УДК 539.3

Ю. В. Токовий✉, Д. С. Бойко

БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ КЛЮЧОВИХ РІВНЯНЬ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ

З використанням методу безпосереднього інтегрування побудовано аналітичний розв'язок тривимірної задачі теорії пружності для трансверсально-ізотропного півпростору, плоска обмежувальна поверхня якого паралельна до площини ізотропії і зазнає дії незмінних у часі нормальних та дотичних навантажень. Задачу зведено до системи ключових рівнянь для компонент тензора напружень з відповідними межовими умовами, які розв'язано за допомогою подвійного інтегрального перетворення Фур'є.

Ключові слова: *тривимірна задача теорії пружності, трансверсально ізотропний півпростір, метод безпосереднього інтегрування, аналітичний розв'язок.*

Вступ. Запровадження композитних матеріалів, щоб поліпшити експлуатаційні показники елементів конструкцій, машин і механізмів у техніці та будівництві, пов'язане з розвитком технологій, які поєднують новаторські підходи у матеріалознавстві та реології. Одним із важливих етапів вивчення реологічної поведінки виготовлених з композитних матеріалів елементів конструкцій є аналіз у межах лінійної теорії пружності напружено-деформованого стану твердих тіл з анізотропних матеріалів певних типів, зокрема, ортотропних та трансверсально ізотропних [3]. Прикладами найчастіше вживаних трансверсально-ізотропних тіл, механічні характеристики яких є однаковими у двох просторових напрямках (площині ізотропії) та відрізняються у перпендикулярному (трансверсальному) до площини ізотропії напрямку, є однонапрямлені волокнисті композити з гексагональним укладенням волокон, тонкошарові ламінати з довільною орієнтацією плоских шарів тощо [11, 16].

Відомі розв'язки тривимірних задач теорії пружності для ізотропних твердих тіл [1, 6, 7], а пружну поведінку анізотропних, зокрема трансверсально ізотропних, вивчено гірше, що пов'язано зі складністю систем тривимірних ключових рівнянь такого класу задач. Переважну більшість методів для їх аналізу поширено на анізотропні матеріали і розвинуто для ізотропії [4, 5, 8, 9]. Загалом побудова аналітичних розв'язків задач теорії пружності для анізотропних тіл залишається проблемною.

У статті з використанням методу безпосереднього інтегрування [14] розвинуто методику побудови аналітичних розв'язків тривимірних задач теорії пружності для трансверсально ізотропного півпростору з площиною ізотропії, паралельної до обмежувальної поверхні, яка зазнає дії нормального та дотичного силового навантажень. З допомогою системи ключових рівнянь [10, 15, 16] у просторі подвійного інтегрального перетворення Фур'є за змінними, що відповідають ортогональним напрямкам у площині ізотропії, задачу зведено до послідовного визначення компонент тензора напружень з окремих рівнянь зі заданими та супровідними умовами.

1. Формулювання задачі. Розглянемо тривимірну задачу теорії пружності для трансверсально ізотропного півпростору $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $z \le 0$, віднесеного до безрозмірної декартової системи координат $Oxyz$ так, що його обмежувальна поверхня $z = 0$ є паралельною до площини ізотропії xOy. За відсутності масових сил задачу описують рівняння рівноваги [2, 5]

✉ tokovyy@gmail.com

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \qquad \overset{\nearrow y \searrow}{x \leftarrow z}, \tag{1}$$

рівняння суцільності в деформаціях

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right), \qquad \overset{\nearrow y \searrow}{x \leftarrow z}, \tag{2}$$

та фізичні співвідношення

$$EE'\varepsilon_{xx} = E'(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) - \nu' E\sigma_{zz}, \qquad x \rightleftarrows y,$$

$$E'\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz} - \nu'(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

$$G'\varepsilon_{jz} = \sigma_{jz}, \qquad j = \{x, y\}, \qquad G\varepsilon_{xy} = \sigma_{xy}. \tag{3}$$

Тут $\sigma_{j\ell} = \sigma_{\ell j}$, $\varepsilon_{j\ell} = \varepsilon_{\ell j}$ – компоненти тензорів напружень та деформації, $\ell, j = \{x, y, z\}$; E, E' та $G = E/(2+2\nu)$, G' – модулі пружності та зсуву у площині ізотропії та у перпендикулярному до неї напрямку; ν та ν' – коефіцієнти Пуассона, що описують відповідно звуження (розширення) у перпендикулярному до площини ізотропії напрямку за розтягу (стиску) у паралельному до неї напрямку та звуження (розширення) у площині ізотропії за розтягу (стиску) у перпендикулярному до неї напрямку; символи $\overset{\nearrow y \searrow}{x \leftarrow z}$ та $x \rightleftarrows y$ позначають отримання відповідно двох та одного рівнянь за допомогою циклічного і взаємного переставляння індексів та змінних.

Межу півпростору $z = 0$ навантажено нормальними та дотичними зовнішніми силами в розмірності напружень:

$$\sigma_{zz}(x, y, 0) = -p(x, y), \qquad \sigma_{jz}(x, y, 0) = q_j(x, y), \qquad j = \{x, y\}. \tag{4}$$

Виконання другої групи рівнянь (2) рівносильне інтегральній умові [16]

$$\int_{-\infty}^{x} \left(e_{xz}(\xi, y, 0) - \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial e_x(\xi_1, y, 0)}{\partial z} d\xi_1 \right) d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \left(e_{yz}(x, \eta, 0) - \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\partial e_y(x, \eta_1, 0)}{\partial z} d\eta_1 \right) d\eta. \tag{5}$$

Побудуємо розв'язок задачі (1)–(5) за припущення, що задані зовнішні нормальні та дотичні навантаження (4) локально розподілені, тобто $p(x, y) \to 0$ та $q_j(x, y) \to 0$ при $x^2 + y^2 \to \infty$, $j = \{x, y\}$.

2. Побудова розв'язку. З використанням методики [10] задачу (1)–(5) зведемо до системи ключових рівнянь у напруженнях

$$\Delta^+\Delta^-\sigma_{zz} - \mu^+\mu^-\Delta_{xy}\Delta_1\sigma_{zz} = 0, \qquad \Delta^+\sigma_{zz} = \mu^+\Delta_{xy}\sigma,$$

$$\Delta_{xy}\sigma_{yy} + \mu_1 \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} = \left(\frac{\mu_2}{\mu^+} - 1 \right) \Delta\sigma_{zz} + (1 - \mu_2) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} +$$

$$+ (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\mu_2}{\mu^-} \sigma + (1 - \mu_3)\sigma_{zz} \right), \quad x \rightleftarrows y,$$

$$2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2}, \qquad \overset{\nearrow y \searrow}{x \leftarrow z}, \tag{6}$$

де $\mu_1 = G' / G$, $\mu_2 = 2G' / E$, $\mu_3 = 2G'(1+\nu') / E'$, $\mu_4 = E / E'$,

$$\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \Delta = \Delta_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \Delta^{\pm} = \Delta_{xy} \pm (1 \pm \nu)\mu^{\pm} \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\Delta_1 = (\mu_4 - 1)\Delta_{xy} + 2\frac{\mu^+ - \mu_2}{\mu_2 \mu^+} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \mu^{\pm} = \frac{E'}{\nu' E \pm E'}$$

та

$$\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \tag{7}$$

за виконання умов (4), (5) для напружень та деформацій.

Таким чином, розв'язок задачі (1)–(5) побудуємо, розв'язуючи послідовно рівняння (6) з урахуванням виразу (7) за умов (4), (5).

У просторі інтегрального перетворення Фур'є [12]

$$\bar{f}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\exp\left(-i(xs_x + ys_y)\right) dx\, dy, \tag{8}$$

де s_x, s_y – параметри перетворення за координатами x та y; $i^2 = -1$, перше рівняння (6) має вигляд

$$\frac{d^4\bar{\sigma}_{zz}}{dz^4} - 2a_1 s^2 \frac{d^2\bar{\sigma}_{zz}}{dz^2} + a_2 s^4 \bar{\sigma}_{zz} = 0, \tag{9}$$

де $s^2 = s_x^2 + s_y^2$,

$$a_1 = \frac{E}{E'}\frac{E' - 2(1+\nu)\nu' G'}{2(1-\nu^2)G'}, \qquad a_2 = \frac{E}{E'}\frac{E' - \nu'^2 E}{(1-\nu^2)E'}. \tag{10}$$

Форма розв'язку рівняння (9) залежить від кратності коренів його характеристичного рівняння, які будуть різними при $a_1^2 \neq a_2$ або кратними при $a_1^2 = a_2$. Нижче побудуємо розв'язок задачі при $a_1^2 \neq a_2$, коли характеристичне рівняння (9) має дійсні різні корені (для решти випадків реалізація методу аналогічна). За виконання нерівностей

$$a_1^2 - a_2 > 0, \qquad a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_2} > 0, \tag{11}$$

обмежений при $z \to -\infty$ розв'язок рівняння (9) з урахуванням умов

$$\bar{\sigma}_{zz}(0) = -\bar{p}, \qquad \frac{d\bar{\sigma}_{zz}(0)}{dz} = -i(s_x \bar{q}_x + s_y \bar{q}_y) \tag{12}$$

має вигляд

$$\bar{\sigma}_{zz}(z) = \frac{|\lambda_1|\exp(|s\lambda_2|z) - |\lambda_2|\exp(|s\lambda_1|z)}{|\lambda_2| - |\lambda_1|}\bar{p} +$$
$$+ \frac{i}{|s|}\frac{\exp(|s\lambda_1|z) - \exp(|s\lambda_2|z)}{|\lambda_2| - |\lambda_1|}(s_x\bar{q}_x + s_y\bar{q}_y). \tag{13}$$

Тут $\lambda_j = \sqrt{a_1 + (-1)^j\sqrt{a_1^2 - a_2}} \in \mathbb{R}$, $j = 1,2$.

Зауважимо, що першу умову (12) отримано з умови (4) для нормальних напружень у просторі інтегрального перетворення (8), а другу – з умови (4) для дотичних напружень з використанням рівнянь рівноваги (1).

У просторі перетворення (8) друге рівняння (6) має вигляд

$$\bar{\sigma} = \left(1 + \nu' \frac{E}{E'} \right) \bar{\sigma}_{zz} - \frac{1+\nu}{s^2} \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2} ,$$

звідки з урахуванням (13) випливає вираз для сумарних напружень:

$$\bar{\sigma}(z) = \frac{|\lambda_1|\, \alpha_2 \exp(|s\lambda_2|\, z) - |\lambda_2|\, \alpha_1 \exp(|s\lambda_1|\, z)}{|\lambda_2| - |\lambda_1|} \bar{p} +$$

$$+ \frac{i}{|s|} \frac{\alpha_1 \exp(|s\lambda_1|\, z) - \alpha_2 \exp(|s\lambda_2|\, z)}{|\lambda_2| - |\lambda_1|} (s_x \bar{q}_x + s_y \bar{q}_y) , \qquad (14)$$

де $\alpha_j = 1 + \nu' E/E' - (1+\nu)\lambda_j^2$, $j = 1, 2$.

Підставивши вирази (13), (14) у третє рівняння (6), у просторі інтегрального перетворення (8) отримаємо:

$$\frac{d^2 \bar{\sigma}_{yy}}{dz^2} - (sk)^2 \bar{\sigma}_{yy} = \frac{|\lambda_1|\, \beta_2 \exp(|s\lambda_2|\, z) - |\lambda_2|\, \beta_1 \exp(|s\lambda_1|\, z)}{|\lambda_2| - |\lambda_1|} \bar{p} +$$

$$+ \frac{i}{|s|} \frac{\beta_1 \exp(|s\lambda_1|\, z) - \beta_2 \exp(|s\lambda_2|\, z)}{|\lambda_2| - |\lambda_1|} (s_x \bar{q}_x + s_y \bar{q}_y) , \qquad (15)$$

де $k^2 = G / G'$,

$$\beta_j = \left((s^2 + s_y^2)\nu' \frac{E}{E'} - s^2 \nu \lambda_j^2 + \frac{E}{2G'} \left(s_x^2 - \frac{s^2}{1+\nu} \right) \right) \lambda_j^2 +$$

$$+ \frac{E}{E'} \left(\frac{s_y^2}{1+\nu} \left(1 - \nu'^2 \frac{E}{E'} \right) - s_x^2 \nu' \frac{G}{G'} \right).$$

Обмежений при $z \to -\infty$ розв'язок рівняння (15) знайдемо у вигляді

$$\bar{\sigma}_{yy}(z) = A \exp(|s|\, kz) + \frac{1}{|\lambda_2| - |\lambda_1|} \Bigg[\Big(|\lambda_1|\, \gamma_2 \exp(|s\lambda_2|\, z) -$$

$$- |\lambda_2|\, \gamma_1 \exp(|s\lambda_1|\, z) + \gamma_{0p} \exp(|s|\, kz) \Big) \bar{p} +$$

$$+ \frac{i}{|s|} \Big(\gamma_1 \exp(|s\lambda_1|\, z) - \gamma_2 \exp(|s\lambda_2|\, z) +$$

$$+ \gamma_{0q} \exp(|s|\, kz) \Big) (s_x \bar{q}_x + s_y \bar{q}_y) \Bigg] , \qquad (16)$$

де A − стала інтегрування, $\gamma_j = s^{-2} \beta_j / (\lambda_j^2 - k^2)$, $j = 1, 2$,

$$\gamma_{0p} = \frac{1}{2s^2 k} \left(\frac{|\lambda_2|\, \beta_1}{|\lambda_1| - k} - \frac{|\lambda_1|\, \beta_2}{|\lambda_2| - k} \right), \quad \gamma_{0q} = \frac{1}{2s^2 k} \left(\frac{\beta_2}{|\lambda_2| - k} - \frac{\beta_1}{|\lambda_1| - k} \right).$$

Для визначення сталої A використаємо інтегральну умову (5), яка у просторі інтегрального перетворення (8) набуде вигляду

$$\frac{d}{dz} (s_y^2 \bar{\varepsilon}_{xx} - s_x^2 \bar{\varepsilon}_{yy}) = i s_x s_y (s_y \bar{\varepsilon}_{xz} - s_x \bar{\varepsilon}_{yz}), \qquad z = 0 ,$$

з урахуванням виразів (13), (14), (16), фізичних співвідношень (3) та умов (4). Остаточно отримаємо:

$$\bar{\sigma}_{yy}(z) = \frac{1}{|\lambda_2| - |\lambda_1|} \Bigg[\Big(|\lambda_1|\, \gamma_2 \exp(|s\lambda_2|\, z) -$$

$$- |\lambda_2|\, \gamma_1 \exp(|s\lambda_1|\, z) + \gamma_p \exp(|s|\, kz) \Big) \bar{p} +$$

$$+\frac{i}{|s|}\Big(\gamma_1 \exp(|s\lambda_1|z) - \gamma_2 \exp(|s\lambda_2|z) +$$

$$+\gamma_q \exp(|s|kz)\Big)(s_x\bar{q}_x + s_y\bar{q}_y)\Big] +$$

$$+ 2ik\frac{s_x s_y}{|s^3|}(s_x\bar{q}_y - s_y\bar{q}_x)\exp(|s|kz), \tag{17}$$

де

$$\gamma_p = \frac{\sqrt{a_2}}{k}\left(\frac{s_y^2 + \nu s_x^2}{s^2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \gamma_1 - \gamma_2\right),$$

$$\gamma_q = \frac{s_y^2 + \nu s_x^2}{s^2}\frac{|\lambda_1|\alpha_1 - |\lambda_2|\alpha_2}{k(1+\nu)} - \frac{|\lambda_1|\gamma_1 - |\lambda_2|\gamma_2}{k} +$$

$$+\left(s_y^2\left(1+\nu'\frac{E}{E'}\right) + s_x^2\left(\nu - \nu'\frac{E}{E'}\right)\right)\frac{|\lambda_2| - |\lambda_1|}{s^2 k(1+\nu)}.$$

З використанням виразу (7) у просторі перетворення (8) та розв'язків (13), (14), (17) знайдемо нормальні напруження:

$$\bar{\sigma}_{xx}(z) = \frac{1}{|\lambda_2| - |\lambda_1|}\Big[\Big(|\lambda_1|\tilde{\gamma}_2 \exp(|s\lambda_2|z) -$$

$$-|\lambda_2|\tilde{\gamma}_1 \exp(|s\lambda_1|z) - \gamma_p \exp(|s|kz)\Big)\bar{p} +$$

$$+\frac{i}{|s|}\Big(\tilde{\gamma}_1 \exp(|s\lambda_1|z) - \tilde{\gamma}_2 \exp(|s\lambda_2|z) -$$

$$-\gamma_q \exp(|s|kz)\Big)(s_x\bar{q}_x + s_y\bar{q}_y)\Big] +$$

$$+ 2ik\frac{s_x s_y}{|s^3|}(s_y\bar{q}_x - s_x\bar{q}_y)\exp(|s|kz), \tag{18}$$

де $\tilde{\gamma}_j = \alpha_j - \gamma_j - 1$, $j = 1, 2$.

Четверте рівняння (6) у просторі перетворення (8) за допомогою циклічного переставляння індексів $\begin{smallmatrix} & y & \\ \nearrow & & \searrow \\ x & \leftarrow & z \end{smallmatrix}$ запишемо у вигляді трьох рівнянь

$$\bar{\sigma}_{xy} = -\frac{1}{2s_x s_y}\left(s_x^2\bar{\sigma}_{xx} + s_y^2\bar{\sigma}_{yy} + \frac{d^2\bar{\sigma}_{zz}}{dz^2}\right), \tag{19}$$

та

$$\frac{d\bar{\sigma}_{yz}}{dz} = \frac{i}{2s_y}\left(s_x^2\bar{\sigma}_{xx} - s_y^2\bar{\sigma}_{yy} + \frac{d^2\bar{\sigma}_{zz}}{dz^2}\right), \quad x \rightleftarrows y, \tag{20}$$

які дають змогу визначити дотичні напруження у півпросторі за нормальними напруженнями.

На основі (19) з урахуванням виразів (13), (17), (18) одержимо:

$$\bar{\sigma}_{xy}(z) = \frac{1}{|\lambda_2| - |\lambda_1|}\Big[\Big(|\lambda_1|\gamma_2^{xy} \exp(|s\lambda_2|z) -$$

$$-|\lambda_2|\gamma_1^{xy} \exp(|s\lambda_1|z) + \gamma_p^{xy} \exp(|s|kz)\Big)\bar{p} +$$

$$+\frac{i}{|s|}\Big(\gamma_1^{xy} \exp(|s\lambda_1|z) - \gamma_2^{xy} \exp(|s\lambda_2|z) +$$

$$+\gamma_q^{xy}\exp(|s|kz)\Big)(s_x\bar{q}_x+s_y\bar{q}_y)\Big]+$$

$$+ik\frac{s_x^2-s_y^2}{|s^3|}(s_x\bar{q}_y-s_y\bar{q}_x)\exp(|s|kz),\qquad(21)$$

де $\gamma_j^{xy}=-\dfrac{1}{2s_xs_y}(s^2\lambda_j^2+s_x^2\tilde{\gamma}_j+s_y^2\gamma_j)$, $j=1,2$, $\gamma_p^{xy}=\dfrac{s_x^2-s_y^2}{2s_xs_y}\gamma_p$, $\gamma_q^{xy}=\dfrac{s_x^2-s_y^2}{2s_xs_y}\gamma_q$.

Проінтегрувавши рівняння (20) за змінною z з урахуванням відповідних умов (4) у просторі перетворення (8), отримаємо вирази для зображень дотичних напружень σ_{yz} та σ_{xz}:

$$\bar{\sigma}_{\zeta z}(z)=\frac{1}{|\lambda_2|-|\lambda_1|}\bigg[\Big(\gamma_{p0}^{\zeta z}+|\lambda_1|\gamma_2^{\zeta z}\exp(|s\lambda_2|z)-$$

$$-|\lambda_2|\gamma_1^{\zeta z}\exp(|s\lambda_1|z)-\gamma_p^{\zeta z}\exp(|s|kz)\Big)\bar{p}+$$

$$+\frac{i}{|s|}\Big(\gamma_{q0}^{\zeta z}+\gamma_1^{\zeta z}\exp(|s\lambda_1|z)-\gamma_2^{\zeta z}\exp(|s\lambda_2|z)-$$

$$-\gamma_q^{\zeta z}\exp(|s|kz)\Big)(s_x\bar{q}_x+s_y\bar{q}_y)\bigg]-\frac{\theta_\zeta}{s^2}\exp(|s|kz),\qquad(22)$$

де $\theta_x=(s_xs_y\bar{q}_y-s_y^2\bar{q}_x)$, $\theta_y=(s_xs_y\bar{q}_x-s_x^2\bar{q}_y)$, $\mathrm{i}_x=1$, $\mathrm{i}_y=-1$, $\zeta=\{x,y\}$,

$$\gamma_j^{\zeta z}=\frac{i}{2s_\zeta|s\lambda_j|}(s^2\lambda_j^2+\mathrm{i}_\zeta(s_y^2\gamma_j-s_x^2\tilde{\gamma}_j)),\qquad j=1,2,$$

$$\gamma_p^{\zeta z}=\frac{i|s|\gamma_p}{2s_\zeta k},\qquad \gamma_q^{\zeta z}=\frac{i|s|\gamma_q}{2s_\zeta k},$$

$$\gamma_{p0}^{\zeta z}=\frac{i}{2s_\zeta|s|}\Big(-\mathrm{i}_\zeta s^2\frac{\gamma_p}{k}-\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|(s^2\lambda_2^2+\mathrm{i}_\zeta(s_y^2\gamma_2-s_x^2\tilde{\gamma}_2))+$$

$$+\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|(s^2\lambda_1^2+\mathrm{i}_\zeta(s_y^2\gamma_1-s_x^2\tilde{\gamma}_1))\Big),$$

$$\gamma_{q0}^{\zeta z}=\frac{i\,\mathrm{i}_\zeta}{2s_\zeta|s|}\Big((s_x^2-s_y^2)(|\lambda_1|-|\lambda_2|)-s^2\frac{\gamma_q}{k}+$$

$$+\frac{1}{|\lambda_2|}(s_y^2\gamma_2-s_x^2\tilde{\gamma}_2)-\frac{1}{|\lambda_1|}(s_y^2\gamma_1-s_x^2\tilde{\gamma}_1)\Big).$$

Знайшовши розв’язок задачі (1)–(5) у просторі зображень перетворення (8) у вигляді (13), (17), (18), (21), (22), визначимо напруження у фізичній області за оберненим перетворенням Фур’є [12]:

$$f(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(z)\exp(i(xs_x+ys_y))ds_xds_y.\qquad(23)$$

3. Числовий приклад та обговорення. Вивчимо вплив трансверсальної ізотропії матеріалу на напружений стан півпростору за нормального навантаження його обмежувальної поверхні $z=0$:

$$p(x,y)=p_0\exp(-a_xx^2-a_yy^2),\qquad q_j(x,y)=0,\qquad j=\{1,2\},\qquad(24)$$

де p_0 – стала у розмірності тиску, $a_x,a_y\in\mathbb{R}_+$. Дослідимо два типи трансверсально ізотропних матеріалів, властивості яких наведено у таблиці. Нескладно перевірити, що для розглянутих матеріалів коефіцієнти (10) задовольняють умову (11).

Таблиця 1. Пружні модулі досліджуваних матеріалів [13].

Матеріал	E, ГПа	E', ГПа	G, ГПа	G', ГПа	ν	ν'
А – вуглецево-волокнистий композит	15	232	5.03	24	0.49	0.28
Б – титанат цирконату свинцю PZT-4	81.28	64.53	30.56	25.6	0.33	0.34

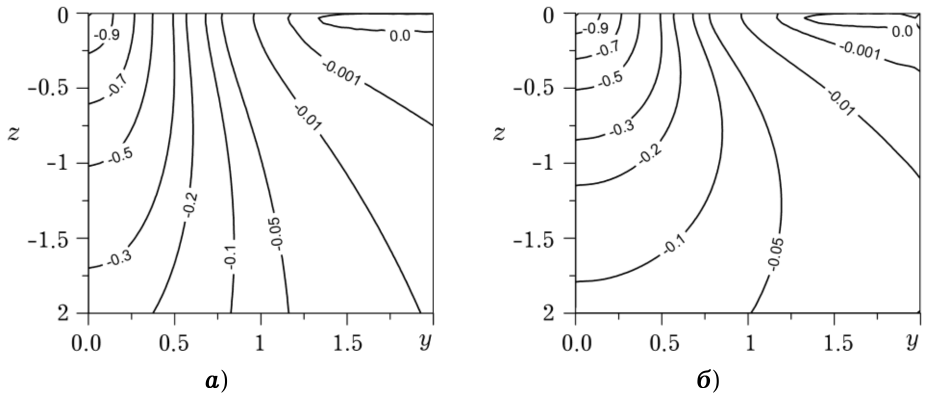

Рис. 1. Розподіли безрозмірних напружень σ_{zz} / p_0 для матеріалів *А* та *Б* (відповідно ***а*** та ***б***) у півпросторі за навантаження (24) при $a_x = 3$, $a_y = 5$ у перерізі $x = 0$.

На рисунку наведено розподіли напружень σ_{zz} / p_0, розрахованих за формулою (13) у фізичній області після оберненого перетворення (23) для матеріалів *А* та *Б* (див. таблицю). Поведінка обчислених для різних матеріалів напружень якісно подібна. Однак спостерігаємо суттєвий вплив анізотропії на кількісні показники напружень, які для матеріалу *Б* згасають швидше з віддаленням від навантаженої обмежувальної поверхні.

Висновки. Метод безпосереднього інтегрування поширено для побудови аналітичних розв'язків тривимірних задач теорії пружності для трансверсально ізотропного півпростору за силового навантаження обмежувальної поверхні. Задачу зведено до системи семи ключових рівнянь для семи шуканих функцій: шести компонент тензора напружень та сумарних нормальних напружень. Систему розв'язано у просторі подвійного інтегрального перетворення Фур'є з послідовним визначенням шуканих функцій. Розв'язки ключових рівнянь залежать від співвідношень пружних модулів трансверсально ізотропного матеріалу за посередництвом коефіцієнтів (10) характеристичного рівняння (9). На основі числового прикладу проілюстровано суттєвий вплив на розподіли напружень у трансверсально ізотропному півпросторі відмінності пружних модулів матеріалу у площині ізотропії та у перпендикулярному до неї напрямку.

1. *Александров В. М., Пожарский Д. А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. – Москва: Факториал, 1998. – 288 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448 с.

3. *Божидарнік В. В., Андрейків О. Є., Сулим Г. Т.* Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів. Т. 1: Основи механіки руйнування неперервно армованих композитів. – Луцьк: Надстир'я, 2007. – 400 с.
4. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. – Москва: Наука, 1992. – 336 с.
5. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
6. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – Москва: ГИТТЛ, 1955. – 492. с.
7. *Мартиненко М. А.* Мішані просторові задачі математичної теорії пружності. – Київ: НУХТ, 2012. – 374 с.
8. *Немиш Ю. Н.* Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел (обзор) // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 2. – С. 3–38.
   Те саме: *Nemish Yu. N.* Development of analytical methods in three-dimensional problems of the statics of anisotropic bodies (Review) // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, No. 2. – P. 135–172. – https://doi.org/10.1007/BF02681992
9. *Подильчук Ю. Н.* Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 10. – С. 3–30.
   Те саме: *Podil'chuk Yu. N.* Exact analytic solutions of three-dimensional boundary-value problems of the statics of a transversely isotropic body of canonical form (Survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No. 10. – P. 763–787. – https://doi.org/10.1007/BF02719255
10. *Токовий Ю. В., Бойко Д. С.* Розв'язок тривимірної задачі термопружності для необмеженого трансверсально-ізотропного тіла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 4. – С. 88–99.
11. Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. – Москва: Наука, 1988. – 190 с.
12. *Brigham E. O.* The fast Fourier transform and its applications. – New York: Prentice-Hall Inc., 1988. – 448 p.
13. *Ding H., Chen W., Zhang L.* Elasticity of transversely isotropic materials. – Dordrecht: Springer, 2006. – 436 p.
14. *Tokovyy Yu. V.* Direct integration method // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 951–960. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_621
15. Tokovyy Yu. V. Direct integration of three-dimensional thermoelasticity equations for a transversely isotropic layer // J. Therm. Stresses. – 2019. – **42**, No. 1. – P. 49–64.
   https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1526150
16. *Tokovyy Yu. V., Ma C.-C.* Three-dimensional elastic analysis of transversely-isotropic composites // J. Mech. – 2017. – **33**, No. 6. – P. 821–830. – https://doi.org/10.1017/jmech.2017.91

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ КЛЮЧЕВЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

С использованием метода непосредственного интегрирования построено аналитическое решение трехмерной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полупространства, плоская ограничивающая поверхность которого параллельна к плоскости изотропии и подвержена воздействию постоянных во времени нормальных и касательных силовых нагрузок. Задача сведена к системе ключевых уравнений для компонент тензора напряжений с соответствующими краевыми условиями, решаемых при помощи двойного интегрального преобразования Фурье.

Ключевые слова: *трехмерная задача теории упругости, трансверсально изотропное полупространство, метод непосредственного интегрирования, аналитическое решение.*

DIRECT INTEGRATION OF THE GOVERNING EQUATIONS OF A THREE-DIMENSIONAL PROBLEM OF THE ELASTICITY THEORY FOR A TRANSVERSELY ISOTROPIC HALF-SPACE

By making use of the direct integration method, an analytical solution to a three-dimensional elasticity problem is constructed for a transversely isotropic half-space

with its limiting plane surface being parallel to the isotropy plane and exposed to external steady-state normal and shearing force loadings. The problem is reduced to a system of governing equations for the stress-tensor components with corresponding boundary conditions, which are solved by means of the Fourier double-integral transform.
Key words*: *three-dimensional elasticity problem, transversely isotropic half-space, method of direct integration, analytical solution.
Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів
Одержано
11.10.19