджених силових чинників, коли структура залишається цілісною без проковзування. Можливий прогноз щодо визначення точки на межі включення, де за вказаного навантаження вперше з'явиться проковзування.

1. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. – Москва: Физматлит, 1993. – 224 с.
2. Ильина И. И., Сильвестров В. В. Задача о тонком жестком межфазном включении, отслоившемся вдоль одной стороны от среды // Механика твердого тела. – 2005. – № 3. – С. 153–166.  
Te same: Il'ina I. I., Sil'vestrov V. V. The problem of a thin rigid interfacial inclusion detached from the medium along one side // Mech. Solids. – 40, No. 3. – P. 123–133
3. Ильина И. И., Сильвестров В. В. Частично отслоившееся тонкое жесткое включение между разными упругими материалами при наличии трения в зоне контакта // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – 54, № 4 – С. 124–139.

4. Мартиняк Р. М., Середницька Х. І. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Rastr-7, 2017. – 168 с.
5. Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. Концентрація напружень в трьохмерних телах с тонкими включеннями. – Київ: Наук. думка, 1986. – 216 с.
6. Панасюк В. В., Саврук М. П., Даццишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Київ: Наук. думка, 1976. – 444 с.
7. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т. Моделі тонких неоднорідностей з урахуванням можливості їхнього неідеального контакту з середовищем // Вісн. Дніпропетровськ. ун-ту. Сер. Механіка. – 2011. – Вип. 15, т. 2, № 5. – С. 200–210.
8. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пастернак Р. М. Поздовжній зсув тіла з тонкими стрічковими накладками та пружними включеннями змінної жорсткості при їхньому ідеальному та неідеальному контактах // Механіка і фізика руйнування будівельних конструкцій: зб. наук. пр. – Львів: Каменяр, 2012. – Вип. 9. – С. 98–113.
9. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пискозуб Л. Г. Моделі тонкого включення в умовах его ідеального та неідеального контактного взаємодія з оточуючим матеріалом // Тр. VI Міжнарод. симп. по трибофатике МСТФ 2010 (Мінск, 25 окт. –1 нояб. 2010 г.): в 2-х ч. – Мінск: БГУ, 2010. – Ч. 2. – С. 399–404.
10. Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук І. М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – Київ: Наук. думка, 1988. – 280 с.
11. Пискозуб Л. Г. Поздовжній зсув зосередженою силою біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – Вип. 20. – С. 160–172.
12. Попов Г. Я. Концентрація упругих напружень возле штампов, разрезом, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 344 с.
13. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дос.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
14. Сулим Г. Т., Пискозуб І. З. Умови контактної взаємодії (огляд) // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 110–125.
15. Eshelby J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. R. Soc. Lond. A: Math. Phys. Eng. Sci. – 1957. – 241(1226). – P. 376–396, <https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0133>
16. Sulym H., Piskozub L., Piskozub Yo., Pasternak Ia. Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account of friction. 2. Repeating and cyclic loading // Acta Mech. Autom. – 2015. – 9, No. 3. – P. 178–185, <https://doi.org/10.1515/ama-2015-0030>
17. Pasternak Ia., Sulym H. T. Thin inclusions theory integral equations numerical solution using the boundary element method procedure // Proc. Int. Conf. «Integral Equations – 2010», 25–27 August 2010 (Lviv). – Lviv: PAIS, 2010. – P. 104–108.
18. Piskozub J. Z., Sulim G. T. Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions // J. Eng. Math. – 2008. – 61, No. 2-4. – P. 315–337, <https://doi.org/10.1007/s10665-008-9225-3>
19. Sulym H. T., Piskozub I. Z. Nonlinear deformation of a thin interface inclusion // Mater. Sci. – 2018. – 53, No. 5. – P. 600–608, <https://doi.org/10.1007/s11003-018-0114-2>

**TAKING INTO ACCOUNT THE PARTIAL DELAMINATION OF THE INTERFACIAL THIN INCLUSION IN THE CONDITIONS OF LONGITUDINAL SHEAR OF THE BIMATERIAL**

*The problem of longitudinal displacement of a bi-material with a thin inclusion of arbitrary physical and mechanical nature at the interface of the matrix materials is considered. The bulk is loaded by normal compression and various force factors in the longitudinal direction. The possibility of partial delamination of a part of the boundary between the inclusion and the matrix, where dry friction slip occurs, is assumed. A complete system of equations is formulated to determine the unknown quantities of the problem. It is proposed to construct the solution using the structural modular method of jump functions, a description of which is given. A condition for the appearance of a slip zone on the inclusion-matrix boundary is formulated. A convergent iterative algorithm for numerically analytical determination of the size of this zone is developed.*

*Key words:* longitudinal displacement, delamination, thin inclusion, bi-material, jump function