УДК 539.3

Ю. І. Максимів, Ю. В. Пороховський, Р. В. Рабош[✉], В. О. Міщенко, Я. І. Кунець

ДИНАМІЧНА ВЗАЄМОДІЯ ТОНКОГО МЕТАЛІЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ З П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЮ МАТРИЦЕЮ

Створено математичну модель динамічної поведінки тонкого металічного включення чи прошарку у п'єзоелектричному середовищі за дії на композит усталених навантажень поздовжнього зсуву. На межі включення і матриці виконуються умови ідеального механічного контакту та рівність нулю електричного потенціалу. Модельовано за допомогою апарату теорії сингулярних збурень.

Ключові слова: *п'єзокерамічне середовище, металічне включення, динамічна взаємодія, теорія сингулярних включень.*

Вступ. Побудова математичних моделей взаємодії тонких неоднорідностей з навколишнім середовищем є важливим етапом розв'язування динамічних і статичних задач механіки неоднорідних структур. П'єзокерамічні елементи конструкцій із тонкими наповнювачами широко застосовують у неруйнівному контролі за суцільністю середовищ, медичній техніці, автомобілебудуванні, електроніці тощо. Основний підхід, що використовують під час математичного моделювання таких процесів у механіці неоднорідних структур, полягає у заміні тонкої неоднорідності деякою поверхнею, на якій записують певні ефективні граничні умови. Ці умови є наслідком механічних або математичних припущень, або ж їх отримують за допомогою асимптотичних методів. Огляди літератури, де використовують механічні і математичні гіпотези, можна знайти в працях [4, 9−11]. Тонкі п'єзоелектричні неоднорідності у пружній матриці розглядали в публікаціях [5, 12, 15, 16]. Також асимптотично змодельовано [2, 3, 6−8, 13, 14] динамічний контакт пружних тіл через тонкі п'єзоелектричні включення і прошарки різної жорсткості. У цьому дослідженні цей підхід вжито для створення моделей динамічної поведінки тонкостінних металічних включень чи прошарків у п'єзокерамічному середовищі за усталених коливань композиту.

1. Формулювання задачі. Нехай у необмеженому п'єзокерамічному середовищі, що характеризується пружною і п'єзоелектричною сталими c_{44} і e_{15}, діелектричною проникністю ε_{11} та густиною ρ, знаходиться тонке пружне металічне включення з модулем зсуву μ_0 і густиною ρ_0, яке займає область $W_\varepsilon = \{(x_1, x_2):\ |x_1| < a,\ |x_2| \le h\}$, де $2h$ та $2a$ − товщина та довжина неоднорідності, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ − декартові координати. Його відносна товщина є мала і залежить від безрозмірного параметра $\varepsilon = h / a << 1$. Електропружна система знаходиться в умовах поздовжнього зсуву.

Тут відмінна від нуля компонента вектора переміщень та електричний потенціал у п'єзокерамічній матриці $u(\mathbf{x})$ та $\varphi(\mathbf{x})$ задовольняють рівняння руху і рівняння Максвелла за квазістатичного наближення [1, 6]:

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad \Delta\Phi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in R^2 \setminus W_\varepsilon, \tag{1}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\varphi(\mathbf{x}), \quad k = \omega / c, \quad c = \sqrt{c_{44}(1+\eta^2)/\rho},$$

$$\eta = e_{15} \Big/ \sqrt{c_{44}\,\varepsilon_{11}},$$

✉ romanrabosh@gmail.com

де $\Phi(\mathbf{x})$ − приведений потенціал електричного поля; k та c − хвильове число та швидкість хвиль у матриці; η − коефіцієнт електромеханічного зв'язку; ω − частота коливань композиту.

Для матеріалу матриці виконуються співвідношення [1, 6]

$$\sigma_{31}(\mathbf{x}) = c_{44}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(1+\eta^2\right)u(\mathbf{x}) - \eta^2\Phi(\mathbf{x})\right],$$

$$\sigma_{23}(\mathbf{x}) = c_{44}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\left(1+\eta^2\right)u(\mathbf{x}) - \eta^2\Phi(\mathbf{x})\right],$$

$$D_1(\mathbf{x}) = e_{15}\frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \quad D_2(\mathbf{x}) = e_{15}\frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \quad \mathbf{x}\in R^2\setminus W_\varepsilon, \tag{2}$$

де $\sigma_{13}(\mathbf{x})$, $\sigma_{32}(\mathbf{x})$ і $D_1(\mathbf{x})$, $D_2(\mathbf{x})$ − компоненти тензора напружень та вектора електричної індукції.

У включенні задовольняються рівняння руху та закон Гука:

$$\Delta u^0(\mathbf{x}) + k_0^2 u^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}\in W_\varepsilon,$$

$$\sigma_{31}^0(\mathbf{x}) = \mu_0\frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \quad \sigma_{32}^0(\mathbf{x}) = \mu_0\frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \quad \mathbf{x}\in W_\varepsilon, \tag{3}$$

$$k = \omega / c_0, \quad c_0 = \sqrt{\mu_0/\rho_0},$$

де $u^0(\mathbf{x})$ та $\sigma_{31}^0(\mathbf{x})$, $\sigma_{32}^0(\mathbf{x})$ − переміщення та компоненти тензора напружень у включенні; k_0 − хвильове число.

Надалі повне поле переміщень та повне електричне поле у матриці подамо у вигляді

$$u(\mathbf{x}) = u^{in}(\mathbf{x}) + u^{sc}(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) = \varphi^{in}(\mathbf{x}) + \varphi^{sc}(\mathbf{x}),$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi^{in}(\mathbf{x}) + \Phi^{sc}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in R^2\setminus W_\varepsilon, \tag{4}$$

де $u^{in}(\mathbf{x})$, $\varphi^{in}(\mathbf{x})$, $\Phi^{in}(\mathbf{x})$ та $u^{sc}(\mathbf{x})$, $\varphi^{sc}(\mathbf{x})$, $\Phi^{sc}(\mathbf{x})$ − компоненти переміщень, електричного потенціалу, приведеного електричного потенціалу у заданій хвилі, що набігає на включення, та розсіяній ним.

Коли розсіювач зондує плоска гармонічна хвиля, маємо:

$$u^{in}(\mathbf{x}) = u_0\exp\left[ik(x_1\cos\theta_{in} + x_2\sin\theta_{in})\right],$$

$$\varphi^{in}(\mathbf{x}) = \varphi_0\exp\left[ik(x_1\cos\theta_{in} + x_2\sin\theta_{in})\right], \quad \varphi_0 = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}u_0,$$

де u_0, φ_0 − амплітуди компонент хвилі, θ_{in} − кут її падіння.

На лінії взаємодії складників композиту виконуються умови ідеального механічного контакту:

$$u(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\left(1+\eta^2\right)u(\mathbf{x}) - \eta^2\Phi(\mathbf{x})\right] = \gamma\frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \quad \mathbf{x}\in\partial W_\varepsilon, \tag{5}$$

де $\gamma = \mu_0/c_{44}$ − параметр контрастності матеріалу включення.

Оскільки тонкостінне включення металічне, то потенціал електричного поля на його поверхні сталий. Тому, враховуючи співвідношення (1), (4), запишемо:

$$\varphi(\mathbf{x}) = u^{in}(\mathbf{x}) + u^{sc}(\mathbf{x}) - \Phi^{in}(\mathbf{x}) - \Phi^{sc}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}\in\partial W_\varepsilon. \tag{6}$$

Щоб завершити формулювання задачі (1)−(6), слід врахувати умови випромінювання Зоммерфельда [1]:

$$u^{sc}(\mathbf{x}) \approx \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k r}}\exp(ikr - i\pi/4)\, f_1(\theta), \qquad r = |\mathbf{x}| \to \infty,$$

$$\varphi^{sc}(\mathbf{x}) \approx \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k r}}\exp(ikr - i\pi/4)\, f_2(\theta), \qquad f_2(\theta) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} f_1(\theta), \tag{7}$$

де $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ – комплексні амплітуди складників розсіяної включенням хвилі; $(r,\ \theta)$ – полярна система координат $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$.

2. Моделі динамічної поведінки включення. Подамо зміщення та приведений електричний потенціал у вигляді асимптотичних розкладів за малим параметром ε [6]:

$$u^{sc}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j^{sc}(x_1, x_2)\,\varepsilon^j,$$

$$\Phi^{sc}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j^{sc}(x_1, x_2)\,\varepsilon^j, \qquad \mathbf{x} \in R^2 \setminus W_\varepsilon, \tag{8}$$

$$u^{0}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j^{0}(x_1, \bar{x}_2)\,\varepsilon^j, \qquad \bar{x}_2 = x_2/\varepsilon, \qquad \mathbf{x} \in W_\varepsilon.$$

Розглянемо два діапазони зміни параметра контрастності γ

$$1)\ \varepsilon \le \gamma \le 1/\varepsilon;$$

$$2)\ 0 \le \gamma \le \varepsilon, \tag{9}$$

які відповідають неконтрастному та контрастному включенням малої жорсткості відповідно. Підставляючи розклади (8) у співвідношення (1)–(6) та розчеплюючи їх за малим параметром ε [6, 14], у діапазоні 1 отримаємо асимптотично точну модель динамічної взаємодії неконтрастного включення чи прошарку із п'єзокерамічною матрицею:

$$\left(1+\eta^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[u^{sc}(x_1,+0) - u^{sc}(x_1,-0)\right] =$$

$$= \eta^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\Phi^{sc}(x_1,+0) - \Phi^{sc}(x_1,-0)\right],$$

$$u^{sc}(x_1,\pm 0) + u^{in}(x_1,0) = \Phi^{sc}(x_1,\pm 0) + \Phi^{in}(x_1,0),$$

$$u^{sc}(x_1,+0) - u^{sc}(x_1,-0) = 0, \qquad -a \le x_1 \le a, \qquad x_2 = 0. \tag{10}$$

Зі співвідношень (10) випливає, що у розглянутому діапазоні форма та пружні властивості тонких структурних елементів композиту не впливають на поведінку напружень у його п'єзокерамічному складнику. У діапазоні 2 маємо:

$$\left(1+\eta^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[u^{sc}(x_1,+0) - u^{sc}(x_1,-0)\right] =$$

$$= \eta^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\Phi^{sc}(x_1,+0) - \Phi^{sc}(x_1,-0)\right],$$

$$u^{sc}(x_1,\pm 0) + u^{in}(x_1,0) = \Phi^{sc}(x_1,\pm 0) + \Phi^{in}(x_1,0),$$

$$\gamma\left[u^{sc}(x_1,+0) - u^{sc}(x_1,-0)\right] = 2h\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\left(1+\eta^2\right)\left[u^{sc}(x_1,0) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + u^{in}(x_1,0)\right] - \eta^2\left[\Phi^{sc}(x_1,0) + \Phi^{in}(x_1,0)\right]\right\},$$

$$-a \le x_1 \le a, \qquad x_2 = 0. \tag{11}$$

Отже, пружні та геометричні параметри включення входять у модель його динамічної поведінки (11) і суттєво впливають на розподіл напружень у матриці.

Висновки. Побудовано асимптотично точні умови контакту п'єзокерамічного середовища через тонке металічне включення чи прошарок за поздовжнього зсуву та усталених коливань композиту. Компоненти електропружної системи перебувають між собою в умовах ідеального механічного контакту. Виявлено, що механічні та геометричні параметри неконтрастних включень (на відміну від контрастних малої жорсткості) не впливають на напружено-деформований стан п'єзокерамічної матриці. Запропонований метод дослідження, що ґрунтується на апараті теорії сингулярних збурень, можна використати під час вивчення процесів хвилеутворення у розглянутих композитних структурах за умов їх плоского деформованого стану.

Робота виконана за фінансової підтримки бюджетної програми «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

1. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982. – 240 с.
2. *Максимів Ю. І., Рабош Р. В., Кунець Я. І., Пороховський В. В.* Взаємодія SH-хвиль з тонким п'єзоелектричним неконтрастним включенням у пружному півпросторі // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 97–101.
3. *Рабош Р. В., Максимів Ю. І., Пороховський В. В., Міщенко В. О., Кунець Я. І.* Математична модель поширення SH-хвиль у композитах з розподіленими тонкими п'єзоелектричними включеннями // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2018. – Вип. 16. – С. 107–111.
4. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
5. *Сулим Г., Рабош Р.* Антиплоска задача для тонкого пружного включення у п'єзоелектричному просторі // Вісн. Львівськ. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 189–202.
6. *Сулим Г. Т., Кунець Я. І., Рабош Р. В.* Асимптотичний аналіз динамічної взаємодії тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення з пружним середовищем за поздовжнього зсуву // Вісн. Донецьк. ун-ту. – 2008. – № 1. – С. 137–141.
7. *Kunets Ya. I., Matus V. V., Mishchenko V. O., Rabosh R. V.* SH-wave scattering by plane low contrast piezoelectric inclusion // Proc. XXI Int. Seminar/Workshop «Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory» (DIPED–2016). – Tbilisi, 2016. – P. 142–144.
   – https://doi.org/10.1109/DIPED.2016.7772238
8. *Кунець Я. І., Рабош Р. В.* Поздовжній зсув пружного середовища з тонким прямолінійним гострокінцевим п'єзоелектричним включенням низької жорсткості // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 3. – С. 141–147.
   Те саме: *Kunets' Ya. I., Rabosh R. V.* Longitudinal shear of an elastic medium with a thin rectilinear sharp-pointed piezoelectric inclusion of low rigidity // J. Math. Sci. – 2012. – **180**, No. 2. – P. 153–160.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-011-0637-7
9. *Mykhas'kiv V. V.* Numerical simulation of wave propagation in 3D elastic composites with rigid disk-shaped inclusions of variable mass.// In: Composites and Their Applications / N. Hu (ed.). – Rijeka (Croatia): InTech Press, 2012. – (Chapter 2. – P. 17–36.) – https://doi.org/10.5772/48113
10. *Михаськів В. В., Кунець Я. І., Матус В. В., Бурчак О. В., Балалаєв О. К.*, Параметризація поширення пружних хвиль у середовищі з ансамблями дискових включень // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – **54**, № 1. – С. 126–132.
    Те саме: Mykhas'kiv V. V., Kunets' Y. I., Matus V. V., Burchak O. V., Balalaev O. K. Parametrization of the propagation of elastic waves in a medium with ensembles of disc-shaped inclusions // Mat. Sci. – 2018. – **54**, No. 1. – P. 130–137. – https://doi.org/10.1007/s11003-018-0167-2
11. *Mykhas'kiv V., Kunets Ya., Matus V., Khay O.* Elastic wave dispersion and attenuation caused by multiple types of disc-shaped inclusions // Int. J. Struct. Integr. – 2018. – **9**, No. 2. – P. 219–232.

– https://doi.org/10.1108/IJSI-06-2017-0040

12. *Pasternak I., Pasternak R., Sulym H.* Boundary integral equations for 2D thermo-electroelasticity of a half-space with cracks and thin inclusions // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2013. – **37**, No. 11. – P. 1514–1523.
    – https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2013.08.008
13. *Rabosh R. V., Kunets Ya. I., Maksymiv Yu. I.* Effective dynamical parameters of piezoelectric medium with randomly distributed piezoelectric inclusions // Proc. XXIII Int. Seminar/Workshop «Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory» (DIPED–2018). – Tbilisi, 2018. – P. 153–156.
    – https://doi.org/10.1109/DIPED.2018.8543266
14. *Рабош Р. В.* Динамічна взаємодія пружного середовища з тонкостінним криволінійним п'єзоелектричним включенням при поздовжніх коливаннях композита // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 1. – С. 101–106.
    Те саме: *Rabosh R. V.* Dynamic interaction of an elastic medium with a thin-walled curvilinear piezoelectric inclusion under longitudinal vibrations of a composite // J. Math. Sci. – 2010. – **168**, No. 5. – P. 625–632.
    – https://doi.org/10.1007/s10958-010-0013-z
15. *Zhang B., Boström A., Niklasson A. J.* Antiplane shear waves from a piezoelectric strip actuator: exact versus effective boundary condition solutions // Smart Mater. Struct. – 2004. – **13**, No. 1. – P. 161–168.
    – https://doi.org/10.1088/0964-1726/13/1/018
16. *Wang X. D., Huang G. L.* On the dynamic behavior of piezoelectric sensors and actuators embedded in elastic media // Acta Mech. – 2008. – **197**. – P. 1–17.
    – https://doi.org/10.1007/s00707-007-0502-4

ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОНКОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ

Создана математическая модель динамического поведения тонкого металлического включения или прослойки в пьезоэлектрической среде при воздействии на композит устоявшихся нагрузок продольного сдвига. На границе включения и матрицы выполняются условия идеального механического контакта и равенство нулю электрического потенциала. Моделирование осуществлено с помощью аппарата теории сингулярных возмущений.

Ключевые слова: *пьезокерамическая среда, металлическое включение, динамическое взаимодействие, теория сингулярных включений.*

DYNAMIC INTERACTION OF A THIN METALLIC INCLUSION WITH A PIEZOCERAMIC MATRIX

A mathematical model of dynamic behavior of a thin metallic inclusion or a layer in a piezoelectric medium subjected to longitudinal shear load is constructed. At the boundary of inclusion and matrix, the conditions of perfect mechanical contact and zero electric potential are prescribed. Modeling is performed using the apparatus of the theory of singular perturbations.

Key words: *piezoceramic medium, metallic inclusion, dynamic interaction, singular inclusion theory.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.10.19