УДК 512.552.12

А. І. Гаталевич[1]✉, М. І. Кучма[2]

# СУМИ ТА ДОБУТКИ ОБОРОТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТА ІДЕМПОТЕНТІВ У ДУО-КІЛЬЦЯХ

*Елемент кільця $R$ називають чистим (відповідно одинично-регулярним), якщо він є сумою (відповідно добутком) оборотного елемента та ідемпотента. Відомо, що всі елементи в кільці $R$ є чистими, якщо всі вони є одинично-регулярними. Досліджено деякі класи одинично-регулярних та чистих матриць над дуо-кільцем. Виявлено, що адекватна справа дуо-область є майже 2-добрим кільцем.*

***Ключові слова:*** *чистий елемент, чисте кільце, дуо-кільце, ідемпотентний стабільний ранг 1.*

Поняття одинично-регулярного елемента ввела Г. Ерліх. Згідно з працею [3], елемент кільця $R$ називають одинично-регулярним, якщо $x = xux$ для деякого оборотного елемента $u \in R$. Легко побачити, що елемент $x$ є одинично-регулярним тоді і лише тоді, коли він є добутком оборотного елемента та ідемпотента. Ерліх назвала кільце одинично-регулярним, якщо всі його елементи одинично-регулярні. Такі кільця інтенсивно вивчають як важливий клас регулярних за фон Нейманом кілець. Паралельно Ніколсон ввів поняття чистого елемента та чистого кільця [8]. Ці класи кілець містяться в класі кілець з властивістю заміни, які відіграють важливу роль у некомутативній теорії кілець і модулів. Вамош досліджував так звані $2$-добрі кільця, де кожен елемент є сумою двох оборотних елементів. Б. В. Забавський і І. С. Васюник [10] досліджували зв'язок комутативних $2$-добрих кілець з адекватними кільцями та кільцями майже одиничного стабільного рангу один. У пропонованій статті вивчено деякі класи одинично-регулярних та чистих матриць над дуо-кільцем. Введено поняття майже одиничного стабільного рангу $1$ і майже $2$-доброго кільця для дуо-кільця. Доведено існування таких кілець і вказано їхній зв'язок з іншими класами кілець, зокрема з адекватними справа, які узагальнюють комутативні адекватні області [5, 7].

Усюди під кільцем $R$ розумітимемо асоціативне кільце з відмінною від нуля одиницею. Позначимо через $U(R)$ групу оборотних елементів кільця $R$.

***Означення 1.*** Дуо-кільцем називають кільце $R$, в якому кожен правий, чи лівий ідеал кільця є двобічним.

***Означення 2.*** Елемент $a$ кільця $R$ називають адекватним справа, якщо для довільного елемента $b \in R$ існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = r \cdot s$, $rR + bR = R$, і для такого довільного елемента $s' \in R$, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$.

***Означення 3.*** Кільце $R$ називають правим (лівим) кільцем Безу, якщо кожний скінченно породжений правий (лівий) ідеал є головним. Праве та ліве кільця Безу називають кільцем Безу.

***Означення 4.*** Кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент є адекватним справа, називають адекватним справа кільцем.

***Означення 5.*** Якщо довільна $1 \times 2$ $(2 \times 1)$ матриця над кільцем $R$ володіє діагональною редукцією, то кільце $R$ називають правим (лівим) кільцем Ерміта. Праве і ліве кільця Ерміта називають кільцями Ерміта.

---

✉ gatalevych@ukr.net

***Означення 6.*** Кільце $R$ називають чистим, якщо для довільного елемента $x \in R$ існують такий оборотний елемент $u \in R$ і ідемпотент $e \in R$, що $x = u + e$ [8].

***Означення 7.*** Кільце $R$ називають кільцем з властивістю заміни, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий ідемпотент $e \in R$, що $e \in aR$ і $(1-e) \in (1-a)R$ [6].

***Означення 8.*** Кільце $R$ називають кільцем ідемпотентного стабільного рангу $1$, якщо з умови $aR + bR = R$ для довільних елементів $a, b \in R$ випливає існування такого ідемпотента $e \in R$, що $(a + be) \in U(R)$ [8].

***Означення 9.*** Кільце $R$ називають абелевим, якщо для будь-якого ідемпотента $e = e^2 \in R$ виконується умова $ae = ea$ для довільного елемента $a \in R$. Тобто довільний ідемпотент $e = e^2$ кільця $R$ є центральним [2].

Зазначимо, що клас абелевих кілець містить клас правих (лівих) дуо-кілець. Справді, нехай $e = e^2 \in R$ і $a \in R$. Тоді згідно з означенням дуо-кільця маємо рівність $ea = a'e$ для деякого елемента $a' \in R$. Звідси одержимо рівність $ea = (a'e)e = eae$. За симетрією $ae = eae$. Отже, отримаємо, що $ea = ae$.

**Теорема 1** [2]**.** Нехай $R$ − абелеве кільце. Тоді наступні твердження еквівалентні:

1. $R$ є чистим кільцем;
2. $R$ є кільцем з властивістю заміни;
3. $R$ є кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1.

**Теорема 2.** Нехай $K$ − дуо-кільце Ерміта. Матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ є одинично-регулярною в кільці $R = M_2(K)$ тоді і тільки тоді, коли існує ідемпотент $e \in K$ і унімодулярний рядок $(a', b') \in K^2$ такий, що $(a, b) = e(a', b')$. Зокрема, якщо $K$ − нерозкладне кільце, тоді єдиними ненульовими одинично-регулярними матрицями в $R$ з нульовим другим рядком є $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, де $(a, b)$ − унімодулярний рядок.

Д о в е д е н н я. Нехай $(a, b)$ має вигляд $e(a', b')$, де рядок $(a', b') \in K^2$ є унімодулярним. Тоді його можна доповнити до оборотної матриці $\begin{pmatrix} a' & b' \\ * & * \end{pmatrix}$ і рівність $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ * & * \end{pmatrix}$ свідчить, що $A$ − одинично-регулярна матриця.

Навпаки, припустимо, що матриця $A$ є одинично-регулярною. Тоді $A = EU$, де $E = E^2$ і $U \in GL_2(K)$.

Нехай $E = \begin{pmatrix} e & r \\ s & t \end{pmatrix}$ і $U = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$. Тоді маємо $(s, t) = (0, 0)U^{-1} \equiv (0, 0)$, а звідси

$$E = E^2 = \begin{pmatrix} e^2 & er \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $e = e^2$, $r = er$. Звідси $(a, b) = e(a', b')$, де

$$(a', b') = (w, x) + r(y, z)$$

є унімодулярним рядком, оскільки $(w, x)$ і $(y, z)$ є рядками матриці з $GL_2(K)$.

Дослідити чистоту матриці $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ складніше. Природно, що чисті елементи з $K$ відіграють ключову роль в розв'язанні цієї задачі.

**Твердження 1.** Нехай $a\in K$ − чистий елемент. Тоді для довільного $b\in K$ матриця $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ є чистою в $R$.

Д о в е д е н н я. Нехай $a=e+u$, де $e^2=e$ і $u\in U(K)$. Тоді рівність

$$A=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

вказує на те, що $A$ є чиста матриця.

**Наслідок.** Нехай $K$ − нерозкладне кільце. Якщо $a\in K\setminus\{0\}$ є чистим не оборотним в $K$, елементом то матриця $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ є чистою, але не є одинично-регулярною в $R=M_2(K)$.

***Означення 10*** [4]**.** Кільце $R$ називають кільцем одиничного стабільного рангу $1$, якщо з умови $aR+bR=R$ для довільних елементів $a,b\in R$ отримаємо, що існує такий оборотний елемент $u\in U(R)$, що $(a+bu)\in U(R)$.

***Означення 11*** [9]**.** Кільце $R$ називають $2$-добрим кільцем, якщо довільний елемент в $R$ є сумою двох оборотних елементів.

**Твердження 2.** Нехай $R$ − дуо-область Безу та $a$ − ненульовий необоротний елемент в $R$ і $b$ − такий елемент в $R$, що $aR+bR=R$. Тоді образ елемента $b$ за канонічного гомоморфізму $R\to R/aR$ є оборотним елементом.

Якщо $aR+bR\neq R$, то образ елемента $b$ за канонічного гомоморфізму $R\to R/aR$ є дільником нуля.

Д о в е д е н н я. Оскільки $aR+bR=R$, то існують такі елементи $u,v\in R$, що $au+bv=1$. Звідси отримаємо, що $\overline{b}\overline{v}=\overline{1}$, де $\overline{b}$ і $\overline{v}$ − гомоморфні образи елементів $b$ і $v$ над канонічним відображенням $R\to R/aR$, де $b$ − прообраз елемента $\overline{b}\in R/aR$ за канонічного гомоморфізму $R\to R/aR$.

Якщо $aR+bR=dR\neq R$, тоді існують такі елементи $u,v,a_0,b_0\in R$, що $au+bv=d$, $a=da_0$ і $b=db_0$. Отже, $\overline{b}\overline{a_0}=\overline{0}$, більше того, $\overline{a_0}\neq\overline{0}$. Твердження доведено.

**Теорема 3.** Нехай $R$ − дуо-область Безу і нехай елемент $a$ є таким адекватним справа елементом області $R$, що $2R+aR=R$. Тоді фактор-кільце $R/aR$ є $2$-добрим кільцем.

Д о в е д е н н я. Спочатку доведемо, що $R/aR$ є чистим кільцем. Для цього, згідно з теоремою 1, достатньо довести, що $R/aR$ є кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1. Позначимо $\overline{R}=R/aR$. Нехай $\overline{bR}+\overline{cR}=\overline{R}$. Тоді $aR+bR+cR=R$, де $b$ і $c$ − прообрази елементів $\overline{b}$, $\overline{c}\in\overline{R}$ за канонічного гомоморфізму $R\to R/aR$. Оскільки $a$ є адекватним справа елементом області $R$, то для довільного елемента $b\in R$ існують такі елементи $r,s\in R$, що $a=r\cdot s$, $rR+bR=R$, і для довільного такого елемента $s'\in R$, що $sR\subset s'R\neq R$, виконується умова $s'R+bR\neq R$. Оскільки $rR+sR=R$, то існують такі елементи $u,v\in R$, що $ru+sv=1$.

Оскільки $R$ є дуо-кільцем, тому $us = su'$ для деякого елемента $u' \in R.$ В результаті отримаємо:

$$(ru)^2 - ru = ru(ru-1) = ru(-sv) = -rusv = -rsu'v = a(-u'v) \in aR\,.$$

Отже, образ елемента $ru$ за канонічного гомоморфізму $R \to R/aR$ є ідемпотентом.

Далі доведемо, що $aR + (b+cru)R = R.$ Припустимо, що $aR + (b+cru)R = = hR \neq R.$ Оскільки $aR \subset hR,$ тоді $hR + rR = tR \neq R$ або $hR + sR = \alpha R \neq R.$ Припустимо, що $hR + rR = tR \neq R.$ Оскільки $(b+cru)R \subset hR,$ отримаємо, що $bR \subset hR.$ Це неможливо, оскільки $rR + bR = R.$ Якщо $hR + sR = \alpha R \neq R,$ згідно з означенням адекватного справа елемента $a$ отримаємо, що $\alpha R + bR = kR \neq R.$ Звідси випливає, що $cruR \subset hR.$ Оскільки $ru + sv = 1$ і $kR \subset sR,$ то $cR \subset kR$, що неможливо, оскільки $aR + bR + cR = R.$

У результаті одержали, що $aR + (b+cru)R = R.$ Тобто $\overline{R}$ є кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1, а тому – чистим кільцем. Оскільки $2R + aR = R,$ то згідно з твердженням 1 можна дійти висновку, що $\overline{2}$ є оборотним елементом в $\overline{R}$. Згідно з працею [1] $\overline{R}$ є 2-добрим кільцем.

***Означення 12.*** Кільце $R$ називають майже 2-добрим кільцем, якщо для деякого такого ненульового необоротного елемента $a \in R,$ що $2R + aR = R,$ кільце $R/aR$ є 2-добрим кільцем.

Згідно з теоремою 2, адекватна справа область є прикладом майже 2-доброго кільця. Тому справедлива така теорема:

**Теорема 4.** Адекватна справа область є майже 2-добрим кільцем.


1. *Camillo V. P., Yu H. P.* Exchange rings, units and idempotents // Commun. Algebra. – 1994. – **22**, No. 12. – P. 4737–4749. – https://doi.org/10.1080/00927879408825098
2. *Chen H.* Rings with many idempotents // Int. J. Math. Math. Sci. – 1999. – **22**, No. 3. – P. 547–558. – https://doi.org/10.1155/S0161171299225471
3. *Ehrlich G.* Unit-regular rings // Portugal. Math. – 1968. – **27**, No. 4. – P. 209–212.
4. *Goodearl K. R., Menal P.* Stable range one for rings with many units // J. Pure Appl. Algebra – 1988. – **54**, No. 2-3. – P. 261–287. – https://doi.org/10.1016/0022-4049(88)90034-5
5. Helmer O. The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**, No. 4. – P. 225–236.
6. *Lam T. Y.* Serre's Conjecture. – Berlin: Springer, 1978. – 227 p.
7. *Larsen M., Lewis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely present modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **187**. – P. 231–248.
8. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – **229**. – P. 269–278. – https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1977-0439876-2
9. *Vámos P.* 2-good rings // Quart. J. Math. – 2005. – **56**, No. 3. – P. 417–430. – https://doi.org/10.1093/qmath/hah046
10. *Васюник І. С., Забавський Б. В.* Кільця майже одиничного стабільного рангу 1 // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 6. – С. 840–843.
    Те саме: *Vasyunyk I. S., Zabavsky B. V.* Rings of almost unit stable rank 1 // Ukr. Math. J. – 2001. – **63**, No. 6. – P. 977–980.
    – https://doi.org/10.1007/s11253-011-0557-1


## СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОБРАТИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ИДЕМПОТЕНТОВ В ДУО-КОЛЬЦАХ


*Элемент кольца $R$ называют чистым (соответственно единично-регулярным), если он является суммой (соответственно произведением) обратимого элемента и идемпотента. Известно, что все элементы в кольце $R$ являются чистыми, если все они единично-регулярны. Исследованы некоторые классы единично-регулярных и чистых матриц над дуо-кольцом. Показано, что правая адекватная дуо-область является почти 2-хорошим кольцом.*



***Ключевые слова***: *чистый элемент, чистое кольцо, дуо-кольцо, идемпотентный стабильный ранг 1.*

## SUMS AND PRODUCTS OF UNITS AND IDEMPOTENTS IN DUO RINGS

*An element in a ring* $R$ *is said to be clean (respectively unit-regular) if it is a sum (respectively product) of an invertible element and an idempotent. It is known that all elements in* $R$ *are clean, if all of them are unit-regular. We study some classes of unit-regular and clean matrices over a duo ring. It is shown that a right adequate duo domain is almost 2-good ring.*

***Key words:*** *clean element, clean ring, duo ring, idempotent stable range 1.*

[1] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів
[2] Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

Одержано
10.12.19