УДК 512.546

Н. М. Пирч[✉]

ПРО ІЗОМОРФНУ КЛАСИФІКАЦІЮ ВІЛЬНИХ ТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП НЕТИХОНОВСЬКИХ ПРОСТОРІВ

Запропоновано метод зведення ізоморфної класифікації вільних топологічних груп над цілком регулярними просторами до ізоморфної класифікації вільних топологічних груп над тихоновськими просторами.

Ключові слова: *вільна топологічна група, M-еквівалентність, T_0-рефлексія.*

Вступ. У праці [12] введено модифікацію поняття вільної топологічної групи, яка дає можливість будувати вільні групи для довільних топологічних просторів без обмеження тихоновськими просторами.

Означення **1.** Нехай X − топологічний простір. Вільною топологічною групою (в сенсі Маркова) простору X називають пару, що складається з топологічної групи $F(X)$ та такого неперервного відображення $\eta_X : X \to F(X)$, що для довільного неперервного відображення $f : X \to G$ з топологічного простору X у топологічну групу G існує такий неперервний гомоморфізм $f^* : F(X) \to G$, що $f = f^* \circ \eta_X$.

Для кожного топологічного простору X існує вільна топологічна група $F(X)$, яка для тихоновського простору X збігається з означенням вільної топологічної групи, запропонованої Марковим [3]. Відображення η_X є вкладенням тоді і тільки тоді, коли простір X є цілком регулярним, і замкненим вкладенням тоді і тільки тоді, коли простір X є тихоновським. Якщо в означенні 1 замінити словосполучення «топологічна група» на «абелева топологічна група», то отримаємо означення вільної абелевої топологічної групи $A(X)$.

Топологічні простори X та Y називають M-еквівалентними, якщо топологічні групи $F(X)$ та $F(Y)$ є топологічно ізоморфними ($X \overset{M}{\sim} Y$). Якщо ж вільні абелеві топологічні групи $A(X)$ та $A(Y)$ є топологічно ізоморфними, то простори X та Y називають A-еквівалентними (позн. $X \overset{A}{\sim} Y$). Ізоморфізми вільних топологічних груп над тихоновськими просторами вивчали багато авторів (див. [4], [9] та огляд у [7]). У цьому дослідженні спробуємо розширити клас просторів, для яких ви поняття M-еквівалентності. Акцентуємо увагу на цілком регулярних просторах, оскільки саме для них відображення $\eta_X : X \to F(X)$ є вкладенням і саме цей факт зумовлює те, що багато результатів, встановлених для тихоновських просторів, перенесено на клас цілком регулярних просторів. Інший факт, який викликає інтерес до вивчення M-еквівалентності саме для цілком регулярних просторів є твердження, що для довільного топологічного простору X вільна топологічна група $F(X)$ є природно топологічно ізоморфною вільній топологічній групі $F\left(\eta_X(X)\right)$ цілком регулярного простору $\eta_X(X)$. Іншими словами, вивчення ізоморфної класифікації вільних топологічних груп над топологічними просторами зводиться до аналогічної задачі для класу цілком регулярних просторів.

Встановимо властивості вільних груп цілком регулярних просторів, аналоги яких встановлені для тихоновських просторів.

✉ pnazar@ukr.net

У третьому розділі доведемо основні результати даної роботи, за якими можна звести задачу ізоморфної класифікації вільних топологічних груп та вільних абелевих топологічних груп над цілком регулярними просторами до аналогічної над тихоновськими просторами.

2. Властивості вільних топологічних груп цілком регулярних просторів.

Твердження 1. Нехай X – цілком регулярний простір. Тоді такі умови еквівалентні:

1) X є T_0-простором;

2) $F(X)$ є T_0--простором;

3) $A(X)$ є T_0-простором.

Д о в е д е н н я . Імплікації ($2 \Rightarrow 1$) та ($3 \Rightarrow 1$) випливають з того, що підпростір T_0-простору є T_0-простором. Щоб довести ці імплікації зауважимо, що кожен цілком регулярний T_0-простір є тихоновським, а вільна (абелева) топологічна група тихоновського простору є тихоновським простором. ◊

Наслідок 1. Властивість бути T_0-простором зберігається відношенням A-еквівалентності у класі цілком регулярних просторів.

Якщо врахувати той факт, що для кожного цілком регулярного простору відображення η_X є вкладенням, то на випадок цілком регулярних просторів, легко переноситься ряд тверджень, встановлених раніше для тихоновських просторів.

Скажемо, що ізоморфізм $i : F(X) \to F(Y)$ є спеціальним, якщо композиція $e_Y{}^* \circ i$ є постійним відображенням, де $e_Y{}^* : F(Y) \to R$ – гомоморфізм, що продовжує функцію $e_Y : Y \to R$, яка тотожно рівна 1 на Y.

Твердження 2 [4]. Нехай X, Y – цілком регулярні топологічні простори, $X^M\!\sim Y$. Тоді існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i : F(X) \to F(Y)$.

Твердження 3 [2]. Нехай $f : X \to Y$ – факторне відображення цілком регулярних просторів, тоді гомоморфізм $f^* : F(X) \to F(Y)$, що продовжує відображення f, є відкритим.

Відображення $f : X_1 \to Y_1$ і $g : X_2 \to Y_2$ називають M-еквівалентними, якщо існують такі топологічні ізоморфізми $i : F(X_1) \to F(X_2)$ і $j : F(Y_1) \to F(Y_2)$, що $j \circ f^* = g^* \circ i$, де $f^* : F(X_1) \to F(Y_1)$ і $f^* : F(X_2) \to F(Y_2)$ – гомоморфізми, що продовжують відображення f і g відповідно (позн. $f \overset{M}{\sim} g$).

Наступні два твердження, встановлені в [9] для тихоновських просторів, можна легко узагальнити для цілком регулярних просторів.

Твердження 4. Нехай $p_i : X_i \to Y_i$, ($i = 1,2$) – факторні відображення цілком регулярних просторів, $p_i{}^* : F(X_i) \to F(Y_i)$ – їхні гомоморфні продовження. Якщо існує такий топологічний ізоморфізм $i : F(X_1) \to F(X_2)$, що $i\left(\ker p_1^*\right) = \ker p_2^*$, тоді відображення p_1 і p_2 M-еквівалентні.

Нагадаємо, що ретракції $r_i : X \to K_i$ топологічного простору X називають паралельними, якщо $r_1 \circ r_2 = r_1$ і $r_2 \circ r_1 = r_2$. Образи простору за паралельних ретракцій називають паралельними ретрактами простору X.

Твердження 5. Нехай K_1 і K_2 – паралельні ретракти цілком регулярного простору X, $Y_1 = X / K_1$, $Y_2 = X / K_2$ – R-факторні простори, $p_1 : X \to Y_1$, $p_2 : X \to Y_2$ – R-факторні відображення. Тоді відображення p_1 і p_2 є

M-еквівалентні. Зокрема, простори Y_1 і Y_2 є M-еквівалентними.

Твердження 6. Нехай X − топологічний простір, тоді вільна тополо-топологічна група простору X є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі цілком регулярного простору $\eta_X(X)$.

Д о в е д е н н я . Нехай $f:\eta_X(X)\to G$ − неперервне відображення з топологічного простору $\eta_X(X)$ у топологічну групу G. Тоді відображення $f\circ\eta_X$ є неперервним, а отже, за означенням вільної топологічної групи існує такий єдиний гомоморфізм $f^*:F(\eta_X(X))\to G$, що $f=f^*\circ\eta_X$. За єдиністю вільної топологічної групи отримаємо, що $F(X)$ є вільною топологічною групою простору $\eta_X(X)$. ◊

Аналогічно доводимо наступне твердження.

Твердження 7. Нехай X − топологічний простір, тоді вільна абелева топологічна група простору X є топологічно ізоморфною вільній абелевій топологічній групі цілком регулярного простору $\eta_X(X)$.

Підпростір Y топологічного простору X називають G-ретрактом топологічного простору X, якщо кожне неперервне відображення з топологічного простору Y у топологічну групу G неперервно продовжується на X.

Твердження 8. Нехай підпростір Y є G-ретрактом топологічного простору X. Тоді підгрупа вільної топологічної групи $F(X)$, породжена множиною $\eta_X(Y)$, є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі $F(Y)$, а відображення $\eta_X|_Y: Y\to\eta_X(Y)$ топологічно еквівалентне відображенню η_Y.

Д о в е д е н н я . Нехай підпростір Y є G-ретрактом простору X. Нехай також $f:Y\to G$ − неперервне відображення з топологічного Y простору у топологічну групу G. Тоді існує таке неперервне відображення $h:X\to G$, що $h|_Y=f$. За означенням вільної топологічної групи існує такий гомоморфізм $h^*:F(X)\to G$ групи $F(X)$ у групу G, що $h=h^*\eta_X$. Нехай $G(\eta_X(Y))$ − підгрупа топологічної групи $F(X)$, породжена множиною $\eta_X(Y)$. Покладемо $f^*=h^*|_{G(\eta_X(Y))}$. Таким чином, для кожного неперервного відображення $f:Y\to G$ з топологічного простору Y у топологічну групу G існує такий неперервний гомоморфізм $f^*=G(\eta_X(Y))\to G$, що $f^*\circ\eta_X(Y)=f$. За єдиністю вільної топологічної групи отримаємо, що пара $(G(\eta_X(Y)),\eta_X(Y))$ є вільною топологічною групою простору Y. ◊

Твердження 9 [7]. Якщо X та Y − цілком регулярні простори і $X\overset{M}{\sim}Y$, то $X\overset{A}{\sim}Y$.

***Означення* 2** [8]. Нехай (X,p) − топологічний простір з відміченою точкою. Вільною топологічною групою простору X (в сенсі Граєва) називають пару, що складається з топологічної групи $FG(X,p)$ та такого неперервного відображення $\mu_X:X\to FG(X,e)$, що $\mu(p)=e$, і для довільного неперевного відображення $f:X\to G$ з топологічного простору X у топологічну групу G, такого, що $\mu(p)=e_G$, існує такий неперервний гомоморфізм $f^*:FG(X)\to G$, що $f=f^*\circ\mu_X$.

Встановлено [8], що для кожного топологічного простору X існує вільна топологічна група в сенсі Граєва $FG(X)$, яка з точністю до топологічного ізоморфізму не залежить від вибору відміченої точки $e \in X$. Влас-Властивості відображення $\mu_X : X \to FG(X)$ є такі ж, як і η_X для вільної топологічної групи в сенсі Маркова.

Наступну теорему, встановлену у праці [5], легко перенести на цілком регулярні простори.

Твердження 10. Для цілком регулярних просторів X та Y наступні умови еквівалентні:

1) вільні абелеві топологічні групи в сенсі Маркова просторів X та Y топологічно ізоморфні,

2) для довільних точок $a \in X$, $b \in Y$ існує такий спеціальний топологічний ізоморфізм $h : A(X) \to A(Y)$, що $h(a) = b$,

3) вільні абелеві топологічні групи в сенсі Граєва просторів X та Y топологічно ізоморфні.

Для топологічних груп G_1 і G_2 позначимо через $G_1 \times G_2$ декартовий добуток груп G_1 і G_2, через $G_1 * G_2$ − вільний топологічний добуток груп G_1 і G_2.

Твердження 11. Нехай X та Y − цілком регулярні простори. Тоді:

1) $F(X \oplus Y) \approx F(X) * F(Y)$;

2) $A(X \oplus Y) \approx A(X) \times A(Y)$;

3) $FG(X \vee Y) \approx FG(X) * FG(Y)$;

4) $AG(X \vee Y) \approx AG(X) \times AG(Y)$;

5) $F(X \vee Y) \approx F(X) * FG(Y) \approx FG(X) * F(Y)$;

6) $A(X \vee Y) \approx A(X) \times AG(Y) \approx AG(X) \times A(Y)$.

Д о в е д е н н я аналогічне доведенню з праці [5].

Приклад 1. Покажемо, що вільна (абелева) топологічна група в сенсі Граєва антидискретного простору має антидискретну топологію. Нехай $A = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ − деяке слово в $FG(X)$. Нехай U − відкрита в $FG(X)$ множина, що містить e. Тоді U містить $x_1^{\varepsilon_1}$. Оскільки елементи e та x_2 не відокремлюються відкритими множинами, то за однорідністю топологічної групи отримаємо, що елементи $x_1^{\varepsilon_1} \cdot e$ та $x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2}$ не відокремлюються відкритими множинами в $FG(X)$, звідки $x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2} \in U$. Використавши метод математичної індукції, отримаємо, що $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \in U$.

Лема 1. Нехай X та Y − довільні топологічні простори. Тоді простір $\eta_{X \oplus Y}(X \oplus Y)$ природно гомеоморфний простору $\eta_X(X) \oplus \eta_Y(Y)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки кожний топологічний простір допускає ущільнення в антидискретну топологічну групу, то відображення η_X для кожного топологічного простору X є ущільненням. Нехай $f : X \oplus Y \to Z_2$ − таке відображення з топологічного простору $X \oplus Y$ у дискретну топологічну групу $Z_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$, що $f|_X = \overline{0}$, $f|_Y = \overline{1}$. За означенням вільної топологічної групи існує такий неперервний гомоморфізм $f^* : F(X \oplus Y) \to Z_2$, що $f = f^* \circ \eta_{X \oplus Y}$. Таким чином, підпростори $\eta_{X \oplus Y}(X)$ та $\eta_{X \oplus Y}(Y)$ є відкрито-замкненими в $\eta_{X \oplus Y}(X \oplus Y)$.

Розглянемо підгрупу S в $F(X \oplus Y)$, породжену множиною $\eta_{X\oplus Y}(X)$. Нехай $f: X \to G$ − неперервне відображення з топологічного простору X у топологічну групу G. Нехай $h: X \oplus Y \to G$ − неперервне продовження відображення f. Тоді існує такий гомоморфізм $h^*: F(X \oplus Y) \to G$, що $h = h^* \circ \eta_{X\oplus Y}$. За єдиністю вільної топологічної групи, отримаємо, що пара $(S, \eta_{X\oplus Y}|_X)$ є вільною топологічною групою простору X. Звідси, $\eta_{X\oplus Y}|_X = \eta_X$. ◊

Наслідок 2. Нехай X_1, X_2, Y_1, Y_2 − довільні топологічні простори. Якщо $X_1 \overset{M}{\sim} Y_1$, $X_2 \overset{M}{\sim} Y_2$, то $X_1 \oplus X_2 \overset{M}{\sim} Y_1 \oplus Y_2$.

Д о в е д е н н я. Для цілком регулярних просторів твердження випливає з твердження 11. Для довільних топологічних просторів доведення отримують з урахуванням леми 1. ◊

3. T_0-рефлексія та ізоморфізми вільних топологічних груп.

Розглянемо відношення еквівалентності на топологічному просторі X, покладаючи $x \sim y$ тоді і тільки тоді, коли точки x та y не відокремлюються відкритими в X множинами. Позначимо фактор-простір $X/\sim$ через T_0X, а через $T_X: X \to T_0X$ − факторне відображення. У кожному класі еквівалентності відношення ~ на X виберемо по одній точці і утворимо з них множину X_1. Як встановлено раніше [9], простір X_1 не залежить від вибраних точок і є гомеоморфним простору T_0X. Фактор-простір X / X_1 є антидискретним і не залежить від вибраних точок, позначимо його X / T_0X. Зіставлення $X \mapsto T_0X$ задає функтор з категорії топологічних просторів та їхніх неперервних відображень у категорію T_0-просторів та їхніх неперервних відображень. Факторне відображення $T_X: X \to T_0X$ має праве обернене. Іншими словами, простір X_1 є ретрактом простору X.

Теорема 1. Нехай X та Y − M-еквівалентні цілком регулярні простори. Тоді факторні відображення $T_X: X \to T_0X$ та $T_Y: Y \to T_0Y$ є M-еквівалентними. Зокрема, рефлексії T_0X і T_0Y є M-еквівалентними просторами.

Д о в е д е н н я. Нехай $i: F(X) \to F(Y)$ − топологічний ізоморфізм, $T_X: X \to T_0X$, $T_Y: Y \to T_0Y$ − факторні відображення, $T_X^*: F(X) \to F(T_0X)$, $T_Y^*: F(Y) \to F(T_0Y)$ − їхні гомоморфні продовження. Побудуємо таке неперервне відображення $h: T_0X \to F(T_0Y)$, що $h \circ T_X = i \circ T_Y^*$. Для кожного $x \in T_0X$ такого, що $T_X(x_1) = x$, покладемо $j(x) = T_Y^*(i(x_1))$. Покажемо, що це означення коректне. Нехай $x_2 \neq x_1$ і $T_X(x_2) = x$. Тоді $f(x_1) = f(x_2)$ для кожного неперервного відображення $f: X \to Z$, де простір Z є T_0-простором. Оскільки простір T_0Y є T_0-простором, то за твердженням 1 $F(T_0Y)$ є T_0-простором, а отже, $i \circ T_Y^*(x_1) = i \circ T_Y^*(x_2)$. Неперервність відображення h випливає з неперервності відображень i та T_Y^* і факторності відображення T_X. Аналогічно означимо таке неперервне відображення $g: T_0Y \to F(T_0X)$, що $g \circ T_Y^* = i^{-1} \circ T_X^*$. Продовжимо відображення h та g до неперервних гомоморфізмів $h^*: F(T_0X) \to F(T_0Y)$ і $g^*: F(T_0Y) \to F(T_0X)$. Оскільки

$T_X^* \circ i^{-1} \circ i = g^* \circ h^* \circ T_X^*$, то $g^* \circ h^* = 1_{F(T_0X)}$. Аналогічно доведемо, що $h^* \circ g^* = 1_{F(T_0Y)}$. Отже, $f^* : F(T_0X) \to F(T_0Y)$ – топологічний ізоморфізм, а відображення T_X та T_Y є M-еквівалентними. ◊

Аналогічно доведемо наступну теорему.

Теорема 2. Нехай X та Y – A-еквівалентні цілком регулярні простори. Тоді факторні відображення $T_X : X \to T_0X$ та $T_Y : Y \to T_0Y$ є A-еквівалентними. Зокрема, рефлексії T_0X і T_0Y є A-еквівалентними просторами.

Нехай (X, x_0) та (Y, y_0) – топологічні простори з відміченими точками. Фактор-простір $(X \oplus Y) / \{x_0, y_0\}$ називають букетом топологічних просторів з відміченими точками (X, x_0) та (Y, y_0) і позначають $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$. Встановлено [6], що букет $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ не залежить з точністю до M-еквівалентності від відмічених точок, тому іноді писатимемо скорочено $X \vee Y$.

Твердження 12. Нехай X – топологічний простір. Тоді $X \overset{M}{\sim} T_0X \vee (X / T_0X)$.

Д о в е д е н н я . Нехай $r : X \to T_0X$ – ретракція, $h : T_0X \to T_0X$ – гомеоморфізм, $a \in T_0X$. Розглянемо букет $Z = T_0X \vee X = (X \oplus T_0X) / \{a, h(a)\}$ і відображення $r_2 = h \circ r_1$. Тоді r_1 і r_2 є паралельними ретракціями простору $Z = T_0X \vee X$. Встановлено [9], що $I \circ I = 1_{F(X)}$, а тому за твердженням 5 отримаємо, що $X = Z / T_0X \overset{M}{\sim} T_0X \vee (X / T_0X)$. ◊

Зауважимо, що топологічний простір X є цілком регулярним (псевдометризованим) тоді і тільки тоді, коли простір T_0X є тихоновським (метризованим).

Наслідок 3. 1) Кожен топологічний простір є M-еквівалентним букету T_0-простору та антидискретного просторів.

2) Кожен цілком регулярний простір є M-еквівалентним букету тихоновського та антидискретного просторів.

3) Кожен псевдометризований простір є M-еквівалентним букету метризованого та антидискретного просторів.

Теорема 3. Цілком регулярні простори X та Y є A-еквівалентними тоді і тільки тоді, коли $T_0X \overset{A}{\sim} T_0Y$ і $|X / T_0X| = |Y / T_0Y|$.

Д о в е д е н н я . *Необхідність*:

$$A(X) \approx A\big(T_0X \vee (X / T_0X)\big) \approx A(T_0X) \times AG(X / T_0X) \approx$$

$$\approx A(T_0Y) \times AG(Y / T_0Y) \approx A\big(T_0Y \vee (X / T_0Y)\big) \approx A(Y).$$

Достатність. Нехай X та Y – A-еквівалентні простори. З теореми 1 випливає, що $T_0X \overset{A}{\sim} T_0Y$, а з теореми 2, – що факторні відображення $T_X : X \to T_0X$ і $T_Y : Y \to T_0Y$ є A-еквівалентними, так як $\ker T_X^*$ є алгебрично вільною абелевою групою з множиною твірних потужності $|X / T_0X|$, то $|X / T_0X| = |Y / T_0Y|$. ◊

Теорема 4. Цілком регулярні простори X та Y є M-еквівалентними тоді і тільки тоді, коли $T_0X \overset{M}{\sim} T_0Y$ і $|X / T_0X| = |Y / T_0Y|$.

Д о в е д е н н я . *Необхідність*:

$$F(X) \approx F\left(T_0X \vee \left(X / T_0X\right)\right) \approx F\left(T_0X\right) * FG\left(X / T_0X\right) \approx$$

$$\approx F\left(T_0Y\right) * FG\left(Y / T_0Y\right) \approx F\left(T_0Y \vee \left(X / T_0Y\right)\right) \approx F(Y).$$

Доведемо *достатність*. Нехай X та Y – M-еквівалентні простори. Тоді за теоремою 1 отримаємо $T_0X \overset{M}{\sim} T_0Y$. З того, що $X \overset{M}{\sim} Y$, випливає $X \overset{A}{\sim} Y$, а тому за теоремою 3 маємо: $\left|X / T_0X\right| = \left|Y / T_0Y\right|$. ◊

Твердження 13. Нехай P – топологічна властивість, яка зберігається відношенням M-еквівалентності у класі тихоновських просторів, а простори X і T_0X володіють властивістю P одночасно. Тоді властивість P зберігається відношенням M-еквівалентності у класі цілком регулярних просторів.

Наслідок 4. Наступні властивості зберігаються відношенням M-еквівалентності у класі цілком регулярних просторів: компактність, зв'язність, щільність, бути P-простором, сіткова вага.

Скажімо, що топологічний простір (X, τ) має топологію розбиття, якщо топологія цього простору породжена деяким розбиттям множини X. Кожен топологічний простір з топологією розбиття є дискретною сумою своїх антидискретних просторів. Іншими словами, топологічний простір X має топологію розбиття тоді і тільки тоді, коли простір T_0X є дискретним. Для топологічного простору X через $F_p(X)$ та $A_p(X)$ позначимо вільну паратопологічну та вільну абелеву паратопологічну групи над X.

Твердження 14. Для топологічного простору X з топологією розбиття топологія вільної топологічної групи $F(X)$ збігається з топологією вільної паратопологічної групи $F_p(X)$.

Д о в е д е н н я . Як встановлено раніше [10], вільна паратопологічна група $F_p(X)$ над простором розбиття X є топологічною. Таким чином, X є підпростором топологічної групи $F_p(X)$, алгебрично породжує цю групу і має таку властивість, що довільне неперервне відображення з X у топологічну групу G неперервно продовжується на $F_p(X)$. За єдиністю вільної топологічної групи отримаємо, що $F_p(X)$ є вільною топологічною групою простору X. ◊

Аналогічно доведемо наступне твердження.

Твердження 15. Для топологічного простору X з топологією розбиття топологія вільної абелевої топологічної групи $A(X)$ збігається з топологією вільної абелевої паратопологічної групи $A_p(X)$.

Твердження 16. Для топологічних просторів X та Y з топологіями розбиття наступні умови є еквівалентними:

1) вільні топологічні групи $F(X)$ та $F(Y)$ є топологічно ізоморфними;

2) вільні абелеві топологічні групи $A(X)$ та $A(Y)$ є топологічно ізоморфними;

3) вільні паратопологічні групи $F_p(X)$ та $F_p(Y)$ є топологічно ізоморфними;

4) вільні абелеві паратопологічні групи $A_p(X)$ та $A_p(Y)$ є топологічно ізоморфними;

5) $\left|T_0X\right| = \left|T_0Y\right|$ і $\left|X / T_0X\right| = \left|Y / T_0Y\right|$.

Д о в е д е н н я випливає з того, що простори T_0X та T_0Y є дискретними. ◊

Наслідок 5. Для скінченних топологічних просторів X та Y з топологіями розбиття наступні умови є еквівалентними:

1) вільні топологічні групи $F(X)$ та $F(Y)$ є топологічно ізоморфними;

2) вільні абелеві топологічні групи $A(X)$ та $A(Y)$ є топологічно ізоізоморфними;

3) $|T_0X| = |T_0Y|$ і $|X| = |Y|$.

Д о в е д е н н я випливає з твердження 16 і того факту, що $|X| = |T_0X| + |X / T_0X| - 1$.

Лема 2. Кожен скінченний зв'язний цілком регулярний топологічний простір має антидискретну топологію.

Д о в е д е н н я . Нехай X − скінченний зв'язний топологічний простір, U – нетривіальна замкнена підмножина в X, $x_0 \in X \setminus U$. Тоді існує така дійснозначна функція $f : X \to R$, що $f(x_0) = 0$, $f(U) = 1$. Зокрема, неперервним є відображення $f : X \to f(X)$. Оскільки множина $\{0\} \in f(X)$ є відкрито-замкненою в X, то її прообраз $f^{-1}(\{0\})$ є нетривіальною відкрито-замкненою підмножиною в X, що суперечить зв'язності цього простору. ◊

Твердження 17. Нехай X − скінченний топологічний простір, $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n$, причому всі підпростори X_i є зв'язними. Тоді $\eta_X(X_i)$ є антидискретним простором потужності $|X_i|$, а простір $\eta_X(X)$ − дискретна сума своїх антидискретних підпросторів $\eta_X(X_i)$.

Д о в е д е н н я . За лемою 2 усі підпростори $\eta_X(X_i)$ є антидискретними. Розглянемо топологічну групу G, яка є добутком топологічної групи цілих чисел з дискретною топологією та топологічної групи цілих чисел з антидискретною топологією. Тоді існує вкладення $f : X \to G$, а отже, за означенням вільної топологічної групи, існує такий гомоморфізм $f^* : F(X) \to G$, що $f^* \circ \eta_X = f$. А тому $|\eta_X(X_i)| = |X_i|$, а всі підпростори $\eta_X(X_i)$ є відкрито-замкненими у $\eta_X(X)$. ◊

Для топологічного простору X позначимо через $\mathrm{con}(X)$ простір компонент простору X з фактор-топологією простору X. З твердження 17 та наслідку 5 випливає.

Теорема 5. Нехай X та Y − скінченні топологічні простори. Тоді наступні умови еквівалентні:

1) вільні топологічні групи $F(X)$ та $F(Y)$ є топологічно ізоморфними;

2) вільні абелеві топологічні групи $A(X)$ та $A(Y)$ є топологічно ізоморфними;

3) $|X| = |Y|$ і $|\mathrm{con}(X)| = |\mathrm{con}(Y)|$.

Наслідок 6. Нехай X та Y − скінченні топологічні простори. Тоді наступні умови еквівалентнимі:

1) $X \overset{M}{\sim} Y$;

2) $X^n \overset{M}{\sim} Y^n$ для всіх $n \in N$;

3) $X^n \overset{M}{\sim} Y^n$ для деякого $n \in N$.

Теорема 6. Нехай X та Y − довільні топологічні простори, Z − скінченний топологічний простір. Якщо $X \oplus Z \overset{A}{\sim} Y \oplus Z$, то $X \overset{A}{\sim} Y$.

Для доведення теореми потрібні декілька допоміжних лем.

Лема 3. Нехай X та Y – довільні цілком регулярні простори, Z – скінченний топологічний простір. Якщо $X \oplus Z \overset{A}{\sim} Y \oplus Z$, то $X \overset{A}{\sim} Y$.

Д о в е д е н н я. Нехай $X^+ \overset{A}{\sim} Y^+$. Тоді за твердженням 10 $AG\left(X^+\right) \approx AG\left(Y^+\right)$.

Отже, $A(X) \approx AG\left(X^+\right) \approx AG\left(Y^+\right) \approx A(Y)$, тобто $X \overset{A}{\sim} Y$. Нехай $X \oplus Z \overset{A}{\sim} Y \oplus Z$. Повторивши вищезгадані міркування $|Z|$ разів, отримаємо, що $X \overset{A}{\sim} Y$. ◊

Лема 4. Нехай X та Y – довільні цілком регулярні простори, Z – скінченний антидискретний топологічний простір. Якщо $X \oplus Z \overset{A}{\sim} Y \oplus Z$, то $X \overset{A}{\sim} Y$.

Д о в е д е н н я. Очевидно, що

$$T_0(X \oplus Z) = X^+, \ \left|(X \oplus Z) / T_0 (X \oplus Z)\right| = |X / T_0 X| - |Z| - 1.$$

З того, що $X \oplus Z \overset{A}{\sim} Y \oplus Z$ випливає, що $T_0(X \oplus Z) \overset{A}{\sim} T_0(Y \oplus Z)$, тобто $T_0 X^+ \overset{A}{\sim} T_0 Y^+$. Звідки за лемою 3 маємо, що $T_0 X \overset{A}{\sim} T_0 Y$.

Оскільки $X \oplus Z \overset{A}{\sim} Y \oplus Z$, то

$$\left|(X \oplus Z) / T_0 (X \oplus Z)\right| = \left|(Y \oplus Z) / T_0 (Y \oplus Z)\right|,$$

тобто $|X / T_0 X| - |Z| - 1 = |Y / T_0 Y| - |Z| - 1$. Таким чином, $|X / T_0 X| = |Y / T_0 Y|$.

З того, що $T_0 X \overset{A}{\sim} T_0 Y$ і $|X / T_0 X| = |Y / T_0 Y|$, а також із теореми 3 випливає, що $X \overset{A}{\sim} Y$. ◊

Д о в е д е н н я теореми 6. Нехай $X \oplus Z \overset{A}{\sim} Y \oplus Z$. За лемою 1 простір $\eta_{X \oplus Z}(X \oplus Z)$ природно гомеморфний простору $\eta_X(X) \oplus \eta_Z(Z)$. Отже, за твердженням 6 вільна топологічна группа простору $X \oplus Z$ є топологічно ізоморфна вільній топологічній групі простору $\eta_X(X) \oplus \eta_Z(Z)$. За твердженням 17 простір $\eta_Z(Z)$ має топологію розбиття, а отже, є M-еквівалентним прямій сумі $AD_n \oplus D_m$ скінченних антидискретного та дискретного просторів. За наслідком 2 отримаємо, що умова $X \oplus Z \overset{A}{\sim} Y \oplus Z$ еквівалентна умові $X \oplus AD_n \oplus D_m \overset{A}{\sim} Y \oplus AD_n \oplus D_m$. За лемою 3 одержимо, що $X \oplus AD_n \overset{A}{\sim} Y \oplus AD_n$, звідки за лемою 4 маємо, що $X \oplus Z \overset{A}{\sim} Y \oplus Z$. ◊

Наслідок 7. Нехай X та Y – довільні топологічні простори, Z – скінченний топологічний простір. Якщо $X \vee Z \overset{A}{\sim} Y \vee Z$, то $X \overset{A}{\sim} Y$.

Д о в е д е н н я. Нехай $X \vee Z \overset{A}{\sim} Y \vee Z$. Тоді $(X \vee Z)^+ \overset{A}{\sim} (Y \vee Z)^+$. Оскільки $(X \vee Z)^+ \overset{A}{\sim} X \oplus Z$ і $(Y \vee Z)^+ \overset{A}{\sim} Y \oplus Z$, то $X \oplus Z \overset{A}{\sim} Y \oplus Z$. Звідки за теоремою 6 отримаємо, що $X \overset{A}{\sim} Y$. ◊

Твердження 18. Нехай X та Y – довільні тихоновські простори, Z – антидискретний простір. Тоді $X \otimes Z \overset{M}{\sim} Y \otimes Z$ тоді і тільки тоді, коли $X \overset{M}{\sim} Y$.

Д о в е д е н н я. *Необхідність* випливає теореми 4, якщо врахувати, що $T_0(X \otimes Z) = X$, $T_0(Y \otimes Z) = Y$ і

$$\left|(X \times Z) / T_0(X \times Z)\right| = \left|(X \times Z) / T_0(X \times \{z_0\})\right| = |X| \times (|Z| - 1) + 1 =$$

$$= |Y| \times (|Z| - 1) + 1 = \left|(Y \times Z) / T_0(Y \times \{z_0\})\right| = \left|(Y \times Z) / T_0(Y \times Z)\right|.$$

Достатність випливає з теореми 4, якщо врахувати, що $T_0(X \times Z) = X$ і $T_0(Y \times Z) = Y$. ◊

Твердження 19. Нехай X – довільний нескінченний цілком регулярний простір, $n, m \geq 2$ – довільні натуральні числа, AD_n, AD_m – антидискретні простори потужності n та m відповідно. Тоді $X \times AD_n \overset{M}{\sim} X \times AD_m$.

Д о в е д е н н я. $\left|X \times AD_n / T_0(X \times AD_n)\right| = (n-1)|X| + |X / T_0 X|$,

$\left|X \times AD_m / T_0(X \times AD_m)\right| = (m-1)|X| + |X / T_0 X|$. Оскільки простір X нескінченний, то $(n-1)|X| = (m-1)|X|$, звідки

$$\left|X \times AD_n / T_0(X \times AD_n)\right| = \left|X \times AD_m / T_0(X \times AD_m)\right|.$$

Таким чином, за теоремою 4 маємо, що $X \times AD_n \overset{M}{\sim} X \times AD_m$. ◊

Приклад 2. Покажемо, що умова бути тихоновським простором у твердженні 18 є суттєвою. Нехай $X = [0,1]$ – відрізок дійсної прямої з топологією, породженою евклідовою метрикою, $Y = [0,1] \times AD_2$, $Z = AD_2$. За твердженням 19 простори $X \times AD_2$ та $Y \times AD_2 = X \times AD_2 \times AD_2 = X \times AD_4$ є M-еквівалентними, хоча простори X та Y не є M-еквівалентними.

Зауваження 1. У праці [1] наведено повну ізоморфну класифікацію вільних (абелевих) топологічних груп зліченних компактних гаусдорфових просторів. Нехай тепер X – довільний зліченний компактний (не обов'язково гаусдорфовий). Зважаючи на те, що неперервний образ зліченного компактного простору є зліченним компактним, то простір $\eta_X(X)$ є зліченним компактним та цілком регулярним. Таким чином, з твердження 6 випливає, що задача ізоморфної класифікації зліченних компактних просторів зводиться до аналогічної задачі на множині зліченних компактних цілком регеулярних просторів. Теореми 3 і 4 дають можливість звести цю класифікацію на клас тихоновських зліченних компактних просторів.

1. *Граев М. И.* Свободные топологические группы // Изв. АН СССР Сер. мат. – 1948. – **12**, № 3. – С. 279–324.
2. *Гуран І. Й., Зарічний М. М.* Елементи теорії топологічних груп. – Київ: НМК ВО, 1991. – 76 с.
3. *Марков А. А.* О свободных топологических группах // Докл. АН СССР. – 1941. – **31**, № 4. – С. 299–301.
4. *Окунев О. Г.* М-эквивалентность произведений // Тр. Моск. мат. общества. – 1995. – **56**. – С. 192–205.
5. *Пирч Н. М.* Конструкції, що зберігають М-еквівалентність // Вісник НУ "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2008. – **625**. – С. 48–53.
6. *Пирч Н. М.* Про вільні добутки паратопологічних груп та вільні паратопологічні групи // Вісник НУ "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2011. – **696**. – С. 20–25.
7. *Arhangel'skii A. V., Tkachenko M. G.* Topological groups and related structures. – Amsterdam; Paris: Atlantis Press, 2008. – 782 p.
8. *Fay T. H., Ordman E. T., Smith Thomas B. V.* The free topological group over the rationals // General Topol. Appl. – 1979. – **10**, No. 1. – P. 33–47.
   – https://doi.org/10.1016/0016-660X(79)90027-8

9. *Okunev O. G.* A method for constructing examples of *M*-equivalent spaces // Topol. Appl. – 1990. – **36**, No. 2. – P. 157–171. – https://doi.org/10.1016/0166-8641(90)90006-N
10. *Pyrch N.* On isomorphisms of the free paratopological groups and free homogeneous spaces I // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – **67**. – P. 224–232.
11. *Pyrch N.* On the isomorphisms of free paratopological groups and free homogeneous spaces II // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – **71**. – P. 191–203.
12. *Smith Thomas B. V.* Free topological groups // General Topol. Appl. –1974. – **4**, No. 1. – P. 51–72. – https://doi.org/10.1016/0016-660X(74)90005-1

ОБ ИЗОМОРФНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ СВОБОДНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП НЕТИХОНОВСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Предложен метод сведения изоморфной классификации свободных топологических групп вполне регулярных пространств к изоморфной классификации свободных топологических групп вполне тихоновских пространств.

Ключевые слова: *свободная топологическая группа, M-эквивалентность, T_0-рефлексия.*

ON THE ISOMORPHIC CLASSIFICATION OF THE FREE TOPOLOGICAL GROUPS OF THE NON-TYCHONOFF SPACES

In the paper we proposed the method for reducing the problem of isomorphic classification of free topological groups of completely regular spaces to the problem of isomorphic classification of free topological groups of completely Tychonoff spaces.

Key words: *free topological group, M-equivalence, T_0-reflexion.*

Українська академія друкарства, Львів
Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

Одержано
03.10.19