УДК 517.524

Т. М. Антонова, С. М. Возна✉

ФОРМУЛИ ДЛЯ ДІЙСНИХ І УЯВНИХ ЧАСТИН ЗАЛИШКІВ НАБЛИЖЕНЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Виведено формули для дійсних і уявних частин залишків звичайних і фігурних наближень гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду (типу Siemaszko), структура яких запропонована під час розв'язування задачі відповідності між формальним подвійним степеневим рядом і послідовністю раціональних наближень функції двох змінних.

Ключові слова: *гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду, звичайні наближення, фігурні наближення, формули для дійсних і уявних частин залишків.*

Вступ. Важливим засобом розв'язування задач теорії функцій, зокрема, проблеми моментів, побудови аналітичного продовження функцій, заданих у вигляді рядів, є неперервні дроби [6, 11, 12]. Багатовимірні дискретні узагальнення (гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) загального та спеціального вигляду [5, 7, 9]) відіграють для функцій багатьох змінних таку ж роль, як неперервні дроби для функцій однієї змінної. Континуальний аналог гіллястого ланцюгового дробу одержав назву інтегрального ланцюгового дробу і запропонований як засіб зображення функціоналів (операторів).

Але першочерговим завданням аналітичної теорії багатовимірних узагальнень неперервних дробів є дослідження їх збіжності. Тому актуальною залишається задача застосування відомих методик до вивчення різноманітних конструкцій неперервних дробів і розробки нових методик та встановлення нових умов збіжності.

Нижче для ГЛД спеціального вигляду (типу Siemaszko), структура яких запропонована під час розв'язування задачі відповідності між формальним подвійним степеневим рядом і послідовністю наближень ГЛД [13], встановлено вигляд формул для дійсної і уявної частин залишків різних наближень. Такий підхід застосовували раніше, вивчаючи властивості інтегральних ланцюгових дробів [1] та ГЛД інших, ніж досліджувані, конструкцій [2, 8, 10].

1. Гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду. Наближення ГЛД. Дослідимо ГЛД спеціального вигляду

$$b_0 + F_{0,0} + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,0}}{1 + F_{i,0}} + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{0,i}}{1 + F_{0,i}},$$

$$F_{i,j} = \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{a_{p+i,p+j}}{1}, \quad i = 0,1,\ldots, \quad j = 0,1,\ldots, \tag{1}$$

де b_0, $a_{i,j}$, $i = 0, 1, \ldots$, $j = 0, 1, \ldots$, $i + j \ge 1$ – комплексні сталі або функції двох змінних z_1, z_2, визначені в області $D \subset \mathbb{C}^2$.

Існують різні способи побудови наближень (підхідних дробів) ГЛД загального і спеціального вигляду.

Звичайне n-не наближення (звичайний n-й підхідний дріб) ГЛД (1) обчислюємо так [3, 4]:

$$f_0 = b_0, \quad f_n = b_0 + F_{0,0}^{(n)} + \mathop{D}_{k=1}^{n} \frac{a_{k,0}}{1 + F_{k,0}^{(n-k)}} + \mathop{D}_{k=1}^{n} \frac{a_{0,k}}{1 + F_{0,k}^{(n-k)}}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

✉ svitlanavozna@gmail.com

де

$$F_{k,l}^{(0)} = 0,\ \ F_{k,l}^{(p)} = \underset{j=1}{\overset{p}{D}} \frac{a_{k+j,l+j}}{1},\ \ k,l = 0,1,\ldots,\ \ p = 1,2,\ldots. \tag{3}$$

Звичайний n-й підхідний дріб містить всі елементи $a_{r,q}$, для яких $\max(r,q) \le n$, тобто кожний ($k+1$)-й підхідний дріб утворюють додаванням до k-го підхідного дробу всіх ланок $\dfrac{a_{r,q}}{1}$, які знаходяться на ($k+1$)-му поверсі.

Фігурне n-не наближення (n-й підхідний дріб за Siemaszko) ГЛД (1) означено у такий спосіб [5, 13]:

$$\tilde{f}_0 = b_0,$$

$$\tilde{f}_n = b_0 + F_{0,0}^{([n/2])} + \underset{k=1}{\overset{n}{D}} \frac{a_{k,0}}{1 + F_{k,0}^{([(n-k)/2])}} + \underset{i=1}{\overset{n}{D}} \frac{a_{0,k}}{1 + F_{0,k}^{([(n-k)/2])}},\ \ n = 1,2,\ldots, \tag{4}$$

де $[a]$ – ціла частина дійсного числа a. Фігурний n-й підхідний дріб за Siemaszko містить всі ті елементи $a_{r,q}$, для яких $r+q \le n$.

Для дослідження властивостей послідовностей різних наближень ГЛД (1) (обмеженість, збіжність, стійкість) використовуємо іншу форму запису:

$$f_n = b_0 + F_{0,0}^{(n)} + \frac{a_{1,0}}{Q_{1,0}^{(n-1)}} + \frac{a_{0,1}}{Q_{0,1}^{(n-1)}},\ \ n = 1,2,\ldots, \tag{5}$$

$$\tilde{f}_n = b_0 + F_{0,0}^{([n/2])} + \frac{a_{1,0}}{\tilde{Q}_{1,0}^{(n-1)}} + \frac{a_{0,1}}{\tilde{Q}_{0,1}^{(n-1)}},\ \ n = 1,2,\ldots, \tag{6}$$

$$F_{0,0}^{(p)} = \frac{a_{1,1}}{Q_{1,1}^{(p-1)}},\ \ F_{i,0}^{(p)} = \frac{a_{i+1,1}}{Q_{i+1,1}^{(p-1)}},\ \ F_{0,i}^{(p)} = \frac{a_{1,i+1}}{Q_{1,i+1}^{(p-1)}},\ \ i = 1,2,\ldots,\ \ p = 1,2,\ldots, \tag{7}$$

де

$$Q_{i,0}^{(0)} = 1,\ \ Q_{i,0}^{(k+1)} = 1 + F_{i,0}^{(k+1)} + \frac{a_{i+1,0}}{Q_{i+1,0}^{(k)}},\ \ i = 1,2,\ldots,\ \ k = 0,1,2,\ldots, \tag{8}$$

$$Q_{0,i}^{(0)} = 1,\ \ Q_{0,i}^{(k+1)} = 1 + F_{0,i}^{(k+1)} + \frac{a_{0,i+1}}{Q_{0,i+1}^{(k)}},\ \ i = 1,2,\ldots,\ \ k = 0,1,2,\ldots, \tag{9}$$

$$\tilde{Q}_{i,0}^{(0)} = 1,\ \ \tilde{Q}_{i,0}^{(k+1)} = 1 + F_{i,0}^{([(k+1)/2])} + \frac{a_{i+1,0}}{\tilde{Q}_{i+1,0}^{(k)}},\ \ i = 1,2,\ldots,\ \ k = 0,1,2,\ldots, \tag{10}$$

$$\tilde{Q}_{0,i}^{(0)} = 1,\ \ \tilde{Q}_{0,i}^{(k+1)} = 1 + F_{0,i}^{([(k+1)/2])} + \frac{a_{0,i+1}}{\tilde{Q}_{0,i+1}^{(k)}},\ \ i = 1,2,\ldots,\ \ k = 0,1,2,\ldots, \tag{11}$$

$$Q_{k+j,l+j}^{(0)} = 1,\ \ Q_{k+j,l+j}^{(p)} = 1 + \frac{a_{k+j+1,l+j+1}}{Q_{k+j+1,l+j+1}^{(p-1)}},\ \ k,l = 0,1,\ldots,\ \ j,p = 1,2,\ldots. \tag{12}$$

Вирази (8), (9) називають залишками звичайних наближень (2), а (10), (11) – залишками фігурних наближень (4) ГЛД (1). Залишками наближень (3) звичайних ланцюгових дробів називають вирази (12).

2. Основні результати. Нехай

$$\varphi_{k,l} = \arg(a_{k,l}),\quad \varphi_{k,0} = \arg(a_{k,0}),\quad \varphi_{0,k} = \arg(a_{0,k}),$$
$$k,l = 1,2,\ldots, \tag{13}$$

$$u_{k,l}^{(p)} = \operatorname{Re} Q_{k,l}^{(p)}, \quad v_{k,l}^{(p)} = \operatorname{Im} Q_{k,l}^{(p)}, \quad k,l = 1,2,\ldots, \tag{14}$$

$$u_{k,0}^{(p)} = \operatorname{Re} Q_{k,0}^{(p)}, \quad v_{k,0}^{(p)} = \operatorname{Im} Q_{k,0}^{(p)}, \quad u_{0,k}^{(p)} = \operatorname{Re} Q_{0,k}^{(p)}, \quad v_{0,k}^{(p)} = \operatorname{Im} Q_{0,k}^{(p)}, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{15}$$

$$\tilde{u}_{k,0}^{(p)} = \operatorname{Re} \tilde{Q}_{k,0}^{(p)}, \quad \tilde{v}_{k,0}^{(p)} = \operatorname{Im} \tilde{Q}_{k,0}^{(p)}, \quad \tilde{u}_{0,k}^{(p)} = \operatorname{Re} \tilde{Q}_{0,k}^{(p)}, \quad \tilde{v}_{0,k}^{(p)} = \operatorname{Im} \tilde{Q}_{0,k}^{(p)}, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{16}$$

Розглянемо спочатку залишки (12). Очевидно, що

$$u_{k,l}^{(0)} = 1, \quad v_{k,l}^{(0)} = 0, \quad k,l = 1,2,\ldots. \tag{17}$$

Далі, враховуючи позначення (13), (14), маємо:

$$Q_{k,l}^{(p)} = 1 + \frac{a_{k+1,l+1}}{Q_{k+1,l+1}^{(p-1)}} = 1 + \frac{|a_{k+1,l+1}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(p-1)}\right|^2}\left(\cos\varphi_{k+1,l+1} + i\sin\varphi_{k+1,l+1}\right) \times$$
$$\times \left(u_{k+1,l+1}^{(p-1)} - i v_{k+1,l+1}^{(p-1)}\right), \quad k,l = 1,2,\ldots, \quad p = 1,2,\ldots,$$

де $i = \sqrt{-1}$. Звідси випливає, що

$$u_{k,l}^{(p)} = 1 + \frac{|a_{k+1,l+1}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(p-1)}\right|^2}\left(u_{k+1,l+1}^{(p-1)}\cos\varphi_{k+1,l+1} + v_{k+1,l+1}^{(p-1)}\sin\varphi_{k+1,l+1}\right), \tag{18}$$

$$v_{k,l}^{(p)} = \frac{|a_{k+1,l+1}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(p-1)}\right|^2}\left(u_{k+1,l+1}^{(p-1)}\sin\varphi_{k+1,l+1} - v_{k+1,l+1}^{(p-1)}\cos\varphi_{k+1,l+1}\right). \tag{19}$$

Отже,

$$u_{k,l}^{(1)} = 1 + \frac{|a_{k+1,l+1}|\cos\varphi_{k+1,l+1}}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(0)}\right|^2}, \qquad v_{k,l}^{(1)} = \frac{|a_{k+1,l+1}|\sin\varphi_{k+1,l+1}}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(0)}\right|^2},$$

$$u_{k,l}^{(2)} = 1 + \frac{|a_{k+1,l+1}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(1)}\right|^2}\left(u_{k+1,l+1}^{(1)}\cos\varphi_{k+1,l+1} + v_{k+1,l+1}^{(1)}\sin\varphi_{k+1,l+1}\right) =$$
$$= 1 + \frac{|a_{k+1,l+1}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(1)}\right|^2}\cos\varphi_{k+1,l+1} + \frac{|a_{k+1,l+1}||a_{k+2,l+2}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(1)}\right|^2\left|Q_{k+2,l+2}^{(0)}\right|^2} \times$$
$$\times \left(\cos\varphi_{k+1,l+1}\cos\varphi_{k+2,l+2} + \sin\varphi_{k+1,l+1}\sin\varphi_{k+2,l+2}\right) =$$
$$= 1 + \frac{|a_{k+1,l+1}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(1)}\right|^2}\cos\varphi_{k+1,l+1} + \frac{|a_{k+1,l+1}||a_{k+2,l+2}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(1)}\right|^2\left|Q_{k+2,l+2}^{(0)}\right|^2} \times$$
$$\times \cos(\varphi_{k+1,l+1} - \varphi_{k+2,l+2}),$$

$$v_{k,l}^{(2)} = \frac{|a_{k+1,l+1}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(1)}\right|^2}\left(u_{k+1,l+1}^{(1)}\sin\varphi_{k+1,l+1} - v_{k+1,l+1}^{(1)}\cos\varphi_{k+1,l+1}\right) =$$
$$= \frac{|a_{k+1,l+1}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(1)}\right|^2}\sin\varphi_{k+1,l+1} + \frac{|a_{k+1,l+1}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(1)}\right|^2}\frac{|a_{k+2,l+2}|}{\left|Q_{k+2,l+2}^{(0)}\right|^2} \times$$
$$\times \left(\cos\varphi_{k+2,l+2}\sin\varphi_{k+1,l+1} - \sin\varphi_{k+2,l+2}\cos\varphi_{k+1,l+1}\right) =$$

$$= \frac{|a_{k+1,l+1}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(1)}\right|^2} \sin \varphi_{k+1,l+1} + \frac{|a_{k+1,l+1}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(1)}\right|^2} \frac{|a_{k+2,l+2}|}{\left|Q_{k+2,l+2}^{(0)}\right|^2} \times$$

$$\times \sin(\varphi_{k+1,l+1} - \varphi_{k+2,l+2}).$$

Продовжуючи аналогічні дії, отримаємо:

$$u_{k,l}^{(p)} = 1 + \frac{|a_{k+1,l+1}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(p-1)}\right|^2} \cos \varphi_{k+1,l+1} +$$

$$+ \frac{|a_{k+1,l+1}|\,|a_{k+2,l+2}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(p-1)}\right|^2 \left|Q_{k+2,l+2}^{(p-2)}\right|^2} \cos(\varphi_{k+1,l+1} - \varphi_{k+2,l+2}) + \ldots +$$

$$+ \prod_{r=1}^{p} \frac{|a_{k+r,l+r}|}{\left|Q_{k+r,l+r}^{(p-r)}\right|^2} \cos\left(\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,l+j} \right) = 1 +$$

$$+ \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{|a_{k+r,l+r}|}{\left|Q_{k+r,l+r}^{(p-r)}\right|^2} \cos\left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,l+j} \right), \; p = 1, 2, \ldots, \quad (20)$$

$$v_{k,l}^{(p)} = \frac{|a_{k+1,l+1}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(p-1)}\right|^2} \sin \varphi_{k+1,l+1} + \frac{|a_{k+1,l+1}|\,|a_{k+2,l+2}|}{\left|Q_{k+1,l+1}^{(p-1)}\right|^2 \left|Q_{k+2,l+2}^{(p-2)}\right|^2} \times \sin(\varphi_{k+1,l+1} - \varphi_{k+2,l+2}) +$$

$$+ \prod_{r=1}^{p} \frac{|a_{k+r,l+r}|}{\left|Q_{k+r,l+r}^{(p-r)}\right|^2} \sin\left(\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,l+j} \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{|a_{k+r,l+r}|}{\left|Q_{k+r,l+r}^{(p-r)}\right|^2} \sin\left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,l+j} \right), \; p = 1, 2, \ldots. \quad (21)$$

Формули (20), (21) можна довести методом математичної індукції за p, використовуючи співвідношення (18), (19).

Беручи до уваги (7), маємо:

$$\operatorname{Re} F_{k,l}^{(p)} = \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{|a_{k+r,l+r}|}{\left|Q_{k+r,l+r}^{(p-r)}\right|^2} \cos\left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,l+j} \right), \; p = 1, 2, \ldots, \quad (22)$$

$$\operatorname{Im} F_{k,l}^{(p)} = \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{|a_{k+r,l+r}|}{\left|Q_{k+r,l+r}^{(p-r)}\right|^2} \sin\left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,l+j} \right), \; p = 1, 2, \ldots. \quad (23)$$

З формул (8) для залишків фігурних наближень ГЛД (1) і позначень (13), (16) випливає, що

$$\tilde{u}_{k,0}^{(0)} = 1, \quad \tilde{v}_{k,0}^{(0)} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad (24)$$

$$\tilde{Q}_{k,0}^{(p+1)} = 1 + F_{k,0}^{([(p+1)/2])} + \frac{|a_{k+1,0}|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^2} (\cos \varphi_{k+1,0} + i \sin \varphi_{k+1,0}) \times$$

$$\times (\tilde{u}_{k+1,0}^{(p)} - i \tilde{v}_{k+1,0}^{(p)}), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\tilde{u}_{k,0}^{(p+1)} = 1 + \operatorname{Re} F_{k,0}^{([(p+1)/2])} + \frac{|a_{k+1,0}|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^2} \times$$

$$\times\left(\tilde{u}_{k+1,0}^{(p)}\cos\varphi_{k+1,0}+\tilde{v}_{k+1,0}^{(p)}\sin\varphi_{k+1,0}\right),\quad k=1,2,\ldots,\tag{25}$$

$$\tilde{v}_{k,0}^{(p+1)}=\operatorname{Im}F_{k,0}^{([(p+1)/2])}+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}\right|^2}\left(\tilde{u}_{k+1,0}^{(p)}\sin\varphi_{k+1,0}-\tilde{v}_{k+1,0}^{(p)}\cos\varphi_{k+1,0}\right),$$

$$k=1,2,\ldots,\quad p=0,1,2,\ldots.\tag{26}$$

Підставляючи у формули (25), (26) $p=0$, $p=1$, $p=2$ і враховуючи (24), (22), (23), отримаємо:

$$\tilde{u}_{k,0}^{(1)}=1+\operatorname{Re}F_{k,0}^{([1/2])}+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(0)}\right|^2}\cos\varphi_{k+1,0}=1+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(0)}\right|^2}\cos\varphi_{k+1,0};$$

$$\tilde{v}_{k,0}^{(1)}=\operatorname{Im}F_{k,0}^{([1/2])}+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(0)}\right|^2}\sin\varphi_{k+1,0}=\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(0)}\right|^2}\sin\varphi_{k+1,0};$$

$$\tilde{u}_{k,0}^{(2)}=1+\operatorname{Re}F_{k,0}^{(1)}+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(1)}\right|^2}\left(\tilde{u}_{k+1,0}^{(1)}\cos\varphi_{k+1,0}+\tilde{v}_{k+1,0}^{(1)}\sin\varphi_{k+1,0}\right)=$$

$$=1+\operatorname{Re}F_{k,0}^{(1)}+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(1)}\right|^2}\cos\varphi_{k+1,0}+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(1)}\right|^2}\times$$

$$\times\left(\cos\varphi_{k+1,0}\operatorname{Re}F_{k+1,0}^{([1/2])}+\sin\varphi_{k+1,0}\operatorname{Im}F_{k+1,0}^{([1/2])}\right)+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(1)}\right|^2}\times$$

$$\times\frac{\left|a_{k+2,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+2,0}^{(0)}\right|^2}\left(\cos\varphi_{k+2,0}\cos\varphi_{k+1,0}+\sin\varphi_{k+2,0}\sin\varphi_{k+1,0}\right)=$$

$$=1+\frac{\left|a_{k+1,1}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,1}^{(0)}\right|^2}\cos\varphi_{k+1,1}+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(1)}\right|^2}\cos\varphi_{k+1,0}+$$

$$+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(1)}\right|^2}\frac{\left|a_{k+2,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+2,0}^{(0)}\right|^2}\cos\left(\varphi_{k+1,0}+\varphi_{k+2,0}\right);$$

$$\tilde{v}_{k,0}^{(2)}=\operatorname{Im}F_{k,0}^{(1)}+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(1)}\right|^2}\left(\tilde{u}_{k+1,0}^{(1)}\sin\varphi_{k+1,0}-\tilde{v}_{k+1,0}^{(1)}\cos\varphi_{k+1,0}\right)=$$

$$=\operatorname{Im}F_{k,0}^{(1)}+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(1)}\right|^2}\left(1+\operatorname{Re}F_{k+1,0}^{([1/2])}\right)\sin\varphi_{k+1,0}-$$

$$-\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(1)}\right|^2}\operatorname{Im}F_{k+1,0}^{([1/2])}\cos\varphi_{k+1,0}+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(1)}\right|^2}\frac{\left|a_{k+2,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+2,0}^{(0)}\right|^2}\times$$

$$\times\left(\cos\varphi_{k+2,0}\sin\varphi_{k+1,0}-\sin\varphi_{k+2,0}\cos\varphi_{k+1,0}\right)=\frac{\left|a_{k+1,1}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1,1}^{(0)}\right|^2}\sin\varphi_{k+1,1}+$$

$$+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(1)}_{k+1,0}\right|^2}\sin\varphi_{k+1,0}+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(1)}_{k+1,0}\right|^2}\frac{\left|a_{k+2,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(0)}_{k+2,0}\right|^2}\sin(\varphi_{k+1,0}-\varphi_{k+2,0});$$

$$\tilde{u}^{(3)}_{k,0}=1+\operatorname{Re}F^{(1)}_{k,0}+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(2)}_{k+1,0}\right|^2}\left(\tilde{u}^{(2)}_{k+1,0}\cos\varphi_{k+1,0}+\tilde{v}^{(2)}_{k+1,0}\sin\varphi_{k+1,0}\right)=$$

$$=1+\sum_{m=1}^{1}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r,r}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(1-r)}_{k+r,r}\right|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,j}\right)+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(2)}_{k+1,0}\right|^2}\cos\varphi_{k+1,0}+$$

$$+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(2)}_{k+1,0}\right|^2}\sum_{m=1}^{1}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+1,r}\right|}{\left|Q^{(1-r)}_{k+r+1,r}\right|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j+1,j}\right)\cos\varphi_{k+1,0}+$$

$$+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(2)}_{k+1,0}\right|^2}\sum_{m=1}^{1}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+1,r}\right|}{\left|Q^{(2-r)}_{k+r+1,r}\right|^2}\sin\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j+1,j}\right)\sin\varphi_{k+1,0}+$$

$$+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(2)}_{k+1,0}\right|^2}\frac{\left|a_{k+2,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(1)}_{k+2,0}\right|^2}\left(\cos\varphi_{k+1,0}\cos\varphi_{k+2,0}+\sin\varphi_{k+1,0}\sin\varphi_{k+2,0}\right)+$$

$$+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(2)}_{k+1,0}\right|^2}\frac{\left|a_{k+2,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(1)}_{k+2,0}\right|^2}\frac{\left|a_{k+3,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(0)}_{k+3,0}\right|^2}\times$$

$$\times\left(\cos\varphi_{k+1,0}\cos(\varphi_{k+2,0}-\varphi_{k+3,0})+\sin\varphi_{k+1,0}\sin(\varphi_{k+2,0}-\varphi_{k+3,0})\right)=$$

$$=1+\sum_{m=1}^{1}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r,r}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(1-r)}_{k+r,r}\right|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,j}\right)+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(2)}_{k+1,0}\right|^2}\cos\varphi_{k+1,0}+$$

$$+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(2)}_{k+1,0}\right|^2}\sum_{m=1}^{1}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+1,r}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(1-r)}_{k+r+1,r}\right|^2}\cos\left(\varphi_{k+1,0}-\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j+1,j}\right)+$$

$$+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(2)}_{k+1,0}\right|^2}\frac{\left|a_{k+2,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(1)}_{k+2,0}\right|^2}\cos(\varphi_{k+1,0}-\varphi_{k+2,0})+$$

$$+\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(2)}_{k+1,0}\right|^2}\frac{\left|a_{k+2,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(1)}_{k+2,0}\right|^2}\frac{\left|a_{k+3,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(0)}_{k+3,0}\right|^2}\cos(\varphi_{k+1,0}-\varphi_{k+2,0}+\varphi_{k+3,0})=$$

$$=1+\sum_{m=1}^{1}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r,r}\right|}{\left|Q^{(1-r)}_{k+r,r}\right|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,j}\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{3}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(3-r)}_{k+r,0}\right|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}\right)+$$

$$+\prod_{r=1}^{1}\frac{\left|a_{k+r,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(3-r)}_{k+r,0}\right|^2}\sum_{m=1}^{1}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+1,r}\right|}{\left|Q^{(1-r)}_{k+r+1,r}\right|^2}\cos\left(\varphi_{k+1,0}-\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j+1,j}\right),$$

$$\tilde{v}_{k,0}^{(3)} = \sum_{m=1}^{1}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r,r}|}{|Q_{k+r,r}^{(1-r)}|^2}\sin\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,j}\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{3}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r,0}|}{|\tilde{Q}_{k+r,0}^{(3-r)}|^2}\sin\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}\right)+$$

$$+\prod_{r=1}^{1}\frac{|a_{k+r,0}|}{|\tilde{Q}_{k+r,0}^{(3-r)}|^2}\sum_{m=1}^{1}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r+1,r}|}{|Q_{k+r+1,r}^{(1-r)}|^2}\sin\left(\varphi_{k+1,0}-\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j+1,j}\right).$$

Продовжуючи аналогічні міркування, для довільних $k \ge 1$ і $p \ge 3$ дістали формули

$$\tilde{u}_{k,0}^{(p)} = 1+\sum_{m=1}^{[p/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r,r}|}{|Q_{k+r,r}^{([p/2]-r)}|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,j}\right)+\sum_{m=1}^{p}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r,0}|}{|\tilde{Q}_{k+r,0}^{(p-r)}|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}\right)+\sum_{l=1}^{p-2}\prod_{q=1}^{l}\frac{|a_{k+q,0}|}{|\tilde{Q}_{k+q,0}^{(p-q)}|^2}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{[(p-l)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r+l,r}|}{|Q_{k+r+l,r}^{([(p-l)/2]-r)}|^2}\times\cos\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l,j}\right),\quad k=1,2,\ldots,\ p=3,4,\ldots, \tag{27}$$

$$\tilde{v}_{k,0}^{(p)} = \sum_{m=1}^{[p/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r,r}|}{|Q_{k+r,r}^{([p/2]-r)}|^2}\sin\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,j}\right)+\sum_{m=1}^{p}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r,0}|}{|\tilde{Q}_{k+r,0}^{(p-r)}|^2}\times$$

$$\times\sin\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}\right)+\sum_{l=1}^{p-2}\prod_{q=1}^{l}\frac{|a_{k+q,0}|}{|\tilde{Q}_{k+q,0}^{(p-q)}|^2}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{[(p-l)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r+l,r}|}{|Q_{k+r+l,r}^{([(p-l)/2]-r)}|^2}\sin\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}+,\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l,j}\right),\quad k=1,2,\ldots,\ \ p=3,4,\ldots, \tag{28}$$

у правильності яких можна переконатись методом математичної індукції.

Дійсно, формули (27), (28) правильні для довільних $k \ge 1$ і $p = 3$. Припустимо, що вони правильні для деякого значення довільних $k \ge 1$ і $p \ge 3$. Тоді з (25), (27), (28) випливає, що

$$\tilde{u}_{k,0}^{(p+1)} = 1+\sum_{m=1}^{[(p+1)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r,r}|}{|Q_{k+r,r}^{([(p+1)/2]-r)}|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,j}\right)+$$

$$+\frac{|a_{k+1,0}|}{|\tilde{Q}_{k+1,0}^{(p)}|^2}\left(\tilde{u}_{k+1,0}^{(p)}\cos\varphi_{k+1,0}+\tilde{v}_{k+1,0}^{(p)}\sin\varphi_{k+1,0}\right).$$

Підставляючи у попередній рядок вирази для $\tilde{u}_{k,0}^{(p)}$, $\tilde{v}_{k,0}^{(p)}$, отримаємо:

$$\frac{\left|a_{k+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(p)}_{k+1,0}\right|^2}\left(\tilde{u}^{(p)}_{k+1,0}\cos\varphi_{k+1,0}+\tilde{v}^{(p)}_{k+1,0}\sin\varphi_{k+1,0}\right)=A+B+C\,,$$

де

$$A=\left|\frac{a_{k+1,0}}{\tilde{Q}^{(p)}_{k+1,0}}\right|\cos\varphi_{k+1,0}+$$

$$+\left|\frac{a_{k+1,0}}{\tilde{Q}^{(p)}_{k+1,0}}\right|\sum_{m=1}^{p}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+1+r,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(p-r)}_{k+1+r,0}\right|^2}\cos\left(\varphi_{k+1,0}-\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+1+j,0}\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{p+1}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(p+1-r)}_{k+r,0}\right|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}\right),$$

$$B=\left|\frac{a_{k+1,0}}{\tilde{Q}^{(p)}_{k+1,0}}\right|\sum_{m=1}^{[p/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+1,r}\right|}{\left|Q^{([p/2]-r)}_{k+r+1,r}\right|^2}\cos\left(\varphi_{k+1,0}-\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+1+j,j}\right),$$

$$C=\left|\frac{a_{k+1,0}}{\tilde{Q}^{(p)}_{k+1,0}}\right|\sum_{l=1}^{p-2}\prod_{q=1}^{l}\frac{\left|a_{k+1+q,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(p-q)}_{k+1+q,0}\right|^2}\sum_{m=1}^{[(p-l)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+l+1,r}\right|}{\left|Q^{([(p-l)/2]-r)}_{k+r+l+1,r}\right|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\varphi_{k+1,0}-\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j+1,0}-\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l+1,j}\right).$$

Якщо $p=2s$, то

$$B=\left|\frac{a_{k+1,0}}{\tilde{Q}^{(2s)}_{k+1,0}}\right|\sum_{m=1}^{s}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+1,r}\right|}{\left|Q^{(s-r)}_{k+r+1,r}\right|^2}\cos\left(\varphi_{k+1,0}+\sum_{j=2}^{m}(-1)^{j+1-1}\varphi_{k+j+1,j}\right),$$

$$C=\left|\frac{a_{k+1,0}}{\tilde{Q}^{(2s)}_{k+1,0}}\right|\sum_{l=1}^{2s-2}\prod_{q=1}^{l}\frac{\left|a_{k+1+q,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(2s-q)}_{k+1+q,0}\right|^2}\sum_{m=1}^{[s-l/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+l+1,r}\right|}{\left|Q^{([(2s-l)/2]-r)}_{k+r+l+1,r}\right|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\varphi_{k+1,0}-\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j+1,0}-\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l+1,j}\right)=$$

$$=\sum_{l=2}^{2s-1}\prod_{q=1}^{l}\frac{\left|a_{k+q,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(2s+1-q)}_{k+q,0}\right|^2}\sum_{m=1}^{[(2s+1-l)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+l,r}\right|}{\left|Q^{((2s+1-l)/2-r)}_{k+r+l,r}\right|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j+1,0}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l,j}\right),$$

$$B+C=\sum_{l=1}^{2s-1}\prod_{q=1}^{l}\frac{\left|a_{k+q,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(2s+1-q)}_{k+1+q,0}\right|^2}\sum_{m=1}^{[(2s+1-l)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+l,r}\right|}{\left|Q^{((2s+1-l)/2-r)}_{k+r+l,r}\right|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j+1,0}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l,j}\right).$$

Якщо $p=2s-1$, то

$$B=\left|\frac{a_{k+1,0}}{\tilde{Q}^{(2s-1)}_{k+1,0}}\right|\sum_{m=1}^{s-1}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+1,r}\right|}{\left|Q^{(s-1-r)}_{k+r+1,r}\right|^2}\cos\left(\varphi_{k+1,0}+\sum_{j=2}^{m}(-1)^{j+1-1}\varphi_{k+j+1,j}\right),$$

$$C=\left|\frac{a_{k+1,0}}{\tilde{Q}_{k+1,0}^{(2s-1)}}\right|\sum_{l=1}^{2s-3}\prod_{q=1}^{l}\frac{\left|a_{k+1+q,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1+q,0}^{(2s-1-q)}\right|^2}\sum_{m=1}^{[(2s-1-l)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+l+1,r}\right|}{\left|Q_{k+r+l+1,r}^{([(2s-1-l)/2]-r)}\right|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\varphi_{k+1,0}-\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j+1,0}-\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l+1,j}\right)=$$

$$=\sum_{l=2}^{2s-2}\prod_{q=1}^{l}\frac{\left|a_{k+q,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+q,0}^{(2s-q)}\right|^2}\sum_{m=1}^{[(2s-l)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+l,r}\right|}{\left|Q_{k+r+l,r}^{((2s-l)/2-r)}\right|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l,j}\right),$$

$$B+C=\sum_{l=1}^{2s-2}\prod_{q=1}^{l}\frac{\left|a_{k+q,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+q,0}^{(2s-q)}\right|^2}\sum_{m=1}^{[(2s-l)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+l,r}\right|}{\left|Q_{k+r+l,r}^{((2s-l)/2-r)}\right|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l,j}\right).$$

Отже, в обох випадках маємо

$$A+B+C=\sum_{m=1}^{p+1}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+r,0}^{(p+1-r)}\right|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{p+1}\prod_{q=1}^{l}\frac{\left|a_{k+q,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{k+1+q,0}^{(p+1-q)}\right|^2}\sum_{m=1}^{[(p+1-l)/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+l,r}\right|}{\left|Q_{k+r+l,r}^{((p+1-l)/2-r)}\right|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l,j}\right),$$

чим завершуємо виведення формули для $\tilde{u}_{k,0}^{(p+1)}$. Діючи аналогічно, можна вивести формулу для $\tilde{v}_{k,0}^{(p+1)}$, використовуючи (26), (27), (28). Це означає, що формули (27), (28) правильні.

Подібно встановлюємо формули для $\tilde{u}_{0,k}^{(p)}$, $\tilde{v}_{0,k}^{(p)}$, а також, використовуючи (5), (8), (9), (13)-(15) — формули для дійсних і уявних частин залишків звичайних наближень ГЛД (1), зокрема:

$$u_{k,0}^{(p)}=1+\sum_{m=1}^{p}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r,r}\right|}{\left|Q_{k+r,r}^{(p-r)}\right|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,j}\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{p}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r,0}\right|}{\left|Q_{k+r,0}^{(p-r)}\right|^2}\cos\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{p-1}\prod_{q=1}^{l}\frac{\left|a_{k+q,0}\right|}{\left|Q_{k+q,0}^{(p-q)}\right|^2}\sum_{m=1}^{p-l}\prod_{r=1}^{m}\frac{\left|a_{k+r+l,r}\right|}{\left|Q_{k+r+l,r}^{(p-l-r)}\right|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,0}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l,j}\right),$$

$$k=1,2,\ldots,\quad p=2,3,\ldots, \tag{28}$$

$$
\begin{aligned}
v_{k,0}^{(p)} = {} & \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{\left|a_{k+r,r}\right|}{\left|Q_{k+r,r}^{(p-r)}\right|^2} \sin\left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,j} \right) + \\
& + \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{\left|a_{k+r,0}\right|}{\left|Q_{k+r,0}^{(p-r)}\right|^2} \times \sin\left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,0} \right) + \\
& + \sum_{l=1}^{p-1} \prod_{q=1}^{l} \frac{\left|a_{k+q,0}\right|}{\left|Q_{k+q,0}^{(p-q)}\right|^2} \sum_{m=1}^{p-l} \prod_{r=1}^{m} \frac{\left|a_{k+r+l,r}\right|}{\left|Q_{k+r+l,r}^{(p-l-r)}\right|^2} \times \\
& \times \sin\left(\sum_{j=1}^{l} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,0} + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+l-1} \varphi_{k+j+l,j} \right), \\
& \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad p = 2, 3, \ldots . \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Ці формули придатні для оцінки значень залишків, а отже, з урахуванням формул (5)–(7), і для оцінки значень звичайних і фігурних наближень під час дослідження властивостей ГЛД (1) з комплексними елементами.

1. *Антонова Т. М.* Достатні ознаки збіжності і стійкості інтегральних ланцюгових дробів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1996.
2. *Антонова Т. М.* Швидкість збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Волинський мат. вісник. – 1999. – Вип. 6. – С. 5–11.
3. *Антонова Т. М., Возна С. М.* Дослідження абсолютної та фігурно абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Вост.-европ. журн. передовых технологий. Математика и кибернетика. – Прикладные аспекты. – 2015. – № 6/4(78) – С. 19–26. – https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.54116
4. *Антонова Т. М., Возна С. М.* Про одну ознаку збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з дійсними елементами// Прикл. проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14. – С. 16–24.
5. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
6. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
   Те саме: *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – xxii+428 p.
7. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики, 2010. – 218 с.
8. *Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30–44.
9. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и её применение в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
10. *Сусь О. М., Кучмінська Х. Й., Возна С. М.* Дійсна та уявна частини для залишків двовимірного неперервного дробу // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Прикл. математика. – 2000.– № 411. – С. 304–308.
11. *Cuyt A., Petersen V. B., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B.* Handbook of Continued Fractions for Special Functions. – N. Y.: Springer, 2008. – 448 p.
12. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam: North Holland, 1992. – 606 p.
13. *Siemaszko W.* Branched continued fractions for double power series // J. Comput. Appl. Math. –1980. – **6**, No. 2. – P. 121–125. – https://doi.org/10.1016/0771-050X(80)90005-4

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ И МНИМЫХ ЧАСТЕЙ ОСТАТКОВ ПРИБЛИЖЕНИЙ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Выведены формулы для действительных и мнимых частей остатков обычных и фигурных приближений ветвящихся цепных дробей специального вида (типа Siemaszko), структура которых предложена при решении задачи соответствия *между формальным двойным степенным рядом и последовательностью рациональных приближений функции двух переменных.*

Ключевые слова: *ветвящаяся цепная дробь специального вида, обычные приближения, фигурные приближения, формулы для действительных и мнимых частей остатков.*

THE FORMULAS FOR REAL AND IMAGINARY PARTS OF TAILS OF APPROXIMANTS FOR BRANCHED CONTINUED FRACTIONS OF THE SPECIAL FORM

We have deduced the formulas for real and imaginary parts of tails of ordinary and figured approximants for branched continued fractions of the special form (Siemaszko's type), whose structure was suggested in the process of solving the problem of the correspondence between a formal double power series and a sequence of the rational approximants of a function of two variables.

Key words**:** *branched continued fraction of the special form, ordinary approximants, figured approximants, formulas for real and imaginary parts of tails.*

Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

Одержано
22.10.19