https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.121-132

УДК 517.9

А. М. Кузь ✉

АНАЛОГ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЗІ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ НАД ПОЛЕМ *P*-АДИЧНИХ ЧИСЕЛ

Для лінійного диференціально-операторного рівняння другого порядку над полем p -адичних чисел розглянуто задачу з нелокальними умовами, які є аналогом інтегральних умов у вигляді моментів від невідомої функції за виділеною змінною. Описано простори функцій над неархімедовим функціональним простором, побудованим за власними функціями оператора Ерміта. Встановлено критерій єдиності та достатні умови існування розв'язку задачі у відповідному функціональному просторі. Побудовано розв'язок задачі у вигляді ряду за поліномами Ерміта.

***Ключові слова**: диференціально-операторне рівняння, інтегральні умови, p -адичні числа, неархімедовий аналіз, поліноми Ерміта, аналітична функція.*

Вступ. Одним із актуальних напрямків сучасної теорії рівнянь з частинними похідними є теорія крайових задач з нелокальними (зокрема, інтегральними) умовами. Їх вивчення зумовлене як потребами побудови загальної теорії крайових задач, так і багатим практичним застосуванням (процеси дифузії, коливань, соле- та вологоперенесення в ґрунтах, фізика плазми, математична біологія, прогнозування погоди тощо).

Особливістю нелокальних крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними в обмежених областях є те, що вони, назагал, некоретні, а їх розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників. У школі Б. Й. Пташника (див. [5] та бібліографію там) на основі метричного підходу до аналізу проблеми малих знаменників досліджено коректну розв'язність задач з нелокальними умовами (двоточковими, багатоточковими та інтегральними) для широких класів рівнянь із частинними похідними.

Варто зазначити, що окрім дослідження крайових задач для рівнянь із частинними похідними над полем дійсних (комплексних) чисел, актуальним є питання про розв'язність цих задач над іншими числовими полями, зокрема, неархімедовими, прикладом яких є поле p -адичних чисел. Математична фізика, у якій дійсні просторово-часові змінні замінюють p -адичними числами [1], активно розвивається упродовж останніх трьох десятиліть.

Від середини 1980-х рр. p -адичні числа використовують у квантовій фізиці [6, 7, 9]. Ці дослідження спричинили розвиток p -адичної математики в багатьох напрямках, зокрема, і в теорії диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь [2–4, 8, 11].

1. **Основні позначення та попередні відомості**. Тут і надалі p – деяке просте число, $|x|_p$ – p -адична норма раціонального числа $x \in \mathbb{Q}$, яка визначена за формулою

$$|x|_p = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x = 0, \\ p^{-\gamma}, & \text{якщо} \quad x = p^{\gamma} \dfrac{m}{n}, \end{cases}.$$

де $\gamma \in \mathbb{Z}$ і m, n – цілі числа, які не діляться на p .

✉ kuz.anton87@gmail.com

Поповнення поля раціональних чисел за p -адичною нормою $|\cdot|_p$ називають полем p -адичних чисел, яке позначають $\mathbb{Q}_p$ (детальніше див. у [10]). Продовження норми $|\cdot|_p$ на $\mathbb{Q}_p$ також позначатимемо через $|\cdot|_p$.

Така p -адична норма володіє такими властивостями:

1) $|x|_p \geq 0, \quad |x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{Q}_p,$

2) $|xy|_p = |x|_p\,|y|_p, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}_p,$

3) $|x+y|_p \leq \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}, \ \forall x, y \in \mathbb{Q}_p,$ – посилена нерівність трикутника,

4) $\forall x, y \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \neq |y|_p \Rightarrow |x+y|_p = \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}.$

$K_R(x_0) := \left\{x \in \mathbb{Q}_p : |x - x_0|_p < R\right\}$, $R > 0$, – відкритий круг радіуса R ,

$K_R := K_R(0)$.

Поліноми Ерміта p -адичної змінної $x \in \mathbb{Q}_p$ визначаємо рекурентними співвідношеннями

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_n(x) = xH_{n-1}(x) - (n-1)H_{n-2}(x), n \geq 2. \tag{1}$$

Для поліномів Ерміта, означених формулами (1), над полем $\mathbb{Q}_p$ виконуються рівності

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dx}\right)H_n(x) = 2nH_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2}$$

де

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}\left(\frac{d}{dx}\right) = -\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx}, \tag{3}$$

d/dx – стандартна операція диференціювання. Таким чином, поліноми Ерміта $H_n(x)$ є власними функціями оператора (3), що відповідають власним значенням $2n$, $n \geq 0$.

Через $\mathcal{H} := \mathcal{H}(\mathbb{Q}_p)$ позначимо множину функцій вигляду

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k H_k(x), \quad f_k \in \mathbb{Q}_p, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

для яких виконується рівність

$$\lim_{k\to\infty} |f_k|_p \left|k!2^k\right|_p = 0. \tag{4}$$

Легко бачити, що множина $\mathcal{H}$ утворює лінійний простір відносно стандартних операцій додавання та множення на скаляр над полем $\mathbb{Q}_p$:

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} f_k H_k(x) + \mu \sum_{k=0}^{\infty} g_k H_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda f_k + \mu g_k) H_k(x), \quad \lambda, \mu, f_k, g_k \in \mathbb{Q}_p, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Запровадимо на просторі $\mathcal{H}$ норму $\|\cdot\| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ формулою [9]

$$\| f;\mathcal{H}\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} |f_k|_p \left|k!2^k\right|_p . \tag{5}$$

Зауважимо, що для так введеної норми (5) виконується посилена нерівність трикутника:

$$\| f+g;\mathcal{H}\| \le \max\left\{\| f;\mathcal{H}\|, \|g;\mathcal{H}\|\right\}, \qquad f,g\in\mathcal{H}, \tag{6}$$

тобто простір $\mathcal{H}$ є неархімедовим.

Лема 1. *Простір $\mathcal{H}$ є повним для норми (5).*

Доведення. Нехай $\left\{f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{n,k} H_k(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ – довільна фундаментальна послідовність в $\mathcal{H}$, тобто для неї виконується неархімедовий критерій Коші [10]:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N := N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \quad \forall n > N ,$$

$$\| f_{n+1}(x) - f_n(x);\mathcal{H}\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\left\{\left|f_{n+1,k} - f_{n,k}\right|_p \left|k!2^k\right|_p\right\} < \varepsilon. \tag{7}$$

З нерівності (7), враховуючи, що $\left|k!2^k\right|_p \le 1$, випливає, що для кожного фіксованого $k^0\in\mathbb{Z}_+$ послідовність $\{f_{n,k^0}\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{Q}_p$ є фундаментальною на $\mathbb{Q}_p$. З повноти $\mathbb{Q}_p$ випливає існування такого $g_{k^0}\in\mathbb{Q}_p$, що $\lim_{n\to\infty} f_{n,k^0} = g_{k^0}$. □

Лема 2. *Для довільного елемента w із простору $\mathcal{H}$ можна коректно означити дію $\mathcal{L}[w]\in\mathcal{H}$, причому виконується оцінка*

$$\|\mathcal{L}[w];\mathcal{H}\| \le \|w;\mathcal{H}\|.$$

Доведення. На підставі (2) та лінійності оператора $\mathcal{L}$ отримуємо, що

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k H_k\right] = \sum_{k=0}^{n} 2k a_k H_k.$$

Розглянемо довільний елемент $w\in\mathcal{H}$,

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k H_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} w_k H_k, \qquad w_k = (w,H_k)_{\mathcal{H}},$$

та покладемо

$$\mathcal{L}[w] = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} 2k w_k H_k. \tag{8}$$

Оскільки $|2k|_p \le 1$ і, крім того, $w\in\mathcal{H}$ (тобто $\lim_{\to\infty} |f_k|_p \left|k!2^k\right|_p = 0$), то виконується рівність

$$\lim_{k\to\infty} |2k|_p \, |w_k|_p \left|k!2^k\right|_p = 0,$$

а отже, послідовність з (8) збігається у просторі $\mathcal{H}$.

Остаточно отримуємо, що $\mathcal{L}[w] = \sum_{k=0}^{\infty} 2k w_k H_k \in\mathcal{H}$, причому

$$\|\mathcal{L}[w];\mathcal{H}\| \le \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\left\{|w_k|_p \, |2k|_p \left|k!2^k\right|_p\right\} \le \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\left\{|w_k|_p \left|k!2^k\right|_p\right\} = \|w;\mathcal{H}\|.$$

Лему доведено. □

Функцію $u := u(t) : K_r \to \mathcal{H}$ називатимемо аналітичною в K_r, якщо

$$\exists!\{u_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{H} \quad \forall t \in K_r \qquad u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k, \tag{9}$$

причому

$$\forall \rho < r \qquad \lim_{k\to\infty} \rho^k \|u_k;\mathcal{H}\| = 0. \tag{10}$$

Через $\mathcal{A}_{r,\mathcal{H}}$ позначимо простір функцій u вигляду (9), аналітичних за t у крузі K_r та неперервних на $\bar{K}_r$ із нормою $\|u;\mathcal{A}_{r,\mathcal{H}}\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} r^k \|u_k;\mathcal{H}\|$.

Функцію $u: K_r \to \mathcal{H}$ називатимемо диференційовною в точці $t_0 \in K_R$, якщо в $\mathcal{H}$ існує границя

$$u'(t_0) := \lim_{h\to 0} \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h}, \quad h \in \mathbb{Q}_p.$$

Лема 3. *Нехай* $u \in \mathcal{A}_{r,\mathcal{H}}$, *тоді* $u'(t) \in \mathcal{A}_{r,\mathcal{H}}$ *для довільного* $t \in K_r$, *причому*

$$u'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k u_k t^{k-1}.$$

Доведення. Оскільки $u \in \mathcal{A}_{r,\mathcal{H}}$, $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k$, то з (10) випливає, що для всіх $\rho < r$

$$\rho^{k-1} \|k u_k;\mathcal{H}\| = \rho^{k-1} |k|_p \|u_k;\mathcal{H}\| \le (1/\rho)\rho^k \|u_k;\mathcal{H}\| \to 0, \quad k \to \infty,$$

а отже, функція $v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k u_k t^{k-1}$ належить простору $\mathcal{A}_{r,\mathcal{H}}$.

Покажемо тепер, що $v(t) = u'(t)$. Нехай $t_0 \in K_r$, тоді

$$\begin{aligned} F(t_0,h) &:= \left\| \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} k u_k t_0^{k-1};\mathcal{H} \right\| = \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(u_k \frac{(t_0+h)^k - t_0^k}{h} - k u_k t_0^{k-1} \right);\mathcal{H} \right\| = \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(t_0+h)^k - t_0^k}{h} - k t_0^{k-1} \right) u_k;\mathcal{H} \right\| \le \\ &\le \sup_k \left\{ \left| \frac{(t_0+h)^k - t_0^k}{h} - k t_0^{k-1} \right|_p \|u_k;\mathcal{H}\| \right\} = \\ &= \sup_k \left\{ M_k(t_0,h) \|u_k;\mathcal{H}\| \right\}, \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$M_k(t_0,h) = \left| \frac{(t_0+h)^k - t_0^k - hk t_0^{k-1}}{h} \right|_p. \tag{12}$$

Розкриваючи дужки у виразі (12) за формулою бінома Ньютона та враховуючи, що $|t_0|_p \le \rho < r$, отримуємо за умови $|h|_p < 1$ таку оцінку:

$$M_k(t_0,h) = \left|\sum_{q=2}^{k} C_k^q h^{q-1} t_0^{k-q}\right|_p < |h|_p \max\{1,\rho^{k-2}\}. \tag{13}$$

З (10) та оцінок (11), (13) випливає, що для всіх $\rho < r$

$$F(t_0,h) \le |h|_p \sup_k \left\{\max\{1,\rho^{k-2}\}\|u_k;\mathcal{H}\|\right\} \to 0, \quad |h|_p \to 0,$$

а отже, $u'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k u_k t^{k-1}$. Лему доведено. □

Наслідок. *Довільна функція* $u \in \mathcal{A}_{r,\mathcal{H}}$ *є нескінченно раз неперервно-диференційовною на* K_r *, причому*

$$u^{(q)}(t) \in \mathcal{A}_{r,\mathcal{H}}, \quad u_k = \frac{u^{(k)}(0)}{k!}, \quad u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad q,k \in \mathbb{Z}_+. \tag{14}$$

Доведення. Очевидно, що $u_0 = u(0)$. З леми випливає, що $u'(0) = u_1$. Послідовно застосовуючи q разів лему 3, одержуємо рівності

$$u^{(q)}(t) = \sum_{k=q}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-q+1) u_k t^{k-q}, \quad u^{(q)}(0) = q! u_q.$$

З отриманих рівностей і випливає твердження наслідку. □

На підставі наслідку легко показати (методом від супротивного), що функція $u \in \mathcal{A}_{r,\mathcal{H}}$ розвивається в ряд вигляду (14) єдиним чином.

Позначимо через $\mathcal{A}(K_R,\mathcal{H})$ простір таких функцій u, що $u \in \mathcal{A}_{r,\mathcal{H}}$ для деякого $0 < r \le R$.

Через $I_{r,T}$, $r \in \mathbb{Z}$, $T \in (0,R)$, позначимо операцію, дію якої на функцію $u \in \mathcal{L}(K_R,\mathcal{H})$, $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k$, задає формула

$$I_{r,T}[u] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k T^{k+r+1}}{k+r+1}. \tag{15}$$

За дійсних t, x дія операції $I_{r,T}$ на аналітичну функцію аналогічна інтегралу

$$I_{r,T}[u] = \int_0^T t^r u(t,x)\,dt.$$

Лема 4. *Нехай* $u \in \mathcal{A}(K_R,\mathcal{H})$, *тоді* $I_{r,T}[u] \in \mathcal{A}(K_R,\mathcal{H})$ *для довільних* $r \in \mathbb{Z}$, $T \in K_R$.

Доведення. На підставі нерівності

$$\frac{1}{|k+r+1|_p} < k+r+1 < 2k,$$

яка виконується для $k > r+1$, отримуємо таку оцінку для довільного $\rho < R$:

$$\frac{|T|_p^{k+r+1}}{|k+r+1|_p}\|u_k;\mathcal{H}\| = \left(\frac{|T|_p}{\rho}\right)^k \frac{|T|_p^{r+1}}{|k+r+1|_p}\rho^k \|u_k;\mathcal{H}\| <$$
$$< 2\rho^{r+1}k\left(\frac{|T|_p}{\rho}\right)^k R^k \|u_k;\mathcal{H}\|. \tag{16}$$

Оскільки $\lim_{k\to\infty} R^k \|u_k;\mathcal{H}\| = 0$, а послідовність $k\left(|T|_p/R\right)^k$ при $|T|_p < R$ обмежена, то з оцінки (16) випливає, що $I_{r,T}[u] \in \mathcal{A}(K_R,\mathcal{H})$. □

2. **Формулювання задачі**. Зафіксуємо круг радіуса $\widetilde{R} > 0$ в $\mathbb{Q}_p$. В цьому крузі розглядаємо таку задачу: знайти функцію u з класу $\mathcal{A}(K_{\widetilde{R}},\mathcal{H})$, яка в просторі $\mathcal{H}$ задовольняє рівності

$$u''(t) + b^2\mathcal{L}^2[u] = 0, \quad t \in K_{\widetilde{R}}, \tag{17}$$

$$I_{0,T}[u] = \varphi_1, \quad I_{1,T}[u] = \varphi_2, \quad j = 1,2, \quad T \le R < \widetilde{R}, \tag{18}$$

де $b \in \mathbb{Q}_p$, $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{H}$, $\mathcal{L}^2[u] = \mathcal{L}[\mathcal{L}[u]]$, оператор $\mathcal{L}$ визначений формулою (3), а операції $I_{0,T}, I_{1,T}$ – формулою (15) при $r = 0$ та $r = 1$ відповідно. На підставі лем 1–4 всі операції у формулах (17), (18) коректно означені у $\mathcal{H}$.

3. **Побудова розв'язку**. Розв'язок задачі (17), (18) із простору $\mathcal{A}\left(K_{\widetilde{R}},\mathcal{H}\right)$ шукаємо у вигляді ряду

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k. \tag{19}$$

Лема 5. *Якщо ряд (19) є розв'язком рівняння (17), то його коефіцієнти* u_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, *задають рівності*

$$u_{2k} = \frac{(-1)^k b^{2k}\mathcal{L}^{2k}[u_0]}{(2k)!}, \quad u_{2k+1} = \frac{(-1)^k b^{2k}\mathcal{L}^{2k}[u_1]}{(2k+1)!}. \tag{20}$$

Доведення. Використаємо метод математичної індукції. Підставивши ряд (19) у рівняння (17), отримуємо таке рекурентне співвідношення для визначення невідомих коефіцієнтів u_k:

$$(k+2)(k+1)u_{k+2} + b^2\mathcal{L}^2[u_k] = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{21}$$

При $k = 0$ рівності (20) перетворюються в тотожності $u_0 = u_0$, $u_1 = u_1$. Припустимо, що формули (20) справедливі для деякого $k \in \mathbb{Z}_+$. Тоді, враховуючи (21), одержуємо рівності

$$u_{2k+2} = \frac{-b^2\mathcal{L}^2[u_{2k}]}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{-b^2}{(2k+2)(2k+1)}\mathcal{L}^2\left[\frac{(-1)^k b^{2k}\mathcal{L}^{2k}[u_0]}{(2k)!}\right] =$$
$$= \frac{-b^2}{(2k+2)(2k+1)}\frac{(-1)^k b^{2k}\mathcal{L}^{2k+2}[u_0]}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k+1}b^{2k+2}\mathcal{L}^{2k+2}[u_0]}{(2k+2)!}, \tag{22}$$

$$u_{2k+3} = \frac{-b^2\mathcal{L}^2[u_{2k+1}]}{(2k+3)(2k+2)} = \frac{-b^2}{(2k+3)(2k+2)}\frac{(-1)^k b^{2k}\mathcal{L}^{2k+2}[u_0]}{(2k+1)!} =$$
$$= \frac{(-1)^{k+1}b^{2k+2}\mathcal{L}^{2k+2}[u_1]}{(2k+3)!}. \tag{23}$$

З рівностей (22), (23) випливає правильність формул (20) при $k+1$, що і доводить лему. □

Надалі для побудови розв'язку знадобляться деякі допоміжні твердження.

Функції синус та косинус над полем $\mathbb{Q}_p$ означимо за допомогою рядів

$$\cos_p(\beta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k} t^{2k}}{(2k)!}, \ \sin_p(\beta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \beta, t \in \mathbb{Q}_p. \quad (24)$$

Відомо [1], що за умови

$$|\beta|_p < \frac{1}{\widetilde{R} p^{1/(p-1)}} \quad (25)$$

функції $\cos_p(\beta t)$, $\sin_p(\beta t)$, як функції змінної t, належать класу $\mathcal{A}(K_{\widetilde{R}}, \mathbb{Q}_p)$ та для них виконуються оцінки

$$\left|\cos_p(\beta t)\right|_p = 1, \quad \left|\sin_p(\beta t)\right|_p = |\beta t|_p, \quad \forall t \in K_{\widetilde{R}}. \quad (26)$$

Позначимо символами $\cos(\beta\mathcal{L})$, $\dfrac{\sin(\beta\mathcal{L})}{\beta\mathcal{L}}$, $\beta \in \mathbb{Q}_p$, лінійні оператори над $\mathcal{H}$, дію яких на елемент $w \in \mathcal{H}$ задають формули

$$\cos(\beta\mathcal{L})[w] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k} \mathcal{L}^{2k}[w]}{(2k)!}, \quad \frac{\sin(\beta\mathcal{L})}{\beta\mathcal{L}}[w] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k} \mathcal{L}^{2k}[w]}{(2k+1)!}. \quad (27)$$

Лема 6. *Нехай виконується умова (25) при* $\widetilde{R} = 1$. *Тоді для довільного* $w \in \mathcal{H}$

$$\cos(\beta\mathcal{L})[w] \in \mathcal{H}, \quad \frac{\sin(\beta\mathcal{L})}{\beta\mathcal{L}}[w] \in \mathcal{H}.$$

Д о в е д е н н я. Нехай $w \in \mathcal{H}$, тобто $w = \sum_{q=0}^{\infty} w_q H_q$. Тоді, на підставі (24), (27) отримуємо:

$$\frac{\sin(\beta\mathcal{L})}{\beta\mathcal{L}}[w] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k} \mathcal{L}^{2k}[w]}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k} \mathcal{L}^{2k}\left[\sum_{q=0}^{\infty} w_q H_q\right]}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k}}{(2k+1)!} \left(\sum_{q=0}^{\infty} (2q)^{2k} w_q H_q \right) = \quad (28)$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2q\beta)^{2k}}{(2k+1)!} \right) w_q H_q = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sin_p(2q\beta)}{2q\beta} w_q H_q.$$

За умови леми, враховуючи (28) та очевидну оцінку $|2q\beta|_p < |\beta|_p$, $q \in \mathbb{Z}_+$, одержуємо, що ряд для $\sin_p(2q\beta) / (2q\beta)$ збігається на $\mathbb{Q}_p$, причому

$$\left| \frac{\sin_p(2q\beta)}{2q\beta} \right|_p = 1. \quad (29)$$

З (29) випливає, що

$$\lim_{q\to\infty} \left| \frac{\sin_p(2q\beta)}{2q\beta} w_q \right|_p \left| k! 2^q \right|_p = \lim_{q\to\infty} \left| w_q \right|_p \left| k! 2^q \right|_p = 0,$$

а отже, $\frac{\sin(\beta\mathcal{L})}{\beta\mathcal{L}}[w]\in\mathcal{H}$. Аналогічно доводимо для оператора $\cos(\beta\mathcal{L})$. □

З формул (19), (22), (23) та (27) випливає таке подання розв'язку рівняння (17):

$$u(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k b^{2k}\mathcal{L}^{2k}[u_0]}{(2k)!}t^{2k}+\frac{(-1)^k b^{2k}\mathcal{L}^{2k}[u_1]}{(2k+1)!}t^{2k+1}\right)=$$
$$=\cos(bt\mathcal{L})[u_0]+\frac{\sin(bt\mathcal{L})}{b\mathcal{L}}[u_1]. \tag{30}$$

На підставі лем 5 та 6 отримуємо, що за умови

$$|b|_p<\frac{1}{\widetilde{R}p^{1/(p-1)}} \tag{31}$$

функція $u(t)$, визначена формулою (30), належить простору $\mathcal{A}(K_{\widetilde{R}},\mathcal{H})$.

Надалі вважатимемо, що умова (31) виконується. Невідомі $u_0,u_1\in\mathcal{H}$ зобразимо у вигляді

$$u_0=\sum_{k=0}^{\infty}C_{1k}H_k,\quad u_1=\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k}H_k, \tag{32}$$

де $C_{1k},C_{2k}\in\mathbb{Q}_p$. Аналогічно, як у (28), на підставі (24), (30), (32) отримуємо таке зображення для розв'язку:

$$u(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\cos_p(2kbt)C_{1k}+\frac{\sin_p(2kbt)}{2bk}C_{2k}\right)H_k. \tag{33}$$

Підставивши (33) в умови (18), одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих C_{1k},C_{2k}:

$$\begin{cases} I_{0,T}[\cos(2kbt)]C_{1k}+\dfrac{I_{0,T}\left[\sin(2kbt)\right]}{2kb}C_{2k}=\varphi_{1k},\\ I_{1,T}[\cos(2kbt)]C_{1k}+\dfrac{I_{1,T}\left[\sin(2kbt)\right]}{2kb}C_{2k}=\varphi_{2k},\end{cases} \tag{34}$$

де $\varphi_{1k},\varphi_{2k}$ – коефіцієнти розкладу функцій φ_1,φ_2 за поліномами H_k відповідно. З (15) випливають формули

$$I_{0,T}[\cos(2kbt)]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2kb)^{2k}T^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{\sin_p(2bkT)}{2bk}, \tag{35}$$

$$\frac{I_{0,T}\left[\sin(2kbt)\right]}{2kb}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2kb)^{2k}T^{2k+2}}{(2k+2)!}=\frac{1-\cos_p(2bkT)}{(2bk)^2}, \tag{36}$$

$$I_{1,T}[\cos(2kbt)]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2kb)^{2k}T^{2k+2}}{(2k+2)(2k)!}=$$
$$=\frac{2bkT\sin_p(2bkT)+\cos_p(2bkT)-1}{(2bk)^2}, \tag{37}$$

$$\frac{I_{1,T}\left[\sin(2kbt)\right]}{2kb}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2kb)^{2k}T^{2k+3}}{(2k+3)(2k+1)!}=$$
$$=\frac{\sin_p(2bkT)-2bkT\cos_p(2bkT)}{(2bk)^3}. \tag{38}$$

На підставі формул (35)–(38) система (34) набуває вигляду

$$\begin{cases} C_{1k}\dfrac{\sin_p(2bkT)}{2bk}+C_{2k}\dfrac{1-\cos_p(2bkT)}{(2bk)^2}=\varphi_{1k}, \\ C_{1k}\dfrac{2bkT\sin_p(2bkT)+\cos_p(2bkT)-1}{(2bk)^2}+ \\ \qquad +C_{2k}\dfrac{\sin_p(2bkT)-2bkT\cos_p(2bkT)}{(2bk)^3}=\varphi_{2k}. \end{cases} \tag{39}$$

Визначник системи (39) зображає формула

$$\Delta(k,T)=\frac{2bkT\sin_p(2bkT)+2\cos_p(2bkT)-2}{(2bk)^4}. \tag{40}$$

Теорема 1. *Нехай справджується умова*

$$|b|_p<\left(\tilde{R}p^{3/(p-1)}\right)^{-1}. \tag{41}$$

Тоді справедлива рівність $|\Delta(k,T)|_p=\left|T^4/12\right|_p\neq 0.$

Доведення. На підставі (24), (31), (40) та (41) детермінант $\Delta(k,T)$ є аналітичною функцією параметра T та визначений для довільного $T\in\overline{K}_R\subset K_{\tilde{R}}$. З формул (24), (40) маємо розвинення

$$\begin{aligned}
&\Delta(k,T)= \\
&=\frac{2bkT\sin_p(2bkT)+2\cos_p(2bkT)-2}{(2bk)^4}= \\
&=\frac{1}{(2bk)^4}\left(2bkT\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(2bk)^{2j+1}}{(2j+1)!}T^{2j+1}+\left(2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(2bk)^{2j}}{(2j)!}T^{2j}-2\right)\right)= \qquad (42)\\
&=\frac{1}{(2bk)^4}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(2bk)^{2j+2}}{(2j+1)!}T^{2j+2}-2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(2bk)^{2j+2}}{(2j+2)!}T^{2j+2}\right)= \\
&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j2j(2bk)^{2j-2}}{(2j+2)!}T^{2j+2}=\frac{T^4}{12}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(-1)^j2j(2bk)^{2j-2}}{(2j+2)!}T^{2j+2},
\end{aligned}$$

яке запишемо у вигляді

$$\Delta(k,T)=\frac{T^4}{12}+T^6\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(2j+4)(2bk)^{2j+2}}{(2j+6)!}T^{2j}. \tag{43}$$

На підставі (31), (43) та оцінок $|T|_p\le R$, $1/n!\le p^{n/(p-1)}$, отримуємо, що

$$\begin{aligned}&\left|(-1)^j(2j+4)(2bk)^{2j+2}((2j+6)!)^{-1}T^{2j+2}\right|_p\le \\ &\qquad\le|b|_p^2R^2p^{6/(p-1)}(|b|_pRp^{1/(p-1)})^{2j}\le|b|_p^2p^{6/(p-1)}.\end{aligned} \tag{44}$$

З (41), враховуючи, що для довільного простого p виконуються оцінки $1\le|12|_p^{-1}\le 4$, випливає оцінка

$$|T|_p^6|b|_p^2p^{6/(p-1)}=|T|_p^4\left(|T|_p|b|_pp^{3/(p-1)}\right)^2<|T|_p^4\le\left|\frac{T^4}{12}\right|_p. \tag{45}$$

На підставі (44), (45) та властивостей p -адичної норми отримуємо

$$\left| T^6 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j+4)(2bk)^{2j+2}}{(2j+2)!} T^{2j+2} \right|_p < \left| \frac{T^4}{12} \right|_p ,$$

а отже, $\left|\Delta(k,T)\right|_p = \left|T^4/12\right|_p$. Теорему доведено. □

За умов теореми 1 система (39) має єдиний розв'язок, а розв'язок задачі (17), (18) зображає формула

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j,q=1}^{2} \frac{\Delta_{jq}(k,T)}{\Delta(k,T)} \varphi_{jk} f_{qk}(t) \right) H_k(x), \quad t \in K_{\widetilde{R}}, x \in \mathbb{Q}_p, \tag{46}$$

де $f_{1k}(t) = \cos_p(2kbt)$, $f_{2k}(t) = \sin_p(2kbt) / (2kb)$, а (див. (35)–(38))

$$\Delta_{11}(k,T) = \frac{I_{0,T}\left[\sin(2kbt)\right]}{2kb}, \quad \Delta_{12}(k,T) = I_{1,T}[\cos(2kbt)],$$

$$\Delta_{21}(k,T) = \frac{I_{0,T}\left[\sin(2kbt)\right]}{2kb}, \quad \Delta_{22}(k,T) = I_{0,T}[\cos(2kbt)].$$

4. **Основний результат**. Достатні умови існування розв'язку задачі (17), (18) у просторі $\mathcal{A}(K_{\widetilde{R}};\mathcal{H})$ встановлює така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконується умова (41) та* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$. *Тоді існує єдиний у просторі* $\mathcal{A}(K_{\widetilde{R}};\mathcal{H})$ *розв'язок и задачі (17), (18), який зображає формула (46), причому виконується оцінка*

$$\left\| u; \mathcal{A}(K_{\widetilde{R}};\mathcal{H}) \right\| \le C \max\left\{ \left\|\varphi_1;\mathcal{H}\right\|, \left\|\varphi_2;\mathcal{H}\right\| \right\}, \quad C = p^{1/(p-1)} \widetilde{R} \left|T\right|_p^{-3}.$$

Доведення. Оцінимо норму розв'язку задачі (17), (18) у просторі $\mathcal{A}(K_{\widetilde{R}};\mathcal{H})$. Запишемо формулу (46), враховуючи (24), у вигляді

$$u(t,x) = \sum_{q=0}^{\infty} \left(G_1(k,q,T) t^{2q} + G_2(k,q,T) t^{2q+1} \right), \tag{47}$$

де

$$G_1(k,q,T) = \frac{(-1)^q (2kb) b^{2q}}{(2q)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta_{11}(k,T)\varphi_{1k} + \Delta_{21}(k,T)\varphi_{2k}}{\Delta(k,T)} H_k, \tag{48}$$

$$G_2(k,q,T) = \frac{(-1)^q (2kb)^{2q}}{(2q+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta_{12}(k,T)\varphi_{1k} + \Delta_{22}(k,T)\varphi_{2k}}{\Delta(k,T)} H_k. \tag{49}$$

Якщо виконується умова (41), то справедливі такі рівності, які встановлюють за схемою доведення теореми 1:

$$\left|\Delta_{11}(k,T)\right|_p = \left|\frac{T^3}{6}\right|_p, \ \left|\Delta_{12}(k,T)\right|_p = \left|\Delta_{21}(k,T)\right|_p = \left|\frac{T^2}{2}\right|_p,$$

$$\left|\Delta_{22}(k,T)\right|_p = \left|T\right|_p. \tag{50}$$

На підставі теореми 1 та (50) отримуємо оцінку

$$\max_{1 \le j,q \le 2} \left| \frac{\Delta_{jq}(k,T)}{\Delta(k,T)} \right|_p \le \left|T\right|_p^{-3}. \tag{51}$$

За умови (41) з формул (48), (49) та оцінки (51) випливає, що

$$\begin{aligned}\|G_1(k,q,T);\mathcal{H}\| &\le \frac{|b|_p^{2q}}{|(2q)!|_p\,|T|_p^3}\max\{\|\varphi_1;\mathcal{H}\|,\|\varphi_2;\mathcal{H}\|\} < \\ &< \frac{\max\{\|\varphi_1;\mathcal{H}\|,\|\varphi_2;\mathcal{H}\|\}}{R^{2q}\,|T|_p^3},\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}\|G_2(k,q,T);\mathcal{H}\| &\le \frac{|b|_p^{2q}}{|(2q+1)!|_p\,|T|_p^3}\max\{\|\varphi_1;\mathcal{H}\|,\|\varphi_2;\mathcal{H}\|\} < \\ &< \frac{p^{1/(p-1)}\max\{\|\varphi_1;\mathcal{H}\|,\|\varphi_2;\mathcal{H}\|\}}{R^{2q}\,|T|_p^3}.\end{aligned} \tag{53}$$

На підставі (47), (52) та (53) одержуємо, що

$$\begin{aligned}\|u;\mathcal{A}(K_R;\mathcal{H})\| &= \sup_{q\ge 0}\left\{R^{2q}\|G_1(k,q,T);\mathcal{H}\|;R^{2k+1}\|G_2(k,q,T);\mathcal{H}\|\right\} \le \\ &\le \frac{p^{1/(p-1)}R}{|T|_p^3}\max\{\|\varphi_1;\mathcal{H}\|,\|\varphi_2;\mathcal{H}\|\}.\end{aligned} \tag{54}$$

З нерівності (54) випливає, що за умов теореми розв'язок u належить простору $\mathcal{A}(K_R;\mathcal{H})$ при $R > \widetilde{R}$, а значить, і простору $\mathcal{A}(\overline{K}_{\widetilde{R}};\mathcal{H})$ та неперервно залежить від функцій φ_1, φ_2. Теорему доведено. □

Висновки. Встановлено умови на коефіцієнти рівняння (17), за яких існує єдиний розв'язок задачі (17), (18) у класі p -адичнозначних аналітичних функцій p -адичної змінної t зі значеннями у неархімедовому функційному просторі $\mathcal{H}$.

Отримані результати можна узагальнити для рівняння високого порядку:

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{n-j}\mathcal{L}^{n-j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^j}{\partial t^j}\right)u(t,x) = 0, \quad t \in K_R, x \in \mathbb{Q}_p, \tag{55}$$

$$l_{r_j,T}[u] = \varphi_j(x), \quad j = 1,\ldots,n, \quad x \in \mathbb{Q}_p, \tag{56}$$

де $l_{r_j,T}[u]$ – операції, дію яких визначає формула (15) при $r = r_j$, $r_j \in \mathbb{Z}$.

1. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* p -адический анализ и математическая физика. – Москва: Физматлит, 1994. – 352 с.
2. *Горбачук М. Л., Горбачук В. И.* О задаче Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве над полем p -адических чисел // Тр. МИАН. – 2004. – 245. – С. 99–106.
   Те саме: *Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I.* On the Cauchy problem for differential equations in a Banach space over the field of p-adic numbers // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. – 245. – P. 91–97.
3. *Кочубей А. Н.* Параболические уравнения над полем p -адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. Математиика – 1991. – 55, № 6. – С. 1312–1330.
   Те саме: *Kochubei A. N.* Parabolic equations over the field of p-adic numbers // Math. USSR-Izv. – 1992. – 39, No. 3. – P. 1263–1280.
4. *Лучко В. М., Лучко В. С.* Двоточкова крайова задача для параболічного рівняння над полем p-адичних чисел // Буковинськ. матем. журн. – 2013. – 1, № 1-2. – С. 103–106.
5. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 420 с.

6. *Aref'eva L. Ya., Dragovich B., Frampton P. H., Volovich I. V.* The wave function of the universe and *p* -adic gravity // Int. J. Modern Phys. A. – 1991. – 6, No. 24 – P. 4341–4358, https://doi.org/10.1142/S0217751X91002094.
7. *Freund P. G. O., Witten E.* Adelic string amplitudes // Phys. Lett. B. – 1987. – 199, No. 2. – P. 191–194, https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)91357-8
8. *Khrennikov A. Yu.* Mathematical methods of the non-Archimedean physics // Russ. Math. Surv. – 1990. – 45, No. 4. – P. 79–110, doi:10.1070/RM1990v045n04ABEH002378
9. *Khrennikov A. Yu.* p-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics. – Dordrecht: Kluwer, 1994. – 264 p., https://doi.org/10.1007/978-94-015-8356-5
10. *Koblitz N.* p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions, Graduate Texts in Mathematics 58 (2nd ed.). – Springer, 1984. – 154 p., https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1112-9
11. *Kochubei A. N.* Pseudo-Differential Equations and Stochastics over Non-Archimedean Fields. – New York: Marcel Dekker, 2001. – 336 p., https://doi.org/10.1201/9780203908167

ANALOGUE OF THE INTEGRAL PROBLEM FOR THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OVER *P*-ADIC NUMBER FIELD

The paper deals with a problem with integral conditions with respect to the chosen variable for a second order linear differential-operator equation with the Hermite differential operator over the field of p-adic numbers. The space of analytic functions over non-archimedean functional space builded by Hermite poynomials is described. The criterion of uniqueness and the sufficient conditions of existence of a solution of the problem in the corresponding functional space are established. The solution of the problem is built in the form of series of Hermite polynomials.

Key words: differential-operator equation, integral conditions, p-adic numbers, non-archimedean analysis, Hermite poynomials, analytic function.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
05.12.20